ВЕРОЯТНОСТНО-ВОЗМОЖНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

УДК 519.2

О ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРА РАСТУЩЕЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

Бенинг В.Е.
Факультет вычислительной математики
и кибернетики МГУ, Москва
bening@yandex.ru

В работе рассмотрен аналог локальной асимптотической нормальности (ЛАН, см., например, [1], [2], [10]) в случае параметра большой размерности в задачах проверки гипотез. В этой связи приводится также байесовская постановка и строятся байесовские критерии. Методами работ [6] - [8] условия регулярности обычно используемые для справедливости ЛАН с одномерным параметром (см. [1]) обобщаются (в частности носитель распределения может зависеть от параметра) на случай параметра растущей размерности.

Ключевые слова: проверка гипотез; локальная асимптотическая нормальность.
Keywords: hypotheses verification; local asymptotic normality.

Введение. Пусть

$$\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nn}), \tag{1.1}$$

независимые наблюдения и X_{ni} имеют плотности $p(x, \theta_{ni})$, $\quad \theta_{ni} \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1, \ldots, n$ относительно некоторой σ - конечной меры $\nu(\cdot)$. Обозначим вектор параметров через

$$\theta_n = (\theta_{n1}, \ldots, \theta_{nn}) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

На основе наблюдений $\mathbf{X}_n$ мы хотим проверить простую гипотезу вида

$$\mathsf{H}_{n0} : \theta_n = 0, \tag{1.3}$$

(точка 0 взята без ограничения общности и может быть заменена на любую фиксированную точку $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ с одинаковыми координатами), то есть при гипотезе H_{n0} наблюдения X_{ni} независимы одинаково распределены с плотностью $p(x) \equiv p(x, 0)$. В качестве альтернативы рассмотрим сложную альтернативу вида

$$\mathsf{H}_{n1} : \theta_n \neq 0. \tag{1.4}$$

В байесовской постановке мы предполагаем, что параметр θ_n при гипотезе H_{n1} случаен и имеет априорное распределение $Q_n(\cdot)$, про которое мы предположим,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00949, 02-01-01080 и 03-01-00428, и INTAS, проект 03-51-5018.

что оно является прямым произведением n координатных распределений. Таким образом, мы считаем, что θ_n является случайным вектором в $\mathbb{R}^n$ с независимыми координатами $\theta_{n1}, \ldots, \theta_{nn}$, которые имеют, соответственно, распределения $Q_{n1}(\cdot), \ldots, Q_{nn}(\cdot)$.

При гипотезе H_{n1} вектор $\mathbf{X}_n$ имеет плотность

$$p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta_{ni}), \qquad \mathbf{x}_n = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1.5}$$

Мы будем обозначать распределение и математическое ожидание, соответствующее этой плотности, соответственно, через P_{n,θ_n} и E_{n,θ_n}. Аналогично при гипотезе H_{n0} вектор $\mathbf{X}_n$ имеет плотность

$$p_n(\mathbf{x}_n) \equiv p_n(\mathbf{x}_n, 0) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i). \tag{1.6}$$

Обозначим мощность критерия $\Psi_n(\mathbf{X}_n)$ при фиксированной альтернативе θ_n через

$$\beta_n(\theta_n, \Psi_n) = \mathsf{E}_{n,\theta_n}\ \Psi_n(\mathbf{X}_n) =$$

$$= \int \Psi_n(\mathbf{x}_n)\, p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n). \tag{1.7}$$

По лемме Неймана - Пирсона, при фиксированном уровне значимости $\alpha \in (0,\ 1)$ критерий $\Psi_n^*(\mathbf{X}_n)$, максимизирующий мощность (1.7) в классе всех критериев $\Psi_n(\mathbf{X}_n)$, удовлетворяющих условию

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \Psi_n(\mathbf{X}_n) \le \alpha \tag{1.8}$$

существует и имеет вид

$$\Psi_n^*(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} 1, & h_n(\mathbf{x}_n) > c_n, \\ 0, & h_n(\mathbf{x}_n) < c_n, \end{cases} \tag{1.9}$$

где отношение правдоподобия $h_n(\mathbf{x}_n)$ имеет вид (см. (1.5), (1.6))

$$h_n(\mathbf{x}_n) = \frac{p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n)}{p_n(\mathbf{x}_n)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_i, \theta_{ni})}{p(x_i)}, \tag{1.10}$$

причем константы c_n и критерии $\Psi_n^*(\mathbf{x}_n)$ на множествах

$$\{\mathbf{x}_n : h_n(\mathbf{x}_n) = c_n\}$$

должны и могут быть определены так, чтобы

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \Psi_n^*(\mathbf{X}_n) = \alpha. \tag{1.11}$$

Обозначим через $\beta_n^*(\theta_n)$ мощность (огибающая функция мощности) этого критерия, то есть

$$\beta_n^*(\theta_n) = \mathsf{E}_{n,\theta_n}\ \Psi_n^*(\mathbf{X}_n). \tag{1.12}$$

Всюду далее в работе приняты следующие обозначения. Для функции двух переменных $f(x,\theta)$ обозначим

$$f^{(j)}(x,\theta) \;=\; \frac{\partial^j}{\partial\theta^j}\, f(x,\theta), \quad f^{(j)}(x) \;=\; f^{(j)}(x,0), \quad j \;=\; 0,1,\ldots \tag{1.13}$$

Обозначим также

$$l(x,\theta) = \log p(x,\theta), \quad l_G(x,\theta) = \log \int p(x,\theta u)dG(u), \quad \psi_j(x) = \frac{p^{(j)}(x)}{p(x)}, \quad j = 1,2,\ldots$$

$$J(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta \left(\frac{p^{(2)}(X_1,\theta)}{p(X_1)}\right)^2, \qquad I(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta \left(l^{(1)}(X_1,\theta)\right)^2, \tag{1.14}$$

$$L_{nj} \;=\; \sum_{i=1}^n \theta_{ni}^j (l^{(j)}(X_i) - \mathsf{E}_0\, l^{(j)}(X_1)), \quad L_{nj}^Q \;=\; \sum_{i=1}^n b_{ni}^j (l_G^{(j)}(X_i) - \mathsf{E}_0\, l_G^{(j)}(X_1)), \tag{1.15}$$

где $\{b_{ni}\}$ некоторые константы,

$$\mu_{nj} \;=\; \mathsf{E}_0\, l^{(j)}(X_1) \sum_{i=1}^n \theta_{ni}^j, \quad \mu_{Qnj} \;=\; \mathsf{E}_0\, l_G^{(j)}(X_1) \sum_{i=1}^n b_{ni}^j, \tag{1.16}$$

$$\sigma_{nj}^2 \;=\; \mathsf{Var}_0\, l^{(j)}(X_1) \sum_{i=1}^n \theta_{ni}^{2j}, \quad \sigma_{Qnj}^2 \;=\; \mathsf{Var}_0\, l_G^{(j)}(X_1) \sum_{i=1}^n b_{ni}^{2j}. \tag{1.17}$$

Таким образом логарифм отношения правдоподобия для проверки гипотезы H_{n0} против фиксированной альтернативы θ_n из H_{n1} равен

$$\Lambda_n(\theta_n) \;=\; \sum_{i=1}^n \log\, \frac{p(X_i,\theta_{ni})}{p(X_i)} \;=\; \sum_{i:\theta_{ni}\neq 0} \log\, \frac{p(X_i,\theta_{ni})}{p(X_i)}, \tag{1.18}$$

Для отношения правдоподобия $h_n(\mathbf{X}_n)$ (см. (1.10)) будет построена (см. раздел 3 и вывод формулы (3.9)) следующая стохастическая аппроксимация (при выполнении формулируемых ниже условий регулярности)

$$h_n(\mathbf{X}_n) \;=\; \exp\{\Lambda_n(\theta_n)\} \;\approx\; \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) \;\equiv\; \exp\Big\{\tilde{L}_{n1} \;-\; \frac{A^2\, I}{2}\Big\}, \tag{1.19}$$

где $A^2 \;>\; 0$ некоторая постоянная (см. условие (T2), (1.21)),

$$\tilde{L}_{n1} \;=\; \sum_{i=1}^n \theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_i), \quad \tilde{l}^{(1)}(x) \;=\; l^{(1)}(x)\, \mathbf{1}_{D_{ni,\delta}}(x),$$

$D_{ni,\delta}$ - множества из Леммы 4.6, $\delta > 0$ - произвольно малое число и $\mathbf{1}_A(\cdot)$ - индикатор множества A.

Сформулируем условия регулярности. Следуя работе [8] назовем семейство измеримых множеств $\{A_\theta,\ \theta \in [0,\varepsilon]\}$, $\varepsilon > 0$, 2 - системой, если $A_{\theta_1} \subset A_{\theta_2}$, при $0 < \theta_2 < \theta_1 \le \varepsilon$, $p(x) > 0$ на

$$A_0 = \bigcup_{\theta\in[0,\varepsilon]} A_\theta$$

и

$$\mathsf{P}_0(A_\theta^c) \,=\, o(\theta^2).$$

Обозначим через

$$\varepsilon_A(x) \,=\, \sup\,[0 \,\le\, \theta \,\le\, \varepsilon \,:x \,\in\, A_\theta].$$

Тогда $\varepsilon_A(x) > 0$ при $x \in A_0$ и $x \in A_\theta$, если $0 < \theta < \varepsilon_A(x)$.

Предположим, что плотность $p(x,\theta)$ удовлетворяет следующему условию (см.[8] и [2], стр. 85, Условие 1.4.8, [1], Условия A1 - A3).

Условие $F_2^{(1)}$**.** *Существует* $\varepsilon > 0$ *и 2 - система* $\{A_\theta,\, \theta \in [0,\varepsilon]\}$ *такие, что*

1. *для любого* $x \in A_0$ *плотность* $p(x,\theta)$ *абсолютно непрерывна по* $\theta \in [0,\varepsilon_A(x)]$. *Для любого* $\theta \in [0,\varepsilon]$, $p^{(1)}(x,\theta)$ *существует для* ν *- почти всех* $x \,\in\, A_\theta$*;*

2.
$$0 \,<\, I \,=\, \mathsf{E}_0\Big(l^{(1)}(X_1)\Big)^2 \,<\, \infty;$$

3. *выполняется соотношение*

$$\int \left(\sqrt{p(x,\theta)} \,-\, \sqrt{p(x)} \,-\, \theta\,\frac{p^{(1)}(x)}{2\,\sqrt{p(x)}}\right)^2 d\nu(x) \,=\, o(\theta^2).$$

Достаточные условия для выполнения Условия $F_2^{(1)}(3)$ приведены в Лемме 4.5 (2).

Предположим также, что параметр θ_n удовлетворяет следующим условиям

$$(\mathrm{T1}): \quad \bar\theta_n \,=\, \max_{1\le i\le n}\,|\theta_{ni}| \,\to\, 0. \tag{1.20}$$

$$(\mathrm{T2}): \quad \sum_{i=1}^{n}\theta_{ni}^2 \,\to\, A^2 \,>\, 0, \quad n \,\to\, \infty. \tag{1.21}$$

При этом справедлива следующая теорема, показывающая что аппроксимация $\bar h_n(\mathbf{X}_n)$ приближает $h_n(\mathbf{X}_n)$ в метрике L_1, то есть

$$\mathsf{E}_{n,0}\,|h_n(\mathbf{X}_n) \,-\, \bar h_n(\mathbf{X}_n)| \,\to\, 0, \quad n \,\to\, \infty. \tag{1.22}$$

Используя это соотношение, будет также показано (см. Лемму 1.1), что критерий, основанный на $\bar h_n(\mathbf{X}_n)$, асимптотически имеет ту же мощность, что и наилучший критерий $\Psi_n^*(\mathbf{X}_n)$.

Теорема 1.1. *Пусть существует* $\varepsilon > 0$*, для которого плотности* $p(x,\theta)$ *и* $p(x,-\theta)$*,* $0 \,\le\, \theta \,\le\, \varepsilon$ *удовлетворяют условию* $F_2^{(1)}$ *и пусть выполнены условия регулярности (T1) и (T2) (см. (1.20) и (1.21)), тогда справедливо соотношение (1.22).*

Замечание 1.1. Заметим, что в аппроксимацию $\bar h_n(\mathbf{X}_n)$ (см. (1.19)) входят множества $D_{ni,\delta}$, зависящие от произвольно малого числа $\delta > 0$, с помощью которого обеспечивается стремление к нулю в соотношении (1.22) (см. формулу (5.11)). Это число можно заменить последовательностью $\delta_n \downarrow 0$, которая так же как и множества $\{D_{\theta,\delta}\}$ из Леммы 4.5 неконструктивна. Возможность такой замены основана на следующем утверждении, доказательство которого нетрудно получить.

Пусть $\{D_{\theta,\delta}\}$ при каждом $\delta > 0$ некоторая 2 - система. Тогда существует 2 - система $\{D_\theta\}$ и функция $\delta(\theta) > 0$ такие, что $\delta(\theta_1) \le \delta(\theta_2)$ при $\theta_1 \le \theta_2$; $\delta(\theta) \to 0$ при $\theta \downarrow 0$ и $D_\theta \subset D_{\theta,\delta(\theta)}$.

Заметим, что из этой Теоремы следует, что

$$a_n \;\equiv\; \int \bar{h}_n(\mathbf{x}_n)\, p_n(\mathbf{x}_n)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n) \;\to\; 1. \tag{1.23}$$

Поэтому выражение вида

$$\frac{1}{a_n}\,\bar{h}_n(\mathbf{x}_n)\, p_n(\mathbf{x}_n) \;\ge\; 0 \tag{1.24}$$

можно рассматривать как плотность распределения вероятностей. В связи с этим рассмотрим задачу проверки простой гипотезы H_{n0} (см. (1.3)) против простой альтернативы $\bar{\mathsf{H}}_{n1}$, согласно которой вектор наблюдений $\mathbf{X}_n$ имеет плотность (1.24) с $\theta_n \neq 0$. По лемме Неймана - Пирсона, при фиксированном уровне значимости $\alpha \in (0,\, 1)$, наиболее мощный критерий $\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{X}_n)$ уровня α имет вид

$$\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{x}_n) \;=\; \begin{cases} 1, & \bar{h}_n(\mathbf{x}_n) \;>\; \bar{c}_n, \\ 0, & \bar{h}_n(\mathbf{x}_n) \;<\; \bar{c}_n, \end{cases} \tag{1.25}$$

причем константы $\bar{c}_n$ и критерии $\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{x}_n)$ на множествах

$$\{\mathbf{x}_n \;:\; \bar{h}_n(\mathbf{x}_n) \;=\; \bar{c}_n\}$$

определены так, чтобы

$$\mathsf{E}_{n,0}\;\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{X}_n) \;=\; \alpha. \tag{1.26}$$

Обозначим через $\bar{\beta}^*_n(\theta_n)$ мощность этого критерия, то есть

$$\bar{\beta}^*_n(\theta_n) \;=\; \mathsf{E}_{n,\theta_n}\;\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{X}_n).$$

Лемма 1.1. *Пусть выполнено соотношение (1.22), тогда*

$$\beta^*_n(\theta_n) \;-\; \bar{\beta}^*_n(\theta_n) \;\to\; 0, \qquad n \;\to\; \infty.$$

Работа организована следующим образом: в части 2 рассматривается байесовская постановка, часть 3 содержит эвристический вывод асимптотической аппроксимации для отношений правдоподобия, в разделе 4 приводится схема доказательства основных Теорем 1.1 и 2.1, часть 5 посвящена доказательствам Теорем 1.1, 2.1, Лемм 1.1, 2.1 и вспомогательных результатов, в разделе 6 содержатся примеры.

Помимо введенных ранее, используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – действительная прямая, символ $\Longrightarrow$ будет обозначать слабую сходимость, $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального закона, $\mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$ – нормальное распределение в $\mathbb{R}$ с указанными параметрами, u_γ - γ - квантиль стандартного нормального закона ($\Phi(u_\gamma) = \gamma,\ \gamma \in (0,1)$), $\tau = n^{-1/2}$.

Для полинома $H(x) = \sum\limits_{i\ge 0} c_i x^i$ и $r > 0$ обозначим

$$\Big[H(x)\Big]_r \;=\; \sum_{0\le i\le r} c_i x^i.$$

Символ $\square$ означает конец доказательства.

Байесовская постановка. В байесовской постановке мы предполагаем, что параметр θ_n при гипотезе H_{n1} случаен и имеет априорное распределение $Q_n(\cdot)$, про которое мы предположим, что оно является прямым произведением n координатных распределений. Таким образом мы считаем, что θ_n является случайным вектором в $\mathbb{R}^n$ с независимыми координатами $\theta_{n1}, \ldots, \theta_{nn}$, которые имеют соответственно распределения $Q_{n1}(\cdot), \ldots, Q_{nn}(\cdot)$. Аналогичная ситуация рассмотрена в работе [7] для случая нормальных наблюдений (см. также пример 3 из части 6). Там же имеется и мотивировка такой постановки.

В байесовской постановке плотность (1.5) является условной плотностью $\mathbf{X}_n$ при фиксированном значении θ_n и безусловная плотность $\mathbf{X}_n$ имеет вид

$$p_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;=\; \int p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n)\, dQ_{n1}(\theta_{n1}) \cdots dQ_{nn}(\theta_{nn}) \;=$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int p(x_i, u)\, dQ_{ni}(u), \tag{2.1}$$

то есть формально это смесь $p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n)$ по параметру θ_n.

В байесовской постановке мощность критерия $\Psi_n(\mathbf{X}_n)$ определяется как

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n) \;=\; \int \Psi_n(\mathbf{x}_n)\, p_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\, d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) \;=$$

$$= \int \beta_n(\theta_n, \Psi_n)\, dQ_{n1}(\theta_{n1}) \cdots dQ_{nn}(\theta_{nn}). \tag{2.2}$$

Последнее равенство верно в силу теоремы Фубини и неравенства $0 \le \Psi_n(\mathbf{x}_n) \le 1$.

В силу леммы Неймана - Пирсона, при фиксированном уровне значимости $\alpha \in (0,1)$ байесовский критерий $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ максимизирует мощность (2.2) в классе всех критериев $\Psi_n(\mathbf{X}_n)$, удовлетворяющих условию

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \Psi_n(\mathbf{X}_n) \;\le\; \alpha \tag{2.3}$$

и имеет вид

$$\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;=\; \begin{cases} 1, & h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;>\; d_n, \\ 0, & h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;<\; d_n, \end{cases} \tag{2.4}$$

где отношение правдоподобия $h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)$ имеет вид (см. (1.6), (2.1))

$$h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;=\; \frac{p_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)}{p_n(\mathbf{x}_n)} \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{\int p(x_i, u)\, dQ_{ni}(u)}{p(x_i)}, \tag{2.5}$$

причем константы d_n и критерии $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)$ на множествах

$$\{\mathbf{x}_n \;:\; h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \;=\; d_n\}$$

определены так, чтобы

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \;=\; \alpha. \tag{2.6}$$

Как было отмечено выше критерий $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ имеет вид (2.4) в силу леммы Неймана - Пирсона и того факта, что в байесовской постановке сложная гипотеза H_{n1}

(см. (1.4)) заменяется простой гипотезой $\mathsf{H}_{n1}^{Q_n}$, согласно которой вектор $\mathbf{X}_n$ имеет совместную плотность (2.1).

Таким образом логарифм отношения правдоподобия для проверки гипотезы H_{n0} против альтернативы $\mathsf{H}_{n1}^{Q_n}$ равен

$$\Lambda_n^{Q_n} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \log\, \frac{\int p(X_i,u)\,dQ_{ni}(u)}{p(X_i).} \tag{2.7}$$

Обозначим через $G_{ni}(u)$ функцию распределения априорного распределения $Q_{ni}(\cdot)$. В работе рассматривается случай, когда случайные величины θ_{ni} имеют вид $\theta_{ni} = b_{ni}\theta_i$, где $b_{ni} \,\geq\, 0, \quad i \,=\, 1,\ldots,n$ - некоторые константы, а случайные величины θ_i ограничены, то есть существует константа $C > 0$ такая, что

$$|\theta_i| \,\leq\, C, \qquad i \,=\, 1,2,\ldots,n,$$

имеют функцию распределения $G(u)$, то есть

$$G_{ni}(u) \,=\, G(u/b_{ni}), \qquad i \,=\, 1,\ldots,n.$$

Функция распределения $G(u)$ и константы $\{b_{ni}\}$ удовлетворяют условиям регулярности, сформулированным ниже (см. условия (G1), (G2) и (B1), (B2), (2.9) - (2.12)), которые, грубо говоря, означают симметрию функции распределения $G(u)$ и «асимптотическую регулярность» констант $\{b_{ni}\}$. Заметим, что в определении $\Lambda_n^{Q_n}$ (2.7) суммирование распространяется только на те i, при которых $b_{ni} > 0$.

Для отношения правдоподобия $h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)$ будет построена (см. раздел 3 формулу (3.20) и ее вывод) следующая стохастическая аппроксимация (см. (1.14) и (1.15))

$$h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \,=\, \exp\{\Lambda_n^{Q_n}\} \,\approx\, \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \,\equiv\, \exp\Big\{\frac{\tilde{L}_{n2}^{Q}}{2} \,-\, \frac{JB^4}{8}\Big\}, \tag{2.8}$$

где

$$\tilde{L}_{n2}^{Q} \,=\, \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_i), \qquad J \,=\, \mathsf{E}_0\left(\psi_2(X_1)\right)^2,$$

$$\psi_2(x) \,=\, \frac{p^{(2)}(x)}{p(x)}, \qquad \tilde{\psi}_2(x) \,=\, \psi_2(x)\,\mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(x),$$

$C_{ni,\delta}$ - множества из Леммы 4.8, $\delta > 0$ - произвольно малое число и $B^4 > 0$ - некоторая постоянная (см. условие (B2), (2.12)).

Сформулируем теперь условия регулярности на плотность $p(x,\theta)$ и априорное распределение $Q_n(\,\cdot\,)$.

Следуя работе [8] назовем семейство измеримых множеств $\{B_\theta, \theta\in[0,\varepsilon]\}, \varepsilon > 0$, 4 - системой, если $B_{\theta_1}\subset B_{\theta_2}$, при $0<\theta_2<\theta_1\leq\varepsilon$, $p(x)>0$ на

$$B_0 = \bigcup_{\theta\in[0,\varepsilon]} B_\theta$$

и

$$\mathsf{P}_0(B_\theta^c) \,=\, o(\theta^4).$$

Обозначим через

$$\varepsilon_B(x) \;=\; \sup\,[0 \;\le\; \theta \;\le\; \varepsilon \;:x \;\in\; B_\theta].$$

Тогда $\varepsilon_B(x) > 0$ при $x \in B_0$ и $x \in B_\theta$, если $0 < \theta < \varepsilon_B(x)$.

Предположим, что плотность $p(x,\theta)$ удовлетворяет следующему условию (см.[8] и [2], стр 85, Условие 1.4.8, [1], Условия A1 - A3).

Условие $F_4^{(3)}$**.** *Существует* $\varepsilon \;>\; 0$ *и 4 - система* $\{B_\theta,\, \theta \in [0,\varepsilon]\}$ *такие, что*

1. *для любого* $x \in B_0$ *плотность* $p(x,\theta)$ *имеет две непрерывные производные по* $\theta \;\in\; [0,\varepsilon_B(x)]$, $p^{(2)}(x,\theta)$ *абсолютно непрерывна по* $\theta \;\in\; [0,\varepsilon_B(x)]$.

   Для любого $\theta \in [0,\varepsilon]$, $p^{(3)}(x,\theta)$ *существует для* ν *- почти всех* $x \;\in\; B_\theta$*;*

2. $$J \;>\; 0, \qquad \mathsf{E}_0 \left| \frac{\left(p^{3/4}\right)^{(j)}(X_1)}{p^{3/4}(X_1)} \right|^{4/j} \;<\; \infty, \quad j \;=\; 1,2,3;$$

3. *выполняется соотношение*

$$\int \left| p^{3/4}(x,\theta) \;-\; p^{3/4}(x) \;-\; \sum_{j=1}^{3} \frac{\theta^j}{j!} \left(p^{3/4}\right)^{(j)}(x) \right|^{4/3} d\nu(x) \;=\; o(\theta^4).$$

Достаточные условия для выполнения Условия $F_4^{(3)}(3)$ приведены в Лемме 4.7 (2). Сформулируем теперь условия регулярности на априорные распределения Q_n

$(G1)$: Существует константа $C > 0$ такая, что распределение $G(\cdot)$ сосредоточено на отрезке $[-C, C]$, то есть

$$G([-C,\, C]) \;=\; 1. \tag{2.9}$$

$$\text{(G2)}: \quad \int u\, dG(u) \;=\; \int u^3\, dG(u) \;=\; 0, \quad \int u^2\, dG(u) \;=\; 1, \tag{2.10}$$

$$\text{(B1)}: b_{ni} \;\ge\; 0, \quad \bar{b}_n \;=\; \max_{1\le i\le n} b_{ni} \;\to\; 0, \tag{2.11}$$

$$\text{(B2)}: \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^4 \;\to\; B^4 \;>\; 0, \quad n \;\to\; \infty. \tag{2.12}$$

Заметим, что при выполнении условий (G2), (B1) и (B2) сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} (\theta_{ni}^2 \;-\; b_{ni}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2(\theta_i \;-\; 1) \tag{2.13}$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0,\, B^4(\mu_4 \;-\; 1))$,

$$\mu_4 \;=\; \int u^4\, dG(u)$$

(см. Лемму 4.2 и замечания к ней).

При этом справедлива следующая теорема, показывающая что аппроксимация $\bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ приближает $h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ в метрике L_1, то есть

$$\mathsf{E}_{n,0}\ |h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)\ -\ \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)|\ \to\ 0, \quad n\ \to\ \infty. \tag{2.14}$$

С учетом этого факта также будет показано (см. Лемму 2.1), что критерий, основанный на $\bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ асимптотически не хуже оптимального критерия $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$.

Теорема 2.1. *Пусть существует $\varepsilon > 0$, для которого плотности $p(x,\theta)$ и $p(x,-\theta)$, $\quad 0 \le \theta \le \varepsilon$ удовлетворяют условию $F_4^{(3)}$, и пусть выполнены условия регулярности (G1), (G2), (B1), (B2) (см. (2.9) - (2.12)), тогда справедливо соотношение (2.14).*

Заметим, что из этой Теоремы следует, что

$$d_n\ \equiv\ \int\ \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\, p_n(\mathbf{x}_n)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n)\ \to\ 1. \tag{2.15}$$

Поэтому выражение вида

$$\frac{1}{d_n}\ \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\, p_n(\mathbf{x}_n)\ \ge\ 0 \tag{2.16}$$

можно рассматривать как плотность распределения вероятностей. В связи с этим расмотрим задачу проверки простой гипотезы H_{n0} (см. (1.3)) против простой альтернативы $\bar{\mathsf{H}}_{n1}^{Q_n}$, согласно которой вектор наблюдений $\mathbf{X}_n$ имеет плотность (2.16). По лемме Неймана - Пирсона, при фиксированном уровне значимости $\alpha \in (0,\, 1)$, наиболее мощный критерий $\bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ уровня α имеет вид

$$\bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\ =\ \begin{cases} 1, & \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\ >\ \bar{d}_n, \\ 0, & \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\ <\ \bar{d}_n, \end{cases} \tag{2.17}$$

причем константы $\bar{d}_n$ и критерии $\bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)$ на множествах

$$\{\mathbf{x}_n\ :\ \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\ =\ \bar{d}_n\}$$

определены так, чтобы

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)\ =\ \alpha. \tag{2.18}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнено соотношение (2.14), тогда*

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n})\ -\ \beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n})\ \to\ 0, \qquad n\ \to\ \infty.$$

Эвристический вывод стохастических аппроксимаций для отношений правдоподобия. В этом разделе на эвристическом уровне получены стохастические аппроксимации $\bar{h}_n(\mathbf{X}_n)$ и $\bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ отношений правдоподобия $h_n(\mathbf{X}_n)$ и $h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ (см. формулы (1.10),(1.19),(2.5) и (2.8)). Этот вывод далее будет использован в разделах 4 и 5 при доказательствах Теорем 1.1 и 2.1.

Всюду далее мы будем предполагать плотность $p(x,\theta)$ достаточно гладкой по второму аргументу (заметим здесь, что в Теореме 1.1 не требуется существования второй производной $p^{(2)}(x,\theta)$). Из формул (1.10) и (1.18) следует, что

$$h_n(\mathbf{X}_n)\ =\ \exp\{\Lambda_n(\theta_n)\}. \tag{3.1}$$

По формуле Тейлора, с учетом обозначений (1.13) – (1.15), имеем стохастическое разложение для логарифма отношения правдоподобия $\Lambda_n(\theta_n)$

$$\Lambda_n(\theta_n) \approx L_{n1} + \frac{1}{2} L_{n2} + \mathsf{E}_0\, l^{(1)}(X_1) \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} + \frac{1}{2} \mathsf{E}_0\, l^{(2)}(X_1) \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}^2. \tag{3.2}$$

Отброшенные члены имеют «более высокий порядок малости». При естественных условиях регулярности, связанных с возможностью дифференцирования по θ тождества

$$\int p(x,\theta)\, d\nu(x) \equiv 1 \tag{3.3}$$

под знаком интеграла, справедливы тождества

$$\mathsf{E}_\theta\, l^{(1)}(X_1,\theta) \equiv 0, \quad \mathsf{E}_\theta\, p^{(j)}(X_1,\theta) \equiv 0, \quad j = 1,2,\cdots \quad \mathsf{E}_\theta\, l^{(2)}(X_1,\theta) \equiv -I(\theta). \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.2) следует, что

$$\Lambda_n(\theta_n) \approx L_{n1} + \frac{1}{2} L_{n2} - \frac{I}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}^2. \tag{3.5}$$

Теперь с учетом условий (T1), (T2) (см. (1.20) и (1.21)) и закона больших чисел справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}^2 \approx A^2, \qquad L_{n2} \approx 0, \tag{3.6}$$

поэтому из (3.5) теперь следует, что

$$\Lambda_n(\theta_n) \approx L_{n1} - \frac{A^2\, I}{2} \tag{3.7}$$

и из Леммы 4.2 и ее замечаний получаем также, что

$$\Lambda_n(\theta_n) \Longrightarrow \mathcal{N}\Big(-\frac{A^2\, I}{2},\, A^2\, I\Big), \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Теперь искомая стохастическая аппроксимация для $h_n(\mathbf{X}_n)$ приобретает вид (см. (3.1) и (3.8))

$$h_n(\mathbf{X}_n) \approx \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) = \exp\Big\{L_{n1} - \frac{A^2\, I}{2}\Big\}. \tag{3.9}$$

Теперь получим стохастическую аппроксимацию для $h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$. Из формул (2.5) и (2.7) следует, что

$$h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) = \exp\{\Lambda_n^{Q_n}\} = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} (l_G(X_i, b_{ni}) - l(X_i))\Big\}. \tag{3.10}$$

По формуле Тейлора, с учетом обозначений (1.13) – (1.15), имеем (заметим, что в Теореме 2.1 не требуется существование четвертой производной $p^{(4)}(x,\theta)$)

$$l_G(x,\theta) - l(x) = \log \frac{\int p(x,\theta u)\, dG(u)}{p(x)} =$$

$$= \log\left(1 + \theta\,\psi_1(x)\int u\,dG(u) + \frac{\theta^2}{2}\,\psi_2(x)\int u^2\,dG(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta^3}{6}\,\psi_3(x)\int u^3\,dG(u) + \frac{\theta^4}{24}\,\psi_4(x)\int u^4\,dG(u)\right) + \cdots . \tag{3.11}$$

В силу условий (G1) и (G2) (см. (2.9), (2.10)) это разложение приобретает вид

$$l_G(x,\theta) - l(x) = \log\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\,\psi_2(x) + \frac{\theta^4}{24}\,\mu_4\,\psi_4(x) + \cdots\right) \approx$$

$$\approx \frac{\theta^2}{2}\,\psi_2(x) + \frac{\theta^4}{24}\left(\mu_4\,\psi_4(x) - 3\psi_2^2(x)\right), \qquad \mu_4 = \int u^4\,dG(u). \tag{3.12}$$

Теперь с учетом обозначений (1.15) и формул (2.7), (3.4), (3.10) и (3.12) имеем

$$\Lambda_n^{Q_n} \approx \frac{L_{n2}^Q}{2} + \frac{L_{n4}^Q}{24} + \mu_{Qn4}, \tag{3.13}$$

$$h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \approx \exp\left\{\frac{L_{n2}^Q}{2} + \frac{L_{n4}^Q}{24} + \mu_{Qn4}\right\}, \tag{3.14}$$

где

$$L_{n2}^Q = \sum_{i=1}^n b_{ni}^2\,\psi_2(X_i), \tag{3.15}$$

$$L_{n4}^Q = \sum_{i=1}^n b_{ni}^4\left(\mu_4\,\psi_4(X_i) - 3\,\psi_2^2(X_i) + 3J\right), \tag{3.16}$$

$$\mu_{Qn4} = -\frac{J}{8}\sum_{i=1}^n b_{ni}^4. \tag{3.17}$$

В силу условий (B1), (B2) и закона больших чисел справедливы соотношения

$$\mu_{Qn4} \approx -\frac{JB^4}{8}, \quad L_{n4}^Q \approx 0, \quad n \to \infty, \tag{3.18}$$

поэтому из Леммы 4.2 и ее замечаний, формул (3.13) и (3.18) следует, что

$$\Lambda_n^{Q_n} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{B^4\,J}{8}, \frac{B^4\,J}{4}\right), \quad n \to \infty. \tag{3.19}$$

Теперь искомая стохастическая аппроксимация для $h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ приобретает вид (см. (3.14) и (3.18))

$$h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \approx \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) = \exp\left\{\frac{L_{n2}^Q}{2} - \frac{B^4\,J}{8}\right\}. \tag{3.20}$$

Схема доказательства основных теорем и вспомогательные утверждения. Доказательство Теорем 1.1 и 2.1 основано на следующей «односторонней» модификации известной леммы Шеффе (см. [9], [3], стр. 306, [4], стр. 204, Лемма 2.1П), которая доказана в работе [6] (см. Лемму 3.1 из этой работы).

Лемма 4.1. *Пусть случайные величины* $U_n \geq 0$ *и* $V_n \geq 0$ *определены на вероятностных пространствах* $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathsf{P}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *и пусть интегралы вида*

$$\mathsf{E}_n V_n = \int V_n \, d\mathsf{P}_n$$

абсолютно непрерывны, то есть

$$\mathsf{E}_n \, [V_n, \, A_n] \equiv \int_{A_n} V_n \, d\, \mathsf{P}_n \to 0$$

при $\mathsf{P}_n(A_n) \to 0, \quad n \to \infty$. *Предположим также, что*

$$\mathsf{E}_n \, U_n \to 1, \quad \mathsf{E}_n \, V_n \to 1, \quad n \to \infty \tag{4.1}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ *справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}_n\Big(U_n < V_n - \varepsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\mathsf{E}_n |U_n - V_n| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.3}$$

Замечание 4.0. *Заметим, что в работе [8] (Теорема Витали) приведен вариант Леммы 4.1 в следующем виде.*

Пусть $X, X_\theta, \theta \in [0, \varepsilon]$ *– действительные случайные величины на вероятностном пространстве* $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. *Предположим, что выполнены следующие условия*

(1) *для любого* $\gamma > 0$ *справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\Big(X \geq 0, \, X_\theta \leq X - \gamma\Big) + \mathsf{P}\Big(X < 0, \, X_\theta \geq X + \gamma\Big) \to 0, \qquad \theta \downarrow 0;$$

(2) *для некоторого* $s > 0$

$$\limsup_{\theta \downarrow 0} \, \mathsf{E}\, |X_\theta|^s \leq \mathsf{E}\, |X|^s < \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\, |X_\theta - X|^s \to 0, \qquad \theta \downarrow 0.$$

Для доказательства Теоремы 1.1 применим Лемму 4.1 с

$$\mathsf{P}_n(\,\cdot\,) = \mathsf{P}_{n,0}(\,\cdot\,), \quad U_n = h_n(\mathbf{X}_n), \quad V_n = \bar{h}_n(\mathbf{X}_n).$$

Тогда, поскольку

$$\mathsf{E}_{n,0} \; h_n(\mathbf{X}_n) = 1,$$

то для доказательства Теоремы 1.1 достаточно проверить выполнение соотношений

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) \to 1, \quad n \to \infty, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{A_n} \bar{h}_n(\mathbf{x}_n)\, d\,\mathsf{P}_{n,0}(\mathbf{x}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad \mathsf{P}_{n,0}(A_n) \to 0, \quad n \to \infty \tag{4.5}$$

и

$$\mathsf{P}_{n,0}\Big(h_n(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.6}$$

Аналогичным образом для доказательства Теоремы 2.1 применим Лемму 4.1 с

$$\mathsf{P}_n(\,\cdot\,) = \mathsf{P}_{n,0}(\,\cdot\,), \quad U_n = h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n), \quad V_n = \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n).$$

Тогда, поскольку

$$\mathsf{E}_{n,0}\ h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) = 1,$$

то для доказательства Теоремы 2.1 достаточно проверить выполнение соотношений

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \to 1, \quad n \to \infty, \tag{4.7}$$

$$\int\limits_{A_n} \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n)\, d\mathsf{P}_{n,0}(\mathbf{x}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad \mathsf{P}_{n,0}(A_n) \to 0, \quad n \to \infty \tag{4.8}$$

и

$$\mathsf{P}_{n,0}\Big(h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.9}$$

Теперь доказательства Теорем 1.1 и 2.1 следуют из следующих утверждений.

Утверждение 4.1.

1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1, тогда справедливо соотношение (4.4).*

2. *Из условий $F_4^{(3)}$ и $(B1)$, $(B2)$ следует (4.7).*

Утверждение 4.2.

1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1, тогда справедливо соотношение (4.5).*

2. *Из условий $F_4^{(3)}$ и $(B1)$, $(B2)$ следует (4.8).*

Утверждение 4.3.

1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1, тогда справедливо соотношение (4.6).*

2. *Из условий Теоремы 2.1 следует (4.9).*

В работе неоднократно используются следующие леммы.

Лемма 4.2. ([2], стр. 197, Теорема 5.1.2) *Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией и*

$$\mu \,=\, \mathsf{E}\, Y_1, \quad 0 \,<\, \sigma^2 \,=\, \mathsf{Var}\, Y_1 \,<\, \infty.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni} Y_i \,\Longrightarrow\, \mathcal{N}(\mu_n,\, \sigma_n^2),$$

где

$$\mu_n \,=\, \mu \sum_{i=1}^{n} a_{ni}, \qquad \sigma_n^2 \,=\, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2,$$

при выполнении следующего условия на константы $\{a_{ni}\}$

$$\text{(A)} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2}{\max_{1 \le i \le n} a_{ni}^2} \,\to\, \infty, \qquad n \,\to\, \infty.$$

Замечание 4.1. *Заметим, что для выполнения условия (A) достаточно выполнения условий*

$$\text{(A1)} \qquad \max_{1 \le i \le n} |a_{ni}| \,\to\, 0, \qquad n \,\to\, \infty$$

и

$$\text{(A2)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \,\to\, A^2 \,>\, 0, \qquad n \,\to\, \infty.$$

Замечание 4.2. *Заметим, что утверждение Леммы 3.2 остается справедливым, если величины μ_n и σ_n^2 заменить соответственно на $\bar{\mu}_n$ и $\bar{\sigma}_n^2$ так, чтобы*

$$\frac{\bar{\sigma}_n^2}{\sigma_n^2} \,\to\, 1, \qquad \frac{\bar{\mu}_n \,-\, \mu_n}{\sigma_n} \,\to\, 0, \qquad n \,\to\, \infty.$$

Лемма 4.3. ([3], стр. 51, Теорема 5.4) *Предположим, что для интегрируемых случайных величин $Z_n \,\ge\, 0$ и $Z \,\ge\, 0$ справедливы соотношения*

$$Z_n \,\Longrightarrow\, Z, \qquad \mathsf{E}\, Z_n \,\to\, \mathsf{E}\, Z, \qquad n \,\to\, \infty.$$

Тогда случайные величины Z_n равномерно интегрируемы.

Лемма 4.4. ([5], стр. 174, Утверждение 9.4.g) *Случайные величины Y_n равномерно интегрируемы тогда и только тогда, когда интегралы от них равномерно ограничены и равномерно непрерывны.*

Из результатов работы [8] следует следующий результат.

Лемма 4.5.

1. *([8], Теорема 2.7). Если выполнено Условие $F_2^{(1)}$, то для любого семейства измеримых множеств $\{E_\theta,\, 0 < \theta \le \varepsilon\}$ из условия*

   $$\mathsf{P}_0(E_\theta) \,=\, o(\theta^2)$$

   следует, что и

   $$\mathsf{P}_\theta(E_\theta) \,=\, o(\theta^2).$$

2. *([8], Теорема 2.8). Пусть выполнены Условия* $F_2^{(1)}(1)$, $F_2^{(1)}(2)$ *и*

$$\limsup_{\theta\downarrow 0}\ \mathsf{E}_\theta\,(l^{(1)}(X_1,\theta)^2\ \le\ \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1)^2,$$

тогда выполнено Условие $F_2^{(1)}(3)$.

3. *([8], Теорема 2.9). При выполнении Условия* $F_2^{(1)}$ *справедливо равенство*

$$\int p^{(1)}(x)\,d\,\nu(x)\ =\ 0.$$

4. *([8], Теорема 2.10 и ее доказательство, Теорема 2.7, Лемма 2.1 и равенства (3.53) и (3.54)). При справедливости Условия* $F_2^{(1)}$ *для любого* $\delta > 0$ *существует 2 - система* $\{D_{\theta,\delta}\}$ $(D_{\theta,\delta}\subset A_\theta)$ *такая, что*

$$\mathsf{E}_0\,\Big(l(X_1,\theta)\ -\ l(X_1)\Big)\,\mathbf{1}_{D_{\theta,\delta}}(X_1)\ =\ -\,\frac{\theta^2\,I}{2}\ +\ o(\theta^2),$$

$$\sup_{D_{\theta,\delta}}\left|\frac{p(x,\theta)}{p(x)}\ -\ 1\right|\ \le\ \delta,\qquad \sup_{D_{\theta,\delta}}\,|l^{(1)}(x)|\ \le\ \delta\,\theta^{-1},$$

$$\sup_{D_{\theta,\delta}}\left|\frac{p(x,\theta)}{p(x)}\ -\ 1\ -\ \theta\,\psi_1(x)\right|\ \le\ \delta,\qquad \mathsf{E}_0\,\Big(\psi_j(X_1)\Big)^2\ <\ \infty,$$

$$\mathsf{E}_0\left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)}\ -\ 1\ -\ \theta\,\psi_1(X_1)\right)^2\mathbf{1}_{D_{\theta,\delta}}(X_1)\ =\ o(\theta^2),$$

$$\sup_{D_{\theta,\delta}}\Big|\log p(x,\theta)\ -\ \log p(x)\ -\ \theta\,l^{(1)}(x)\Big|\ \le\ \delta,$$

$$\mathsf{E}_0\,\Big(\log p(X_1,\theta)\ -\ \log p(X_1)\ -\ \theta\,l^{(1)}(X_1)\Big)^2\,\mathbf{1}_{D_{\theta,\delta}}(X_1)\ =\ o(\theta^2).$$

$$\left|\mathsf{E}_0\,\Big(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)}\ -\ 1\Big)\,\mathbf{1}_{D_{\theta,\delta}}(X_1)\right| =\ o(\theta^2),$$

$$\mathsf{E}_0\left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)}\ -\ 1\right)^2\mathbf{1}_{D_{\theta,\delta}}(X_1)\ =\ \theta^2\,I\ +\ o(\theta^2).$$

Лемма 4.6. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда для любого* $\delta > 0$ *и любого* $i\in\{1,\cdots n\}$ *такого, что* $\theta_{ni}\neq 0$ *существуют измеримые множества* $D_{ni,\delta}$ *такие, что*

$$\mathsf{P}_0\,(D^c_{ni,\delta})\ =\ o(\theta^2_{ni}),$$

$$\mathsf{E}_0\,\Big(l(X_1,\theta_{ni})\ -\ l(X_1)\Big)\,\mathbf{1}_{D_{ni,\delta}}(X_1)\ =\ -\,\frac{\theta^2_{ni}\,I}{2}\ +\ o(\theta^2_{ni}),$$

$$\sup_{D_{ni,\delta}}\left|\frac{p(x,\theta_{ni})}{p(x)}\ -\ 1\right|\ \le\ \delta,\quad 0\ \le\ \theta\ \le\ \varepsilon,\qquad \sup_{D_{ni,\delta}}\,|l^{(1)}(x)|\ \le\ \delta\,\theta_{ni}^{-1},$$

$$\sup_{D_{ni,\delta}} \left| \frac{p(x,\theta_{ni})}{p(x)} - 1 - \theta_{ni}\,\psi_1(x) \right| \le \delta, \qquad \mathsf{E}_0 \left(\psi_j(X_1)\right)^2 < \infty,$$

$$\mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1,\theta_{ni})}{p(X_1)} - 1 - \theta_{ni}\,\psi_1(X_1) \right)^2 \mathbf{1}_{D_{ni,\delta}}(X_1) = o(\theta_{ni}^2),$$

$$\sup_{D_{ni,\delta}} \left| \log p(x,\theta_{ni}) - \log p(x) - \theta_{ni}\, l^{(1)}(x) \right| \le \delta,$$

$$\mathsf{E}_0 \left(\log p(X_1,\theta_{ni}) - \log p(X_1) - \theta_{ni}\, l^{(1)}(X_1) \right)^2 \mathbf{1}_{D_{ni,\delta}}(X_1) = o(\theta_{ni}^2).$$

Причем для всех остаточных членов вида $o(\theta_{ni}^2)$ справедливо соотношение

$$\sum_{i:\theta_{ni}\ne 0}^{n} o(\theta_{ni}^2) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Из результатов работы [8] также следуют следующие результаты.

Лемма 4.7.

1. *([8], Теорема 2.7). Если выполнено Условие $F_4^{(3)}$, то для любого семейства измеримых множеств $\{E_\theta,\ 0 < \theta \le \varepsilon\}$ из условия*

$$\mathsf{P}_0(E_\theta) = o(\theta^4)$$

следует, что и

$$\mathsf{P}_\theta(E_\theta) = o(\theta^4).$$

2. *([8], Теорема 2.8). Пусть выполнены Условия $F_4^{(3)}(1)$, $F_4^{(3)}(2)$ и*

$$\limsup_{\theta\downarrow 0} \mathsf{E}_\theta \left| \frac{\left(p^{3/4}\right)^{(3)}(X_1,\theta)}{p^{3/4}(X_1,\theta)} \right|^{4/3} \le \mathsf{E}_0 \left| \frac{\left(p^{3/4}\right)^{(3)}(X_1)}{p^{3/4}(X_1)} \right|^{4/3},$$

тогда выполнено Условие $F_4^{(3)}(3)$.

3. *([8], Теорема 2.9). При выполнении Условия $F_4^{(3)}$ справедливы равенства*

$$\int p^{(j)}(x)\, d\,\nu(x) = 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

4. *([8], Теорема 2.10 и ее доказательство, Теорема 2.7, Лемма 2.1 и равенства (3.53) -(3.55)). При справедливости Условия $F_4^{(3)}$ для любого $\delta > 0$ существует 4 - система $\{C_{\theta,\delta}\}$ ($C_{\theta,\delta} \subset B_\theta$) такая, что*

$$\mathsf{E}_0 \left(l(X_1,\theta) - l(X_1) \right) \mathbf{1}_{C_{\theta,\delta}}(X_1) = -\sum_{j=2}^{4} \frac{\theta^j}{j!} M_j + o(\theta^4),$$

где

$$M_2 = I = \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^2, \qquad M_3 = \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^3 + 3\,\mathsf{E}_0\, l^{(1)}(X_1)\, l^{(2)}(X_1),$$

$$M_4 = \mathsf{E}_0(l^{(1)}(X_1))^4 + 6\mathsf{E}_0(l^{(1)}(X_1))^2 l^{(2)}(X_1) + 3\mathsf{E}_0(l^{(2)}(X_1))^2 + 4\mathsf{E}_0 l^{(1)}(X_1) l^{(3)}(X_1),$$

$$\sup_{C_{\theta,\delta}} \left| \frac{p(x,\theta)}{p(x)} - 1 \right| \le \delta, \quad 0 \le \theta \le \varepsilon, \quad \sup_{C_{\theta,\delta}} \left| \psi_j(x) \right| \le \delta\, \theta^{-j},$$

$$\sup_{C_{\theta,\delta}} \left| \frac{p(x,\theta)}{p(x)} - \sum_{m=0}^{j} \frac{\theta^m}{m!}\, \psi_m(x) \right| \le \delta, \qquad \mathsf{E}_0 \left| \psi_j(X_1) \right|^{4/j} < \infty,$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - \sum_{m=0}^{j} \frac{\theta^m}{m!}\, \psi_m(X_1) \right|^{4/j} \mathbf{1}_{C_{\theta,\delta}}(X_1) = o(\theta^4), \qquad j = 1,2,3.$$

$$\left| \mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right) \mathbf{1}_{C_{\theta,\delta}}(X_1) \right| = o(\theta^4),$$

$$\mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right)^j \mathbf{1}_{C_{\theta,\delta}}(X_1) = \mathsf{E}_0 \left[\left(\sum_{m=1}^{3} \frac{\theta^m\, p^{(m)}(X_1)}{m!\, p(X_1)} \right)^j \right]_4 + o(\theta^4), \quad j = 2,3,4,$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right|^5 \mathbf{1}_{C_{\theta,\delta}}(X_1) = o(\theta^4).$$

Лемма 4.8. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1. Тогда для любого $\delta > 0$ и любого $i \in \{1, \cdots n\}$ такого, что $b_{ni} \ne 0$ существуют измеримые множества $C_{ni,\delta}$ такие, что*

$$\mathsf{P}_0\,(C^c_{ni,\delta}) = o(b^4_{ni}),$$

$$\mathsf{E}_0 \Big(l(X_1, b_{ni}) - l(X_1) \Big) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = - \sum_{j=2}^{4} \frac{b^j_{ni}}{j!}\, M_j + o(b^4_{ni}),$$

где

$$M_2 = I = \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^2, \quad M_3 = \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^3 + 3\,\mathsf{E}_0\, l^{(1)}(X_1)\, l^{(2)}(X_1),$$

$$M_4 = \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^4 + 6\,\mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^2\, l^{(2)}(X_1) + 3\,\mathsf{E}_0\,(l^{(2)}(X_1))^2 + 4\,\mathsf{E}_0\, l^{(1)}(X_1)\, l^{(3)}(X_1),$$

$$\sup_{C_{ni,\delta}} \left| \frac{p(x,b_{ni})}{p(x)} - 1 \right| \le \delta, \qquad \sup_{C_{ni,\delta}} \left| \psi_j(x) \right| \le \delta\, b^{-j}_{ni},$$

$$\sup_{C_{ni,\delta}} \left| \frac{p(x,b_{ni})}{p(x)} - \sum_{m=0}^{j} \frac{b^m_{ni}}{m!}\, \psi_m(x) \right| \le \delta,$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1,b_{ni})}{p(X_1)} - \sum_{m=0}^{j} \frac{b^m_{ni}}{m!}\, \psi_m(X_1) \right|^{4/j} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = o(b^4_{ni}), \qquad j = 1,2,3,$$

$$\left| \mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \right| = o(b^4_{ni}),$$

$$\mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right)^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = \mathsf{E}_0 \left[\left(\sum_{m=1}^{3} \frac{\theta^m \, p^{(m)}(X_1)}{m! \, p(X_1)} \right)^j \right]_4 + o(b_{ni}^4), \quad j = 2,3,4,$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1,\theta)}{p(X_1)} - 1 \right|^5 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = o(b_{ni}^4).$$

Причем для всех остаточных членов вида $o(b_{ni}^4)$ справедливо соотношение

$$\sum_{i:b_{ni} \neq 0}^{n} o(b_{ni}^4) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма 4.9. *Пусть выполнены условия Леммы 4.8. Тогда*

$$\mathsf{E}_0 \Big(l_G(X_1, b_{ni}) - l(X_1) \Big) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = - \frac{J \, b_{ni}^4}{8} + o(b_{ni}^4),$$

где $C_{ni,\delta}$ - множества из Леммы 4.8,

$$\mathsf{E}_0 \Big(l_G(X_1, b_{ni}) - l(X_1) - b_{ni}^2 \psi_2(X_1)/2 \Big)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) = o(b_{ni}^4),$$

и для остаточных членов вида $o(b_{ni}^4)$ справедливо соотношение

$$\sum_{i:b_{ni} \neq 0}^{n} o(b_{ni}^4) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательства. Доказательства Лемм 1.1 и 2.1 полностью идентичны, поэтому докажем, например, Лемму 2.1.

Доказательство Леммы 2.1. Поскольку критерии $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ и $\bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ наиболее мощные критерии для проверки гипотезы H_{n0} (см. (1.3)) соответственно против альтернатив $\mathsf{H}_{n1}^{Q_n}$ и $\bar{\mathsf{H}}_{n1}^{Q_n}$, то справедливы неравенства (см. (1.9))

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) = \int \Psi_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, p_n(\mathbf{x}_n) \, d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) \geq$$

$$\geq \int \bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, h_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, p_n(\mathbf{x}_n) \, d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) = \beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \tag{5.1}$$

и

$$\bar{\beta}_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) = \frac{1}{a_n} \int \bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, p_n(\mathbf{x}_n) \, d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) \geq$$

$$\geq \frac{1}{a_n} \int \Psi_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{x}_n) \, p_n(\mathbf{x}_n) \, d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) = \bar{\beta}_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}). \tag{5.2}$$

С учетом Теоремы 1.1 из этих неравенств следует, что

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) \geq \beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \geq \bar{\beta}_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) - \delta_n, \tag{5.3}$$

где $\delta_n \geq 0, \quad \delta_n \to 0$ и

$$\bar{\beta}_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \geq \bar{\beta}_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) \geq \beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) - \gamma_n, \tag{5.4}$$

где $\gamma_n \geq 0, \quad \gamma_n \to 0.$

Из неравенств (5.3) и (5.4) следует, что

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) - \beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \geq 0$$

и

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) - \beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \leq \beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) - \bar{\beta}_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) + \delta_n \leq$$
$$\leq \beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) - \beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) + \delta_n + \gamma_n = \delta_n + \gamma_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

Доказательство Утверждения 4.1.

1. Из определения $\bar{h}_n(\mathbf{X}_n)$ (см. (1.19)) следует, что

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) = \mathsf{E}_{n,0}\ \exp\{\tilde{L}_{n1} - A^2\, I/2\} =$$
$$= \exp\{-\, A^2\, I/2\} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}_0\ \exp\{\theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_1)\}. \tag{5.5}$$

Поэтому

$$\log\ \mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) = -\frac{A^2\, I}{2} + \sum_{i=1}^{n} \log\ \mathbf{E}_0\ \exp\{\theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_1)\} \tag{5.6}$$

и для доказательства (4.4) достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \log\ \mathbf{E}_0\ \exp\{\theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_1)\} \to \frac{A^2\, I}{2}. \tag{5.7}$$

Докажем (5.7). Учитывая Лемму 4.6 и неравенства (см. (1.19))

$$\sup_{D_{ni,\delta}} |l^{(1)}(x)| \leq \delta\theta_{ni}^{-1}, \quad \left|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{|x|^3}{6} e^{|x|}, \quad |\log(1+x) - x| \leq x^2, \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \tag{5.8}$$

можно написать

$$\mathbf{E}_0\ \exp\{\theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_1)\} = 1 + \theta_{ni}\, \mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1) + \frac{\theta_{ni}^2}{2}\, \mathbf{E}_0\, (\tilde{l}^{(1)}(X_1))^2 + \rho_{n1}(i), \tag{5.9}$$

$$\log \mathbf{E}_0\ \exp\{\theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_1)\} = \theta_{ni}\, \mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1) + \frac{\theta_{ni}^2}{2}\, \mathbf{E}_0\, (\tilde{l}^{(1)}(X_1))^2 + \rho_{n1}(i) + \rho_{n2}(i), \tag{5.10}$$

где для остаточных членов $\rho_{n1}(i)$ и $\rho_{n2}(i)$ справедливы неравенства

$$|\rho_{n1}(i)| \leq \frac{|\theta_{ni}|^3}{6}\ \mathbf{E}_0\ |\tilde{l}^{(1)}(X_1)|^3\ \exp\{|\theta_{ni}|\, |\tilde{l}^{(1)}(X_1)|\} \leq \frac{I\, \theta_{ni}^2\, \delta}{6}\, e^{\delta}, \tag{5.11}$$

$$|\rho_{n2}(i)| \leq \Big(\theta_{ni}\ \mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1) + \frac{\theta_{ni}^2}{2}\ \mathbf{E}_0\, (\tilde{l}^{(1)}(X_1))^2 + \rho_{n1}(i)\Big)^2 \leq$$
$$\leq 4\,\Big(\theta_{ni}^2\, (\mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1))^2 + \frac{\theta_{ni}^4}{4}\Big(\mathbf{E}_0\, (\tilde{l}^{(1)}(X_1))^2\Big)^2 + \rho_{n1}^2(i)\Big). \tag{5.12}$$

Но

$$|\,\mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1)|\ =\ |\,\mathbf{E}_0\ l^{(1)}(X_1)\,\mathbf{1}_{D^c_{ni,\delta}}(X_1)|\ \le$$

$$\le\ I^{1/2}\left(\mathsf{P}_0(D^c_{ni,\delta})\right)^{1/2}\ =\ o(\theta_{ni}), \tag{5.13}$$

$$|\rho_{n3}(i)|\ \equiv\ |\,\mathbf{E}_0\,(\tilde{l}^{(1)}(X_1))^2\ -\ I|\ =\ \mathbf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^2\mathbf{1}_{D^c_{ni,\delta}}(X_1)\ \to\ 0, \tag{5.14}$$

поэтому из формул (5.10) - (5.14) следует, что

$$\log\,\mathbf{E}_0\,\exp\{\theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_1)\}\ =\ \frac{\theta^2_{ni}\,I}{2}\ +\ \rho_n(i), \tag{5.15}$$

где

$$|\rho_n(i)|\ =\ \Big|\theta_{ni}\ \mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1)\ +\ \rho_{n1}(i)\ +\ \rho_{n2}(i)\ +\ \frac{\theta^2_{ni}}{2}\,\rho_{n3}(i)\Big|\ \le$$

$$\le\ |\theta_{ni}|\,\Big|\mathbf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1)\Big|\ +\ |\rho_{n1}(i)|\ +\ |\rho_{n2}(i)|\ +\ \frac{\theta^2_{ni}}{2}\,|\rho_{n3}(i)|. \tag{5.16}$$

Теперь соотношение (5.7) следует из условий (T1), (T2), произвольности выбора $\delta > 0$ и формул (5.11) - (5.16).

2. Доказательство этого пункта близко к доказательству пункта 1. Однако для полноты мы его приведем полностью.

Из определения $\bar{h}^{Q_n}_n(\mathbf{X}_n)$ (см. (2.8), (3.15)) следует, что

$$\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}^{Q_n}_n(\mathbf{X}_n)\ =\ \mathsf{E}_{n,0}\ \exp\left\{\frac{\tilde{L}^Q_{n2}}{2}\ -\ \frac{J\,B^4}{8}\right\}\ =$$

$$=\exp\{-B^4\,J/2\}\prod_{i=1}^n\mathbf{E}_0\ \exp\Big\{b^2_{ni}\,\tilde{\psi}_2(X_1)\Big\},\qquad \tilde{\psi}_2(x)\ =\ \frac{p^{(2)}(x)}{p(x)}\,\mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(x). \tag{5.5$'$}$$

Поэтому

$$\log\,\mathsf{E}_{n,0}\ \bar{h}^{Q_n}_n(\mathbf{X}_n)\ =\ -\,\frac{B^4\,J}{2}\ +\ \sum_{i=1}^n\log\,\mathbf{E}_0\ \exp\Big\{b^2_{ni}\,\tilde{\psi}_2(X_1)\Big\} \tag{5.6$'$}$$

и для доказательства (4.7) достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^n\log\,\mathbf{E}_0\ \exp\Big\{b^2_{ni}\,\tilde{\psi}_2(X_1)\Big\}\ \to\ \frac{B^4\,J}{2}. \tag{5.7$'$}$$

Докажем (5.7)$'$. Учитывая Лемму 4.8 и неравенства

$$\sup_{C_{ni,\delta}}\Big|\tilde{\psi}_2(x)\Big|\ \le\ \delta b^{-2}_{ni},$$

$$\Big|e^x\ -\ 1\ -\ x\ -\ \frac{x^2}{2}\Big|\ \le\ \frac{|x|^3}{6}\,e^{|x|},\qquad |\log(1\ +\ x)\ -\ x|\ \le\ x^2,\qquad |x|\ \le\ \frac{1}{2}, \tag{5.8$'$}$$

можно написать

$$\mathbf{E}_0\ \exp\Big\{b^2_{ni}\,\tilde{\psi}_2(X_1)\Big\}\ =\ 1\ +\ b^2_{ni}\ \mathbf{E}_0\ \tilde{\psi}_2(X_1)\,+$$

$$+\, \frac{b_{ni}^4}{2}\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2^2(X_1)\ +\ r_{n1}(i), \tag{5.9$'$}$$

$$\log\,\mathbf{E}_0\,\exp\Big\{b_{ni}^2\,\tilde\psi_2(X_1)\Big\}\ =\ b_{ni}^2\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1) +$$

$$+\, \frac{b_{ni}^4}{2}\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2^2(X_1)\ +\ r_{n1}(i)\ +\ r_{n2}(i), \tag{5.10$'$}$$

где для остаточных членов $r_{n1}(i)$ и $r_{n2}(i)$ справедливы неравенства

$$|r_{n1}(i)|\ \le$$

$$\le\ \frac{b_{ni}^6}{6}\ \mathbf{E}_0\,\Big|\tilde\psi_2(X_1)\Big|^3\ \exp\Big\{b_{ni}^2\,\Big|\tilde\psi_2(X_1)\Big|\Big\}\ \le\ \frac{J\,b_{ni}^4\,\delta}{6}\,e^{\delta}, \tag{5.11$'$}$$

$$|r_{n2}(i)|\ \le \left(b_{ni}^2\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1)\ +\ \frac{b_{ni}^4}{2}\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2^2(X_1)\ +\ r_{n1}(i)\right)^2 \le$$

$$\le\ 4\left(b_{ni}^4\,\Big(\mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1)\Big)^2 +\right.$$

$$\left. +\, \frac{b_{ni}^8}{4}\,\Big(\mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2^2(X_1)\Big)^2\ +\ r_{n1}^2(i)\right). \tag{5.12$'$}$$

Но

$$\Big|\mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1)\Big|\ =\ \left|\mathbf{E}_0\ \frac{p^{(2)}(X_1)}{p(X_1)}\ \mathbf{1}_{C^c_{ni,\delta}}(X_1)\right|\ \le$$

$$\le\ J^{1/2}\,\Big(\mathsf{P}_0(C^c_{ni,\delta})\Big)^{1/2}\ =\ o(b_{ni}^2), \tag{5.13$'$}$$

$$|r_{n3}(i)|\ \equiv\ \Big|\mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2^2(X_1)\ -\ J\Big|\ =\ \mathbf{E}_0\,\left(\frac{p^{(2)}(X_1)}{p(X_1)}\right)^2\,\mathbf{1}_{C^c_{ni,\delta}}(X_1)\ \to\ 0, \tag{5.14$'$}$$

поэтому из формул $(5.10)'$ – $(5.14)'$ следует, что

$$\log\,\mathbf{E}_0\,\exp\Big\{b_{ni}^2\,\tilde\psi_2(X_1)\Big\}\ =\ \frac{b_{ni}^4\,J}{2}\ +\ r_n(i), \tag{5.15$'$}$$

где

$$|r_n(i)|\ =\ \left|b_{ni}^2\ \mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1)\ +\ r_{n1}(i)\ +\ r_{n2}(i)\ +\ \frac{b_{ni}^4}{2}\,r_{n3}(i)\right|\ \le$$

$$\le\ b_{ni}^2\,\Big|\mathbf{E}_0\ \tilde\psi_2(X_1)\Big|\ +\ |r_{n1}(i)|\ +\ |r_{n2}(i)|\ +\ \frac{b_{ni}^4}{2}\,|r_{n3}(i)|. \tag{5.16$'$}$$

Теперь соотношение $(5.7)'$ следует из условий (B1), (B2), произвольности выбора $\delta > 0$ и формул $(5.11)'$ – $(5.16)'$.

□

Доказательство Утверждения 4.2.

1. Для доказательства соотношения (4.5) применим Леммы 4.3 и 4.4 с

$$Z_n = Y_n = \bar{h}_n(\mathbf{X}_n), \quad Z = \exp\{X - A^2 I/2\}, \quad X \sim \mathcal{N}(0, A^2 I).$$

Тогда с учетом доказанного выше соотношения (4.4) (см. Утверждение 4.1 (1)) достаточно показать, что

$$\mathsf{E}\, Z = 1, \tag{5.17}$$

$$L_{n1} \Longrightarrow X, \tag{5.18}$$

$$L_{n1} - \tilde{L}_{n1} \xrightarrow{\mathsf{P}_{n,0}} 0, \quad n \to \infty. \tag{5.19}$$

Соотношение (5.17) хорошо известно и справедливо для логнормальных случайных величин Z (см., например, [2], стр. 258, (1.2.10)).

Слабая сходимость (5.18) следует из Условий (T1), (T2), (см. (1.20), (1.21)), Леммы 4.2 и Замечания 4.1.

Сходимость по вероятности (5.19) следует из неравенства Чебышева и Леммы 4.6

$$\mathsf{P}_{n,0}(|L_{n1} - \tilde{L}_{n1}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}_0\, |l^{(1)}(X_1)|\, \mathbf{1}_{D^c_{ni,\delta}}(X_1)\, |\theta_{ni}|}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \frac{I^{1/2} \sum_{i=1}^n \left(\mathsf{P}_0\,(D^c_{ni,\delta})\right)^{1/2} |\theta_{ni}|}{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n o(\theta^2_{ni})}{\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon > 0, \quad n \to \infty. \tag{5.20}$$

2. Доказательство этого пункта близко к доказательству пункта 1. Однако мы его приведем полностью.

Для доказательства соотношения (4.8) применим Леммы 4.3 и 4.4 с

$$Z_n = Y_n = \bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n), \quad Z = \exp\{X - B^4 J/8\}, \quad X \sim \mathcal{N}(0, B^4 J/4).$$

Тогда с учетом доказанного выше соотношения (4.7) (см. Утверждение 4.1 (2)) достаточно показать, что

$$\mathsf{E}\, Z = 1, \tag*{(5.17)$'$}$$

$$L^Q_{n2} \Longrightarrow X, \tag*{(5.18)$'$}$$

$$L^Q_{n2} - \tilde{L}^Q_{n2} \xrightarrow{\mathsf{P}_{n,0}} 0, \quad n \to \infty. \tag*{(5.19)$'$}$$

Соотношение (5.17)$'$ хорошо известно и справедливо для логнормальных случайных величин Z (см., например, [2], стр. 258, (1.2.10)).

Слабая сходимость (5.18)$'$ следует из Условий (B1), (B2), (см. (2.11), (2.12)), Леммы 4.2 и Замечания 4.1.

Сходимость по вероятности (5.19)$'$ следует из неравенства Чебышева и Леммы 4.8

$$\mathsf{P}_{n,0}\Big(\Big|L^Q_{n2} - \tilde{L}^Q_{n2}\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}_0 \left|\frac{p^{(2)}(X_1)}{p(X_1)}\right| \mathbf{1}_{C^c_{ni,\delta}}(X_1)\, b^2_{ni}}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \frac{J^{1/2}\ \sum_{i=1}^n \left(\mathsf{P}_0\left(C^c_{ni,\delta}\right)\right)^{1/2} b^2_{ni}}{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n\ o(b^4_{ni})}{\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon > 0, \quad n \to \infty. \tag{5.20$'$}$$

□

Доказательство Утверждения 4.3.

1. Для доказательства соотношения (4.6) докажем сначала вспомогательное неравенство. Учитывая соотношение (4.4) (см. Утверждение 4.1.(1)) и неравенство Чебышева, для любого $A > 0$ имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}(\bar{h}_n(\mathbf{X}_n) > A) \leq \frac{\mathsf{E}_{n,0}\,\bar{h}_n(\mathbf{X}_n)}{A} = O(A^{-1}). \tag{5.21}$$

Поэтому

$$\mathsf{P}_{n,0}(h_n(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) = \mathsf{P}_{n,0}(h_n(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon,\, \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) > \varepsilon) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}_{n,0}(h_n(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon,\, \varepsilon < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) \leq A) + \mathsf{P}_{n,0}(\bar{h}_n(\mathbf{X}_n) > A) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}_{n,0}\left(\log\frac{h_n(\mathbf{X}_n)}{A} < \log\Big(\frac{\bar{h}_n(\mathbf{X}_n)}{A} - \frac{\varepsilon}{A}\Big), \frac{\varepsilon}{A} < \frac{\bar{h}_n(\mathbf{X}_n)}{A} \leq 1\right) + O(A^{-1}). \tag{5.22}$$

Теперь, используя неравенство

$$\log(x - \varepsilon) \leq \log x - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq x \leq 1,$$

для левой части неравенства (5.22) справедлива оценка

$$\mathsf{P}_{n,0}(h_n(\mathbf{X}_n) < \bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) \leq \mathsf{P}_{n,0}\Big(\log h_n(\mathbf{X}_n) < \log\bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \frac{\varepsilon}{A}\Big) + O(A^{-1}), \tag{5.23}$$

где $A > 0$ - достаточно большое число. Из неравенства (5.23) теперь следует, что для доказательства соотношения (4.6) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\mathsf{P}_{n,0}(\log h_n(\mathbf{X}_n) < \log\bar{h}_n(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.24}$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (см. (1.10), (1.15) и (1.19))

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n\Big(\log\frac{p(X_i,\theta_{ni})}{p(X_i)} - \theta_{ni}\tilde{l}^{(1)}(X_i)\Big) + \frac{A^2 I}{2} < -\varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.25}$$

Поскольку

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n \log\frac{p(X_i,\theta_{ni})}{p(X_i)} \neq \sum_{i=1}^n\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni}) - \tilde{l}(X_i)\Big)\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{n,0}\Big(\bigcup_{i=1}^n D^c_{ni,\delta}\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathsf{P}_0(D^c_{ni,\delta}) = \sum_{i=1}^n o(\theta^2_{ni}) \to 0, \tag{5.26}$$

то для доказательства соотношения (5.25) достаточно показать, что

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})-\tilde{l}(X_i)-\theta_{ni}\tilde{l}^{(1)}(X_i)\Big)+\frac{A^2 I}{2}<-\varepsilon\right)\to 0,\quad n\to\infty. \tag{5.27}$$

Но

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_i)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_i)\Big)\ +\ \frac{A^2 I}{2}\ <\ -\varepsilon\right)\ =$$

$$=\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})-\tilde{l}(X_i)-\theta_{ni}\tilde{l}^{(1)}(X_i)+\frac{\theta_{ni}^2 I}{2}\Big)+\frac{I}{2}(A^2-\sum_{i=1}^{n}\theta_{ni}^2)<-\varepsilon\right)\le$$

$$\le\ \mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_i)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_i)\ +\ \frac{\theta_{ni}^2 I}{2}\Big)\ <\ -\varepsilon\right). \tag{5.28}$$

теперь поскольку в силу Леммы 4.6 и соотношения (5.13)

$$\mathsf{E}_{n,0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_i)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_i)\ +\ \frac{\theta_{ni}^2 I}{2}\Big)\ =$$

$$=\ \sum_{i=1}^{n}\ o(\theta_{ni}^2)\ -\ \sum_{i=1}^{n}\ \theta_{ni}\ \mathsf{E}_0\ \tilde{l}^{(1)}(X_1)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\ o(\theta_{ni}^2)\ \to\ 0, \tag{5.29}$$

то правая часть неравенства (5.28) при достаточно больших n не превосходит величины

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tilde{l}(X_i,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_i)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_i)\ -\ \mathsf{E}_0\,\tilde{l}(X_1,\theta_{ni})\ -\ \mathsf{E}_0\,\tilde{l}(X_1)\ -\ \theta_{ni}\mathsf{E}_0\,\tilde{l}^{(1)}(X_1)\Big)\ <\ -\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{5.30}$$

Для оценки правой части неравенства (5.30) применим неравенство Чебышева и последнее утверждение Леммы 4.6, получим, что она не превосходит дроби

$$\frac{4\ \sum_{i=1}^{n}\ \mathsf{D}_0\ \Big(\tilde{l}(X_1,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_1)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_1)\Big)}{\varepsilon^2}\ \le$$

$$\le\ \frac{4\ \sum_{i=1}^{n}\ \mathsf{E}_0\ \Big(\tilde{l}(X_1,\theta_{ni})\ -\ \tilde{l}(X_1)\ -\ \theta_{ni}\,\tilde{l}^{(1)}(X_1)\Big)^2}{\varepsilon^2}\ =\ \frac{4\ \sum_{i=1}^{n}\ o(\theta_{ni}^2)}{\varepsilon^2}\ \to\ 0. \tag{5.31}$$

2. Доказательство этого пункта в идейном плане близко к доказательству пункта 1, однако мы его приведем полностью.

   Для доказательства соотношения (4.9) докажем сначала вспомогательное неравенство. Учитывая соотношение (4.7) (см. Утверждение 4.1.(2)) и неравенство Чебышева, для любого $A>0$ имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}(\bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)\ >\ A)\ \le\ \frac{\mathsf{E}_{n,0}\,\bar{h}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)}{A}\ =\ O(A^{-1}). \tag*{(5.21)$'$}$$

Поэтому

$$\mathsf{P}_{n,0}(h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) = \mathsf{P}_{n,0}(h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon, \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) > \varepsilon) \le$$

$$\le \mathsf{P}_{n,0}(h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon, \varepsilon < \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) \le A) + \mathsf{P}_{n,0}(\bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) > A) \le$$

$$\le \mathsf{P}_{n,0}\left(\log \frac{h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)}{A} < \log\Big(\frac{\bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)}{A} - \frac{\varepsilon}{A}\Big), \frac{\varepsilon}{A} < \frac{\bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)}{A} \le 1\right) + O(A^{-1}). \tag{5.22$'$}$$

Теперь используя неравенство

$$\log(x - \varepsilon) \le \log x - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \le x \le 1,$$

для левой части неравенства $(5.22)'$ справедлива оценка

$$\mathsf{P}_{n,0}(h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) \le$$

$$\le \mathsf{P}_{n,0}\Big(\log h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \log \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \frac{\varepsilon}{A}\Big) + O(A^{-1}), \tag{5.23$'$}$$

где $A > 0$ - достаточно большое число. Из неравенства $(5.23)'$ теперь следует, что для доказательства соотношения (4.9) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\mathsf{P}_{n,0}(\log h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) < \log \bar h_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n) - \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.24$'$}$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (см. (2.5), (2.8), (3.10) и $(5.6)'$)

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n \Big(l_G(X_i, b_{ni}) - l(X_i) - b_{ni}^2 \tilde\psi_2(X_i)/2\Big) + \frac{B^4 J}{8} < -\varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.25$'$}$$

Поскольку

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n \Big(l_G(X_i, b_{ni}) - l(X_i)\Big) \ne \sum_{i=1}^n \Big(\tilde l_G(X_i, b_{ni}) - \tilde l(X_i)\Big)\right) \le$$

$$\le \mathbf{P}_{n,0}\Big(\bigcup_{i=1}^n C_{ni,\delta}^c\Big) \le \sum_{i=1}^n \mathsf{P}_0(C_{ni,\delta}^c) = \sum_{i=1}^n o(b_{ni}^4) \to 0, \tag{5.26$'$}$$

где

$$\tilde l_G(x, b_{ni}) = l_G(x, b_{ni})\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(x), \quad \tilde l(x) = l(x)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(x),$$

то для доказательства соотношения $(5.25)'$ достаточно показать, что

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n \Big(\tilde l_G(X_i, b_{ni}) - \tilde l(X_i) - b_{ni}^2 \tilde\psi_2(X_i)/2\Big) + \frac{B^4 J}{8} < -\varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.27$'$}$$

Но

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^n \Big(\tilde l_G(X_i, b_{ni}) - \tilde l(X_i) - b_{ni}^2 \tilde\psi_2(X_i)/2\Big) + \frac{B^4 J}{2} < -\varepsilon\right) =$$

$$= \mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{l}_G(X_i,b_{ni})-\tilde{l}(X_i)-b_{ni}^2\tilde{\psi}_2(X_i)/2+\frac{b_{ni}^4 J}{8}\right)+\frac{J}{8}(B^4-\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^4) < -\varepsilon\right) \le$$

$$\le \mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{l}_G(X_i) - \tilde{l}(X_i) - b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_i)/2 + \frac{b_{ni}^4 J}{8}\right) < -\varepsilon\right). \qquad (5.28)'$$

теперь в силу Леммы 4.9 и соотношения

$$\left|\mathsf{E}_0\,\tilde{\psi}_2(X_1)\right| = \left|\mathsf{E}_0\,\psi_2(X_1)\,\mathbf{1}_{C^c_{ni,\delta}}(X_1)\right| \le J^{1/2}\left(\mathsf{P}(C^c_{ni,\delta})\right)^{1/2} = o(b_{ni}^2),$$

имеем

$$\mathsf{E}_{n,0}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{l}_G(X_i,\theta_{ni}) - \tilde{l}(X_i) - b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_i)/2 + \frac{b_{ni}^4 J}{8}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} o(b_{ni}^4) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2\,\mathsf{E}_0\,\tilde{\psi}_2(X_1) = \sum_{i=1}^{n} o(b_{ni}^4) \to 0, \qquad (5.29)'$$

и значит правая часть неравенства $(5.28)'$ при достаточно больших n не превосходит величины

$$\mathsf{P}_{n,0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{l}_G(X_i,\theta_{ni}) - \tilde{l}(X_i) - b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_i)/2 - \mathsf{E}_0\,\tilde{l}_G(X_1,\theta_{ni}) - \mathsf{E}_0\,\tilde{l}(X_1) - b_{ni}^2\mathsf{E}_0\,\tilde{\psi}_2(X_1)/2\right) < -\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (5.30)'$$

Для оценки правой части неравенства $(5.30)'$ применим неравенство Чебышева и последнее утверждение Леммы 4.9, получим, что она не превосходит дроби

$$\frac{4\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}_0\left(\tilde{l}_G(X_1,\theta_{ni}) - \tilde{l}(X_1) - b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_1)/2\right)}{\varepsilon^2} \le$$

$$\le \frac{4\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}_0\left(\tilde{l}_G(X_1,\theta_{ni}) - \tilde{l}(X_1) - b_{ni}^2\,\tilde{\psi}_2(X_1)/2\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{4\sum_{i=1}^{n} o(b_{ni}^4)}{\varepsilon^2} \to 0. \qquad (5.31)'$$

□

Доказательство Леммы 4.6. Для доказательства леммы достаточно в утверждении 4 Леммы 4.5 положить

$$D_{ni,\delta} = D_{\theta_{ni},\delta}$$

и воспользоваться Условиями (T1) и (T2) (см. (1.20) и (1.21)). □

Доказательство Леммы 4.8. Для доказательства леммы достаточно в утверждении 4 Леммы 4.7 положить

$$C_{ni,\delta} = C_{b_{ni},\delta}$$

и воспользоваться Условиями (B1) и (B2) (см. (2.11) и (2.12)). □

Доказательство Леммы 4.9.

По построению множеств $C_{ni,\delta}$ (см. доказательство Леммы 4.8) и определению 4 - системы, имеем

$$C_{ni,\delta} \;=\; C_{b_{ni},\delta} \;\subset\; C_{ub_{ni},\delta}, \qquad 0 \;\leq\; u \;\leq\; 1, \tag{5.32}$$

поэтому справедливы неравенства (см. Леммы 4.7 и 4.8)

$$\sup_{C_{bi,\delta}} \left| \frac{p(x, ub_{ni})}{p(x)} \;-\; 1 \right| \;\leq\; \sup_{C_{ubi,\delta}} \left| \frac{p(x, ub_{ni})}{p(x)} \;-\; 1 \right| \;\leq\; \delta \tag{5.33}$$

и равномерно по $0 \;\leq\; u \;\leq\; 1$

$$\left| \mathsf{E}_0 \Big(\frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} - 1 \Big) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \right| = \left| \mathsf{E}_0 \Big(\frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} - 1 \Big) \mathbf{1}_{C_{ub_{ni},\delta}}(X_1) \right| + r_{n1,i} = o(b_{ni}^4) + r_{n1,i},$$

$$|r_{n1,i}| \;\leq\; \mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} \;-\; 1 \right| \mathbf{1}_{C_{ub_{ni},\delta} \setminus C_{ni,\delta}}(X_1) \;\leq\; \delta \, \mathsf{P}_0(C_{ni,\delta}^c) \;=\; o(b_{ni}^4),$$

то есть

$$\left| \mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} \;-\; 1 \right) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \right| \;=\; o(b_{ni}^4). \tag{5.34}$$

Аналогично можно показать, что равномерно по $0 \;\leq\; u \;\leq\; 1$

$$\mathsf{E}_0 \left(\frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} \;-\; 1 \right)^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=$$

$$=\; \mathsf{E}_0 \left[\Big(\sum_{m=1}^{3} \frac{u^m b_{ni}^m}{m!} \, \psi_m(X_1) \Big)^j \right]_4 \;+\; o(b_{ni}^4), \qquad j \;=\; 2, 3, 4, \tag{5.35}$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} \;-\; 1 \right|^5 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=\; o(b_{ni}^4). \tag{5.36}$$

Далее, используя равенство

$$\log\,(1 \;+\; x) \;=\; \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} \, \frac{x^j}{j} \;+\; u_4(x), \tag{5.37}$$

где при $|x| \leq \delta$ для остаточного члена $u_4(x)$ справедливо неравенство

$$|u_4(x)| \;\leq\; C_\delta \, |x|^5, \quad C_\delta \;>\; 0, \tag{5.38}$$

при $x \in C_{ni,\delta}$ можно написать

$$l_G(x, b_{ni}) \;-\; l(x) \;=\; \log \int \frac{p(x, b_{ni}u)}{p(x)} \, dG(u) \;=$$

$$=\; \log \left(1 \;+\; \int \Big(\frac{p(x, b_{ni}u)}{p(x)} \;-\; 1 \Big) \, dG(u) \right) \;=$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \left(\int \Big(\frac{p(x, b_{ni}u)}{p(x)} \; - \; 1 \Big) \, dG(u) \right)^{j} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \; + \; r_{n2,i}(x), \tag{5.39}$$

где

$$|r_{n2,i}(x)| \;\le\; C_\delta \left| \int \Big(\frac{p(x, b_{ni}u)}{p(x)} \; - \; 1 \Big) \, dG(u) \right|^{5}. \tag{5.40}$$

Из этого равенства следует, что

$$\mathsf{E}_0 \Big(l_G(X_1, b_{ni}) \; - \; l(X_1) \Big) \, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \, \mathsf{E}_0 \left(\int \Big(\frac{p(X_1, b_{ni}u)}{p(X_1)} - 1 \Big) \, dG(u) \right)^{j} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) + \mathsf{E}_0 \, r_{n2,i}(X_1) \, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1), \tag{5.41}$$

причем с учетом (5.40) и (5.36) имеем

$$\mathsf{E}_0 \, |r_{n2,i}(X_1)| \, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;\le\; C_\delta \; \mathsf{E}_0 \left(\int \left| \frac{p(X_1, b_{ni}u)}{p(X_1)} \; - \; 1 \right| \, dG(u) \right)^{5} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;\le$$

$$\le\; C_\delta \int \mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1, b_{ni}u)}{p(X_1)} \; - \; 1 \right|^{5} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \, dG(u) \;=\; o(b_{ni}^{4}), \tag{5.42}$$

и значит (см. (5.34)) равенство (5.41) приобретает вид

$$\mathsf{E}_0 \Big(l_G(X_1, b_{ni}) \; - \; l(X_1) \Big) \, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=$$

$$= \sum_{j=2}^{4} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \, \mathsf{E}_0 \left(\int \Big(\frac{p(X_1, b_{ni}u)}{p(X_1)} \; - \; 1 \Big) \, dG(u) \right)^{j} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \; + \; o(b_{ni}^{4}). \tag{5.43}$$

Из Леммы 4.8 следует также, что

$$\sup_{C_{bi,\delta}} \left| \frac{p(x, ub_{ni})}{p(x)} \; - \; \sum_{m=0}^{j} \frac{u^m b_{ni}^m}{m!} \, \psi_m(x) \right| \;\le\; \delta,$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \frac{p(X_1, ub_{ni})}{p(X_1)} \; - \; \sum_{m=0}^{j} \frac{u^m b_{ni}^m}{m!} \, \psi_m(X_1) \right|^{4/j} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=\; o(b_{ni}^{4}), \qquad j \;=\; 1, 2, 3. \tag{5.44}$$

Рассмотрим слагаемое при $j = 2$ в правой части (5.43). Имеем

$$\mathsf{E}_0 \left(\int \Big(\frac{p(X_1, b_{ni}u)}{p(X_1)} \; - \; 1 \Big) \, dG(u) \right)^{2} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;\equiv$$

$$\equiv\; \mathsf{E}_0 \left(\int \Big(ub_{ni}\psi_1(X_1) \; + \; \frac{u^2 b_{ni}^2 \psi_2(X_1)}{2} \; + \; \rho_{ni}(u, X_1) \Big) \, dG(u) \right)^{2} \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1), \tag{5.45}$$

где остаточный член $\rho_{ni}(u,x)$ имеет вид

$$\rho_{ni}(u,x) \;=\; \frac{p(x, ub_{ni})}{p(x)} \;-\; \sum_{m=0}^{2} \frac{u^m b_{ni}^m}{m!}\, \psi_m(x). \tag{5.46}$$

Из условий $(G1)$ и $(G2)$ (см. (2.9), (2.10)) следует, что правая часть равенства (5.45) приобретает вид

$$\mathsf{E}_0 \left(\frac{b_{ni}^2}{2}\, \psi_2(X_1) \;+\; \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=$$

$$= \;\frac{b_{ni}^4 J}{4} \;+\; b_{ni}^2\, \mathsf{E}_0\, \psi_2(X_1) \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \,+$$

$$+\, \mathsf{E}_0 \left(\int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;+\; \frac{b_{ni}^4}{4} \Big(\mathsf{E}_0\, \psi_2^2(X_1) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;-\; J \Big). \tag{5.47}$$

Последнее слагаемое в правой части (5.47) есть величина вида $o(b_{ni}^4)$. Оценим второе и третье слагаемые в правой части (5.47). Используя (5.44) и неравенство Гельдера, получим

$$b_{ni}^2 \Big| \mathsf{E}_0 \psi_2(X_1) \int \rho_{ni}(u, X_1) dG(u) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \Big| \le b_{ni}^2 \int \mathsf{E}_0 \Big| \psi_2(X_1) \Big| |\rho_{ni}(u, X_1)| \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) dG(u) \le$$

$$\le\; b_{ni}^2 J^{1/2} \int \Big(\mathsf{E}_0\, \rho_{ni}^2(u, X_1)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \Big)^{1/2} dG(u) \;=\; o(b_{ni}^4). \tag{5.48}$$

Аналогично

$$\mathsf{E}_0 \left(\int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;\le$$

$$\le\; \int \mathsf{E}_0\, \rho_{ni}^2(u, X_1) \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1)\, dG(u) \;=\; o(b_{ni}^4). \tag{5.49}$$

Теперь из (5.43), (4.45) - (5.49) следует, что

$$\mathsf{E}_0 \Big(l_G(X_1, b_{ni}) \;-\; l(X_1) \Big)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=\; -\frac{b_{ni}^4 J}{8} \,+$$

$$+\, \sum_{j=3}^{4} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\, \mathsf{E}_0 \left(\int \Big(\frac{p(X_1, b_{ni} u)}{p(X_1)} \;-\; 1 \Big)\, dG(u) \right)^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;+\; o(b_{ni}^4). \tag{5.50}$$

Докажем, что сумма в правой части равенства (5.50) имеет вид $o(b_{ni}^4)$. Используя равенства (5.45) и (5.46) получаем, что

$$\mathsf{E}_0 \left(\int \Big(\frac{p(X_1, b_{ni} u)}{p(X_1)} \;-\; 1 \Big)\, dG(u) \right)^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \;=$$

$$= \mathsf{E}_0 \left(\frac{b_{ni}^2 \psi_2(X_1)}{2} + \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1), \quad j = 3, 4. \tag{5.51}$$

Используем теперь неравенство

$$|a + b|^r \le 2^{r-1} (|a|^r + |b|^r), \quad r \ge 1 \tag{5.52}$$

для оценки модуля правой части равенства (5.51). Получаем, что модуль правой части (5.51) не превосходит величины

$$2^{j-1} \left(\frac{b_{ni}^{2j}}{2^j} \mathsf{E}_0 |\psi_2(X_1)|^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) + \mathsf{E}_0 \left| \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right|^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \right), \quad j = 3, 4. \tag{5.53}$$

Из Леммы 4.8 и неравенств (5.44) и (5.49) следует, что

$$\mathsf{E}_0 |\psi_2(X_1)|^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \le J\, \delta^{j-2}\, b_{ni}^{-2(j-2)}, \tag{5.54}$$

$$\mathsf{E}_0 \left| \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right|^j \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \le$$

$$\le \delta^{j-2} \int \mathsf{E}_0\, \rho_{ni}^2(u, X_1)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1)\, dG(u) = o(b_{ni}^4), \quad j = 3, 4. \tag{5.55}$$

Теперь в силу произвольности $\delta > 0$ из соотношений (5.50) - (5.55) следует первое утверждение Леммы.

Докажем второе утверждение Леммы.

Аналогично соотношениям (5.37) - (5.40) при $x \in C_{ni,\delta}$ справедливы соотношения

$$l_G(x, b_{ni}) - l(x) - \frac{b_{ni}^2\, \psi_2(x)}{2} =$$

$$= \int \Big(\frac{p(x, b_{ni} u)}{p(x)} - 1 \Big)\, dG(u) - \frac{b_{ni}^2\, \psi_2(x)}{2} + r_{n3,i}(x) =$$

$$= \int \Big(u b_{ni} \psi_1(x) + \frac{u^2 b_{ni}^2\, \psi_2(x)}{2} + \rho_{ni}(u, x) \Big)\, dG(u) - \frac{b_{ni}^2\, \psi_2(x)}{2} + r_{n3,i}(x) =$$

$$= \int \rho_{ni}(u, x)\, dG(u) + r_{n3,i}(x), \tag{5.56}$$

где остаточный $\rho_{ni}(u, x)$ член определен в (5.46) и

$$|r_{n3,i}(x)| \le C_\delta \left(\int \Big(\frac{p(x, b_{ni} u)}{p(x)} - 1 \Big)\, dG(u) \right)^2 =$$

$$= C_\delta \left(\int \Big(u b_{ni} \psi_1(x) + \delta_{ni}(u, x) \Big)\, dG(u) \right)^2 = C_\delta \left(\int \delta_{ni}(u, x)\, dG(u) \right)^2, \tag{5.57}$$

$$\delta_{ni}(u, x) = \frac{p(x, b_{ni} u)}{p(x)} - 1 - u b_{ni} \psi_1(x). \tag{5.58}$$

Поэтому теперь из соотношений (5.57) и (5.49) следует, что

$$\mathsf{E}_0 \left(l_G(X_1, b_{ni}) \,-\, l(X_1) \,-\, \frac{b_{ni}^2\, \psi_2(X_1)}{2} \right)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \,=$$

$$= \,\mathsf{E}_0 \left(r_{n3,i}(X_1) \,+\, \int \rho_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^2 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \,\le$$

$$\le\, 2\Big(\mathsf{E}_0\, r_{n3,i}^2(X_1)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \,+\, \int \mathsf{E}_0\, \rho_{ni}^2(u, X_1)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1)\, dG(u) \Big) \,\le$$

$$\le\, C_\delta\, \mathsf{E}_0 \left(\int \delta_{ni}(u, X_1)\, dG(u) \right)^4 \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1) \,+\, o(b_{ni}^4) \,\le$$

$$\le\, C_\delta \int \mathsf{E}_0\, \delta_{ni}^4(u, X_1)\, \mathbf{1}_{C_{ni,\delta}}(X_1)\, dG(u) \,+\, o(b_{ni}^4). \tag{5.59}$$

Теперь из равенства (5.58) и соотношения (5.44) с $j = 1$ следует, что правая часть неравенства (5.59) есть $o(b_{ni}^4)$. □

Примеры.

1. Рассмотрим частный случай альтернатив H_{n1} (см. (1.1)) вида

$$\theta_{n1} \,=\, \ldots \,=\, \theta_{nn} \,=\, \tau t, \quad \tau \,=\, n^{-1/2}, \quad 0 \,<\, t \,\le\, C \,<\, \infty, \ \ C \,>\, 0. \tag{6.1}$$

Тогда Условия (T1) и (T2) (см. (1.20) и (1.21)) выполнены с $A^2 = t^2$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ плотность $p(x, \theta)$, $\ 0 \le \theta \le \varepsilon$ удовлетворяет Условию $F_2^{(1)}$. Тогда из Теоремы 1.1 и Леммы 1.1 следует, что критерий, основанный на статистике

$$\tilde{T}_n \,=\, \tau \sum_{i=1}^{n} \tilde{l}^{(1)}(X_i), \tag{6.2}$$

$$\tilde{l}^{(1)}(x) \,=\, l^{(1)}(x)\, \mathbf{1}_{D_{n1,\delta}}(x),$$

то есть имеющий вид

$$\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \,=\, \begin{cases} 1, & \tilde{T}_n \,>\, \tilde{c}_n, \\ 0, & \tilde{T}_n \,<\, \tilde{c}_n, \end{cases} \tag{6.3}$$

не зависит от t (является локально наиболее мощным) и имеет мощность

$$\bar{\beta}_n^*(t) \,\equiv\, \bar{\beta}_n^*(\tau t) \,=\, \mathsf{E}_{n,\tau t}\, \bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \tag{6.4}$$

асимптотически не хуже чем мощность

$$\beta_n^*(t) \,\equiv\, \beta_n^*(\tau t) \,=\, \mathsf{E}_{n,\tau t}\, \Psi_n^*(\mathbf{X}_n) \tag{6.5}$$

наилучшего критерия $\Psi_n^*(\mathbf{X}_n)$ в том смысле, что

$$\beta_n^*(t) \,-\, \bar{\beta}_n^*(t) \,\to\, 0, \quad n \,\to\, \infty. \tag{6.6}$$

Константы $\tilde{c}_n$ и критерий $\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n)$ (см. (6.3)) определены так, чтобы

$$\mathsf{E}_{n,0}\,\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\Big(\tilde{T}_n \;>\; \tilde{c}_n\Big) +$$

$$+\,\gamma_n\,\mathsf{P}_{n,0}\Big(\tilde{T}_n \;=\; \tilde{c}_n\Big) \;=\; \alpha, \quad 0 \le \gamma_n \;\le\; 1. \tag{6.7}$$

Из первого утверждения Леммы 4.6 следует, что для любого $\delta > 0$

$$\mathsf{P}_0(D^c_{n1,\delta}) \;=\; o(n^{-1}) \tag{6.8}$$

и поэтому из соотношения (6.7) следует, что

$$\mathsf{E}_{n,0}\,\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\Big(n^{-1/2}\,\sum_{i=1}^n\,l^{(1)}(X_i) \;>\; \tilde{c}_n\Big) +$$

$$+\,\gamma_n\,\mathsf{P}_{n,0}\Big(n^{-1/2}\,\sum_{i=1}^n\,l^{(1)}(X_i) \;=\; \tilde{c}_n\Big) \;+\; o(1) \;=\; \alpha. \tag{6.9}$$

Далее поскольку (см. Лемму 4.5(2))

$$\mathsf{E}_0\,l^{(1)}(X_1) \;=\; 0, \qquad \mathsf{E}_0\,(l^{(1)}(X_1))^2 \;=\; I, \tag{6.10}$$

то в силу центральной предельной теоремы (см. также Лемму 4.2.1, [4], стр. 102)

$$\mathsf{E}_{n,0}\,\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \;=\; 1 \;-\; \Phi\left(\frac{\tilde{c}_n}{\sqrt{I}}\right) \;+\; o(1) \;=\; \alpha \tag{6.11}$$

и значит

$$\tilde{c}_n \;=\; \sqrt{I}\,u_{1-\alpha} \;+\; o(1),\; n \;\to\; \infty. \tag{6.12}$$

Далее

$$\bar{\beta}_n^*(t) \;=\; \mathsf{E}_{n,\tau t}\,\bar{\Psi}_n^*(\mathbf{X}_n) \;=\; \mathsf{P}_{n,\tau t}\Big(\tilde{T}_n \;>\; \tilde{c}_n\Big) \;+\; +\,\gamma_n\,\mathsf{P}_{n,\tau t}\Big(\tilde{T}_n \;=\; \tilde{c}_n\Big). \tag{6.13}$$

Для моментов $\tilde{l}^{(1)}(X_1)$ при альтернативе справедливы равенства

$$\mathsf{E}_{\tau t}\tilde{l}^{(1)}(X_1) = \mathsf{E}_0\,\frac{p(X_1,\tau t)}{p(X_1)}\,\tilde{l}^{(1)}(X_1) = \mathsf{E}_0\Big(1+\tau t l^{(1)}(X_1)\Big)\tilde{l}^{(1)}(X_1)+\tilde{r}_{n1}, \tag{6.14}$$

где с учетом Леммы 4.6 для остаточного члена $\tilde{r}_{n1}$ справедлива оценка

$$|\tilde{r}_{n1}| \;=\; \left|\mathsf{E}_0\left(\frac{p(X_1,\tau t)}{p(X_1)} \;-\; 1 \;-\; \tau t\,l^{(1)}(X_1)\right)\tilde{l}^{(1)}(X_1)\right| \;\le$$

$$\le\; I^{1/2}\,\mathsf{E}_0^{1/2}\left(\frac{p(X_1,\tau t)}{p(X_1)} \;-\; 1 \;-\; \tau t\,l^{(1)}(X_1)\right)^2 \mathbf{1}_{D_{n1,\delta}}(X_1) \;=\; o(\tau). \tag{6.15}$$

Таким образом из (6.14), (6.15) и (5.13), (5.14) следует, что

$$\mathsf{E}_{\tau t}\,\tilde{l}^{(1)}(X_1) \;=\; \tau t\,I \;+\; o(\tau). \tag{6.16}$$

Аналогично

$$\mathsf{E}_{\tau t}\left(\tilde{l}^{(1)}(X_1)\right)^2 \;=\; \mathsf{E}_0\left(\tilde{l}^{(1)}(X_1)\right)^2 \;+\; \tilde{r}_{n2}, \tag{6.17}$$

где

$$|\tilde{r}_{n2}| \;=\; \left|\mathsf{E}_0\left(\frac{p(X_1,\tau t)}{p(X_1)} \;-\; 1\right)\left(\tilde{l}^{(1)}(X_1)\right)^2\right| \;\leq\; \delta\, I. \tag{6.18}$$

Поэтому в силу произвольности $\delta > 0$ и соотношения (5.14) из (6.17) следует, что

$$\mathsf{E}_{\tau t}\left(\tilde{l}^{(1)}(X_1)\right)^2 \;=\; I \;+\; o(1). \tag{6.19}$$

Теперь из (6.13), (6.16), (6.19) и центральной предельной теоремы имеем

$$\bar{\beta}^*_n(t) \;=\; 1 \;-\; \Phi\Big(\frac{\tilde{c}_n \;-\; t\, I}{\sqrt{I}}\Big) \;+\; o(1) \tag{6.20}$$

и значит с учетом (6.12) и Леммы 1.1

$$\bar{\beta}^*_n(t) \;\longrightarrow\; \beta^*(t) \;=\; \Phi\Big(t\,\sqrt{I} \;-\; u_{1-\alpha}\Big) \tag{6.21}$$

и

$$\beta^*_n(t) \;\longrightarrow\; \beta^*(t) \;=\; \Phi\Big(t\,\sqrt{I} \;-\; u_{1-\alpha}\Big), \qquad n \;\to\; \infty. \tag{6.22}$$

Аналогичный результат можно доказать (используя первые утверждения Лемм 4.5 и 4.6) для мощности критерия, основанного на статистике

$$T_n \;=\; \tau \sum_{i=1}^{n} l^{(1)}(X_i), \tag{6.23}$$

то есть предельная мощность такого критерия совпадает с функцией $\beta^*(t)$.

2. Для случая общей альтернативы (1.4), при справедливости условий Теоремы 1.1, справедлив результат, аналогичный соотношениям (6.21) и (6.22). А именно, критерий $\bar{\Psi}^*_n(\mathbf{X}_n)$, основанный на статистике

$$\tilde{T}_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}\, \tilde{l}^{(1)}(X_i), \tag{6.24}$$

$$\tilde{l}^{(1)}(x) \;=\; l^{(1)}(x)\, \mathbf{1}_{D_{ni,\delta}}(x),$$

или на статистике

$$T_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}\, l^{(1)}(X_i), \tag{6.25}$$

уже зависит от альтернативы θ_{ni}, имеет критическое значение (см. также Лемму 4.2 и (6.7) - (6.12))

$$\tilde{c}_n \;=\; A\, u_{1-\alpha} \;+\; o(1), \; n \;\to\; \infty, \tag{6.26}$$

и для его мощности справедливо соотношение (см. (6.13) - (6.22))

$$\bar{\beta}_n^*(\theta_{ni}) \longrightarrow \beta^*(A) = \Phi\Big(A\sqrt{I} - u_{1-\alpha}\Big), \tag{6.26}$$

при этом также и (Лемма 1.1)

$$\beta_n^*(\theta_{ni}) \longrightarrow \beta^*(A) = \Phi\Big(A\sqrt{I} - u_{1-\alpha}\Big), \quad n \to \infty. \tag{6.27}$$

3. В работе [7] рассмотрена ситуация, когда наблюдения $\mathbf{X}_n$ нормальны, то есть

$$p_n(\mathbf{x}_n, \theta_n) = \prod^n \varphi(x_i - \theta_{ni}). \tag{6.27}$$

Для этого случая для класса априорных распределений, который шире чем в Теореме 2.1, получен общий вид байесовского критерия, в частности, показано, что он основан на статистике

$$T_n^Q = \sum_{i=1}^n b_{ni}^2\,(X_i^2 - 1). \tag{6.28}$$

Этот результат полностью согласуется с Теоремой 2.1 (см. (2.8)), поскольку для нормального случая

$$\psi_2(x) = \frac{p^2(x)}{p(x)} = x^2 - 1.$$

Найдем предельные мощности для критериев $\bar{\Psi}_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$ и $\Psi_n^{Q_n}(\mathbf{X}_n)$. Поскольку

$$J = \mathsf{E}_0\,\psi_2^2(X_1) = \mathsf{E}_0\left(X_1^2 - 1\right)^2 = 2, \tag{6.29}$$

то при гипотезе H_{n0} статистика T_n^Q асимптотически нормальна

$$T_n^Q \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\, 2B^4) \tag{6.30}$$

и для критического значения d_n справедливо представление

$$d_n = \sqrt{2}\,B^2\,u_{1-\alpha} + o(1),\ n \to \infty. \tag{6.31}$$

При альтернативе $\mathsf{H}_{n1}^{Q_n}$

$$T_n^Q \Longrightarrow \mathcal{N}(B^4,\, 2B^4), \tag{6.32}$$

поэтому

$$\beta_n^{Q_n}(\bar{\Psi}_n^{Q_n}) \longrightarrow \beta^Q(B) = \Phi\Big(B^2/\sqrt{2} - u_{1-\alpha}\Big), \tag{6.33}$$

при этом также и (Лемма 2.1)

$$\beta_n^{Q_n}(\Psi_n^{Q_n}) \longrightarrow \beta^Q(B) = \Phi\Big(B^2/\sqrt{2} - u_{1-\alpha}\Big), \quad n \to \infty. \tag{6.34}$$

Заметим здесь также, что поскольку в случае нормальных наблюдений (6.27)

$$I \;=\; \mathsf{E}_0\, \psi_1^2(X_1) \;=\; \mathsf{E}_0\, X_1^2 \;=\; 1, \tag{6.35}$$

то критерий $\bar{\Psi}_n(\mathbf{X}_n)$, основанный на статистике (см. (6.25))

$$T_n \;=\; -\sum_{i=1}^{n} \theta_{ni}\, X_i \tag{6.36}$$

и критерий $\Psi_n(\mathbf{X}_n)$ имеют одинаковые предельные мощности равные (см. (6.26) и (6.27))

$$\beta^*(A) \;=\; \Phi\Big(A \;-\; u_{1-\alpha}\Big). \tag{6.37}$$

В случае, если $B^2 \;=\; \sqrt{2}A$, то из (6.37) и (6.34) следует, что предельные мощности $\beta^*(A)$ и $\beta^Q(B)$ совпадают.

Список литературы

[1] Hájek J., Local asymptotic minimax and admisibility in estimation. // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab., 1972, v.1, pp.175–194.

[2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев. // М.: «Наука», 1971, 375 стр.

[3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер. // М.: «Наука», 1977, 351 стр.

[4] Русас Дж., Контигуальность вероятностных мер. // М.: «Мир», 1975, 254 стр.

[5] Лоэв М., Теория вероятностей. – М.: «Иностранная Литература», 1962, 719 стр.

[6] Chibisov D.M., Asymptotic optimality of the chi - square test with large number of degrees of freedom within the class of symmetric tests. // Math. Method of Statist., 1992, v.1, n.1, pp.55–82.

[7] Chibisov D.M., Quadratic statistics in testing problems of large dimension. // Institute of Math. Statist., Lectures - Monograph Series, 2001, v.36, pp.150–164.

[8] Chibisov D.M., van Zwet W.R., On the Edgeworth expansion for the logarithm of the likelihood ratio.1. // Теор. Вероятн. и ее Прим., 1984, т. 29, в. 3, стр.417–430.

[9] Scheffé H., A useful convergence theorem for probability distributions. // Ann. Math. Statist., 1947, v.18, pp.434–438.

[10] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З., Асимптотическая теория оценивания. // М.: «Наука», 1979, 527 стр.