УДК 517.956

К ОТСУТСТВИЮ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Неклюдов А.В.
МГТУ имени Н.Э. Баумана, г. Москва

Поступила в редакцию 04.05.2018, после переработки 10.02.2023.

В работе рассмотрены условия отсутствия положительных решений эллиптического уравнения второго порядка в полубесконечном цилиндре при выполнении однородного граничного условия Неймана на боковой поверхности цилиндра. Условия отсутствия положительного решения получены в терминах интегральной или поточечной оценки снизу для положительного младшего коэффициента уравнения.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, условие Неймана, неограниченная область, положительные решения, отсутствие решений.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 5–16.
https://doi.org/10.26456/vtpmk504

Введение

Существование или отсутствие положительный решений эллиптических уравнений в неограниченных областях изучалось многими авторами, см. работу [1] и обширную библиографию в ней. В настоящей работе изучаются условия отсутствия положительных решений линейных уравнений вида

$$Lu + a(x)u = 0, \quad a(x) \geq 0,$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$ – равномерно эллиптический оператор второго порядка в дивергентной форме. Рассматриваются решения в цилиндрических областях, удовлетворяющие однородным граничным условиям Неймана на боковой части границы цилиндра.

Ранее этот вопрос рассматривался для линейных и слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в [2–4]. В [2, 3] рассматривалось уравнение с эллиптическим оператором в дивергентной форме при условиях $a_{11} = 1$, $a_{i1} = 0$

при $i = 2, \ldots, n$ (здесь ось цилиндра параллельна оси x_1) и постоянным положительным младшим коэффициентом. При этом оператор L мог содержать члены с первыми производными по $x_2, \ldots x_n$. Доказательства в [2,3] основаны на принципе максимума. В [4] модельное уравнение с оператором Лапласа рассматривалось без использования принципа максимума на основе метода нелинейной емкости [1] и выбора оптимальных пробных функций. В [5] простое доказательство отсутствия положительных решений для такого уравнения получено с помощью принципа максимума.

В настоящей работе на коэффициенты a_{ij} дивергентного оператора, не содержащего члены первого порядка, не накладываются никакие ограничения кроме условия равномерной эллиптичности. Предлагается метод, отличный от методов [2]- [4], основанный на соотношении между средним значением решения по сечению цилиндра и «потоком тепла» через это сечение.

Отсутствие положительных решений (разрушение решений) в полубесконечном цилиндре в данном случае можно рассматривать как невозможность существования стационарного распределения тепла в задаче с незатухающим или медленно затухающим на бесконечности линейным тепловыделением - аналог режима с обострением для теплопроводности в нелинейных средах [6], теплового самовоспламенения при химической реакции [7], [8], или теплового взрыва в теории горения [9]. Подобные явления являются объектом изучения, в частности, в целях безопасного обращения с топливом, взрывчатыми, легковоспламеняющимися веществами.

1. Основные обозначения и определения

В полубесконечном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \widehat{\Omega}$ рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu + a(x)u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a(x)u = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^n_x$, $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n-1}_{\widehat{x}}$ – ограниченная область с липшицевой границей, $a_{ij}(x)$, $a(x) \geq 0$ – ограниченные измеримые функции в Ω, $a_{ij} = a_{ji}$, выполнено условие равномерной эллиптичности: $\lambda_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda_2|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$; где $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0$.

На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, \infty) \times \partial\widehat{\Omega}$ задано однородное условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\partial u/\partial \nu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial u/\partial x_i \cos(\vec{n}, x_j)$ – производная по внешней конормали оператора L, $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Γ.

Будем использовать следующие обозначения: $\Omega(a,b) = \Omega \cap \{x :\ a < x_1 < b\}$, $\Omega_t = \Omega(t, t+1)$, $S_t = \{x : x_1 = t, \widehat{x} \in \widehat{\Omega}\}$, $\Gamma(a,b) = \Gamma \cap \{x : a < x_1 < b\}$, $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $m_0 = \operatorname{mes}_{n-1}\widehat{\Omega}$, $\overline{u}(t) = m_0^{-1}\int_{\Omega_t} u\,dx$, $\widehat{u}(t) = m_0^{-1}\int_{S_t} u\,d\widehat{x}$.

Через $\Phi_{t,h_1;T,h_2} = \Phi_{t,h_1;T,h_2}(x_1)$ будем обозначать непрерывную функцию, такую, что $\Phi = 1$ при $t + h_1 \leq x_1 \leq T$, $\Phi(t) = \Phi(T + h_2) = 0$, Φ – линейная при $t \leq x_1 \leq t + h_1$ и при $T \leq x_1 \leq T + h_2$; $0 \leq t < T$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

Под решениями (1)-(2) в Ω понимаются обобщенные решения из пространства С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega(0,t))$ при любом $t>0$, т.е. функции, для которых справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega(0,t)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx - \int_{\Omega(0,t)} auv\, dx = 0 \tag{3}$$

при любой функции $v \in W_2^1(\Omega(0,t))$, такой, что $v|_{S_0 \cup S_t} = 0$.

В данной работе используется связь между «потоком тепла» решения по сечению S_t цилиндра и средним значением решения на сечении. В случае оператора Лапласа эта связь тривиальна: $m_0^{-1} \int_{S_t} \frac{\partial u}{\partial x_1}\, d\widehat{x} = \widehat{u}'(t)$. Покажем, что результат [4] об отсутствии положительного решения уравнения $\Delta u + u = 0$ в цилиндре Ω при условии (2), полученный с помощью оптимального выбора пробной функции в интегральном тождестве, просто следует из этого соотношения. Действительно, проинтегрировав уравнение по $\Omega(0,t)$, получаем, что

$$m_0 \widehat{u}'(t) - m_0 \widehat{u}'(0) = -\int_{\Omega(0,t)} u\, dx.$$

Тогда для функции $H(t) = \int_{\Omega(0,t)} u\, dx$ имеем

$$H''(t) = c - H(t), \qquad c = \mathrm{const}.$$

Если $u > 0$, то $H(t)$ – возрастающая функция. Но очевидно, что монотонная функция не может удовлетворять данному уравнению на полупрямой $t > 0$.

Для произвольного эллиптического оператора второго порядка в дивергентной форме связь между средним значением решения на сечении или на единичной «ячейке» Ω_t и потоком является нетривиальной.

2. Вспомогательные утверждения

Для решения $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего (2), стандартным образом [10] введем понятие «потока тепла» через сечение S_t цилиндра:

$$P(t,u) = \lim_{h \to 0+} \left(h^{-1} \int_{\Omega(t,t+h)} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx \right) = \int_{S_t} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\widehat{x}.$$

Последнее равенство справедливо для почти всех $t \geq 0$. В [10] (с. 137, формула (4)) также показано, что при $T > t \geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &h_1^{-1} \int_{\Omega(t,t+h_1)} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx - h_2^{-1} \int_{\Omega(T,T+h_2)} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \\ &= \int_{\Omega(t,T+h_2)} au \Phi_{t,h_1;T,h_2}\, dx, \end{aligned} \tag{4}$$

$h_1, h_2 > 0$; и

$$P(T,u) - P(t,u) = -\int_{\Omega(t,T)} au\, dx. \tag{5}$$

Устремляя в (4) h_1 к нулю при фиксированном $h_2 = h$, получим равенство

$$h^{-1}\int_{\Omega(T,T+h)} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = P(t,u) - \int_{\Omega(t,T+h)} au\Phi_{t,0;T,h}\,dx, \tag{6}$$

где $\Phi_{t,0;T,h}(x_1)$ – непрерывная функция, равная 1 при $t < x_1 < T$, линейная при $T < x_1 < T+h$, равная 0 при $x_1 = T+h$. Очевидно также, что

$$\int_{\Omega(T,T+h)} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int_{T}^{T+h} P(\tau,u)\,d\tau. \tag{7}$$

Будем также использовать некоторые известные результаты для линейного однородного уравнения без младшего члена

$$LV \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{8}$$

В Ω существует [11] положительное решение $V(x)$ уравнения (8), удовлетворяющее условию Неймана $\frac{\partial V}{\partial \nu}\big|_{\Gamma} = 0$ и при $x_1 > 1$ оценке

$$C_1x_1 \le V(x) \le C_2x_1, \quad C_1, C_2 = \text{const} > 0.$$

Это решение [12, формула (12)] удовлетворяет оценке

$$\int_{\Omega_t} |\nabla V|^2\,dx \le c_1,$$

и, после умножения на положительную постоянную, условию $P(t,V) = 1$ при всех $t \ge 0$. Здесь и далее в работе через c_i обозначаются положительные постоянные, которые могут зависеть только от $\lambda_1, \lambda_2, \widehat{\Omega}$.

Также для функции $V(x)$ справедливо следующее утверждение [13, лемма 7]. Существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $k \ge k_0$ и $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$\inf\nolimits_{S_{t+k}} V > \sup\nolimits_{S_t} V. \tag{9}$$

В силу оценки Де Джорджи [14, с. 600] и неравенства Пуанкаре также имеем

$$\begin{aligned} &\sup\nolimits_{\Omega(t-k_0,t+1)} \left|V - \overline{V}(t)\right|^2 \le c_0 \int_{\Omega(t-k_0,t+1)} \left|V - \overline{V}(t)\right|^2 dx \le \\ &\le c_1 \int_{\Omega(t-k_0,t+1)} |\nabla V|^2\,dx \le c_2. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Свойства положительных решений

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ - положительное решение уравнения (1) в Ω, удовлетворяющее (2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t(\varepsilon) > 0$, такое, что при $t > t(\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx \le \varepsilon\overline{u}^2(t).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1) = \Phi_{0,1;t,1}(x_1)$. Полагая в интегральном тождестве (3) $v = \varphi^2/u$ и используя эллиптичность уравнения, получаем

$$\int_{\Omega(0,t+1)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx \le I_0 + c_1\left(\int_{\Omega_t} \frac{|\nabla u|}{u}\varphi|\varphi'|\,dx - \int_{\Omega(0,t+1)} a\varphi^2\,dx\right) \le$$
$$\le I_0 + \int_{\Omega_t} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx + c_2\int_{\Omega_t}(\varphi')^2\,dx \le I_1 + \int_{\Omega_t}\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx,$$

I_0, I_1 не зависят от t. Отсюда

$$\int_{\Omega(0,t)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx \le I_1,$$

таким образом,

$$\int_{\Omega(1,\infty)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx < \infty.$$

Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ при $t \ge t_0(\delta)$

$$\int_{\Omega_t} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx \le \delta,$$

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx \le \sup_{\Omega_t} u^2 \int_{\Omega_t} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx \le \delta \sup_{\Omega_t} u^2.$$

Используя неравенство Харнака в замкнутой области (см., например, [3, с. 185]), имеем

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx \le c_3\delta\overline{u}^2(t).$$

При $\delta = \varepsilon/c_3$ получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть* $u(x)$ *- положительное решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее* (2). *Тогда для любого* $t \ge 0$ *в* $\Omega(t,\infty)$ *справедлива оценка*

$$u(x) \ge \inf_{S_t} u.$$

Доказательство. Пусть $m = \inf_{S_t} u$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Очевидно, что для достаточно большого $T(\varepsilon)$ справедливы неравенства $u + \varepsilon V - m > 0$ на $S_t \cup S_T$ при $T \ge T(\varepsilon)$, где V - растущее с линейной скоростью решение уравнения (8), введенное выше. Так как функция $w = u + \varepsilon V - m$ удовлетворяет уравнению $Lw = -au$, то согласно принципу экстремума w не может иметь минимум в $\Omega(t,T)$, а в силу условия Неймана не может иметь минимум на $\Gamma(t,T)$. Поэтому $u + \varepsilon V - m > 0$ в $\Omega(t,T)$. Устремляя ε к нулю, получаем, что $u - m \ge 0$ в $\Omega(t,\infty)$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $u(x)$ *– решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее* (2). *Тогда*

$$\overline{V}(t)\int_t^{t+1} P(\tau,u)\,d\tau + \int_{\Omega(0,t+1)} auV\Phi_{0,1;t,1}\,dx - I_t \le \overline{u}(t) \le$$
$$\le \overline{V}(t)\int_t^{t+1} P(\tau,u)\,d\tau + \int_{\Omega(0,t+1)} auV\Phi_{0,1;t,1}\,dx + I_t,$$

где V – введенное выше линейно растущее решение уравнения (8)*,* $P(t,V)\equiv 1$*,* $|I_t|\le I_0+c_1\big(\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\big)^{1/2}$*,* $I_0>0$ *не зависит от* $t>1$*.*

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из формулы (13) работы [12] в случае, когда правая часть уравнения $Lu=f$ равна $f=-au$. □

Лемма 4. *Пусть* $u(x)$ *– положительное решение уравнения* (1) *в* Ω*, удовлетворяющее* (2)*. Тогда* $P(t,u)\ge 0$ *для всех* $t\ge 0$*.*

Доказательство. Предположим, что $P(t_1,u)=p_0<0$ для некоторого $t_1\ge 0$. Тогда в силу (5) $P(t,u)\le p_0<0$ для всех $t>t_1$. Тогда, используя утверждение леммы 3 в области $\Omega(t_1,\infty)$ и равенства (4), (7) при $h_1=h_2=1$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}(t)\le \overline{V}(t)\int_t^{t+1}P(\tau,u)\,d\tau+\int_{\Omega(t_1,t+1)}auV\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx+I_t=\\
&=\overline{V}(t)\bigg(\int_{t_1}^{t_1+1}P(\tau,u)\,d\tau-\int_{\Omega(t_1,t+1)}au\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx\bigg)+\int_{\Omega(t_1,t+1)}auV\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx+I_t<\\
&<\int_{\Omega(t_1,t+1)}au\big(V-\overline{V}(t)\big)\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx+I_t,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$|I_t|\le I_0+c_1\big(\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\big)^{1/2}$, $I_0>0$ не зависит от t. Пусть k_0 - постоянная, для которой верно (9). Тогда $V(x)<\overline{V}(t)$ при $x_1<t-k_0$. Тогда при $t>t_1+k_0+1$ из (11) получаем, используя оценку (10) и равенства (6), (7),

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}(t)<\int_{\Omega(t-k_0,t+1)}au\big(V-\overline{V}(t)\big)\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx+I_t\le c_2\int_{\Omega(t-k_0,t+1)}au\Phi_{t_1,1;t,1}\,dx+I_t=\\
&=c_2\bigg(P(t-k_0,u)-\int_t^{t+1}P(\tau,u)\,d\tau\bigg)+I_t<-c_2\int_t^{t+1}P(\tau,u)\,d\tau+I_t\le\\
&\le c_3\bigg(\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\bigg)^{1/2}+I_t\le I_0+c_4\bigg(\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Тогда с учетом леммы 1 имеем при $t>t_2=\mathrm{const}$

$$\overline{u}(t)\le I_0+\frac12\overline{u}(t),\quad \overline{u}(t)\le 2I_0.$$

Из неравенства $|P(t,u)|\ge|p_0|>0$ при $t>t_1$ получаем, что

$$\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\ge c_5\bigg(\int_t^{t+1}P(\tau,u)\,d\tau\bigg)^2\ge c_5p_0^2>0.$$

С учетом леммы 1 получаем при $t\ge t_3(\varepsilon)$ неравенство

$$c_5p_0^2\le\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\le\varepsilon\overline{u}^2(t)\le 4I_0^2\varepsilon,$$

что невозможно, если ε достаточно мало. Таким образом, предположение, что $P(t_1,u)<0$, неверно. Лемма доказана. □

Из леммы 4 и равенства (5) сразу следует, что при выполнении условий леммы 4 справедливо соотношение
$$\int_\Omega au\,dx<\infty. \tag{12}$$

4. Отсутствие решений

Хорошо известно [15], что обыкновенное дифференциальное уравнение $u''+a(x)u=0$ не имеет положительных решений на полупрямой $x>x_0>0$, если выполнено одно из условий $\int_{x_0}^{\infty}a(x)\,dx=+\infty$, или при всех $x_1>x_0$ выполнена оценка $a(x)\geq C_0x^{-2}$, $C_0>1/4$. Аналогичные утверждения справедливы для решений (1)-(2) в цилиндре.

Теорема 1. *Пусть $a(x)\geq 0$ в Ω и выполнено условие*
$$\int_\Omega a(x)\,dx=\infty,$$
Тогда в Ω не существует положительного решения уравнения (1), *удовлетворяющего* (2).

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из (12) и леммы 2. □

Теорема 2. *Пусть коэффициент $a(x)$ удовлетворяет при $x_1>x_1^{(0)}=\mathrm{const}>0$ оценке*
$$a(x)\geq\frac{C_0}{x_1^2},$$
где $C_0>0$ – некоторая постоянная, зависящая от λ_1, λ_2, $\widehat{\Omega}$. Тогда в Ω не существует положительного решения уравнения (1), *удовлетворяющего* (2).

Доказательство. Предположим, что положительное в Ω решение (1)-(2) существует. Оценивая $\overline{u}(t)$ снизу по лемме 3 и учитывая лемму 4, получаем, что
$$\overline{u}(t)\geq\int_{\Omega(0,t)}auV\,dx-I_0-c_1\left(\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2},$$
I_0 не зависит от t. Используя лемму 1 при $\varepsilon=c_1^{-2}$, получим, что существует такое $t_0>0$, что при $t>t_0$
$$\overline{u}(t)\geq\int_{\Omega(0,t)}auV\,dx-I_0-\overline{u}(t),$$
то есть
$$\overline{u}(t)\geq\frac{1}{2}\int_{\Omega(0,t)}auV\,dx-\frac{I_0}{2}\geq\frac{1}{3}\int_{\Omega(0,t)}auV\,dx,$$
последняя оценка справедлива, так как с учетом леммы 2 при $x_1>1$ справедлива оценка $auV\geq C_0C_1x_1^{-1}\inf_{S_1}u$, и следовательно $\int_\Omega auV\,dx=+\infty$.

Учитывая еще раз лемму 1, получаем, что для достаточно больших t

$$|\overline{u}(t) - \widehat{u}(t)| \le c_2 \biggl(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \, dx \biggr)^{1/2} \le \frac{1}{2}\overline{u}(t),$$

поэтому при $t \ge t_1 = \mathrm{const}$ справедлива оценка

$$\widehat{u}(t) \ge \frac{1}{2}\overline{u}(t) \ge \frac{1}{6}\int_{\Omega(0,t)} auV \, dx.$$

Рассмотрим функцию

$$H(t) = \int_{\Omega(0,t)} auV \, dx.$$

Имеем

$$H'(t) = \int_{S_t} auV \, d\widehat{x} \ge \frac{C_0 C_1 m_0}{t}\widehat{u}(t) \ge \frac{c_3 C_0}{t} H(t).$$

Интегрируя, получим, что

$$H(t) \ge H\bigl(x_1^{(0)}\bigr)\bigl(x_1^{(0)}\bigr)^{-c_3 C_0} t^{c_3 C_0}.$$

В силу (12) справедлива оценка $\int_\Omega au \, dx < \infty$, отсюда следует, что должно выполняться соотношение

$$H(t) = o(t), \quad t \to \infty.$$

Если $c_3 C_0 \ge 1$, то получаем противоречие. Теорема доказана. □

Заключение

В полубесконечном цилиндре рассмотрено эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме с положительным младшим коэффициентом. На границе цилиндра предполагается выполнение однородного условия Неймана. На коэффициенты эллиптического оператора не налагается никаких условий кроме равномерной эллиптичности. Получены условия типа «не слишком быстрого вырождения» младшего коэффициента на бесконечности в интегральной или поточечной форме, гарантируюшие отсутствие положительных решений. Получены, таким образом, достаточные условия теплового самовоспламенения или взрыва вследствие линейного выделения тепла. Эти результаты могут найти находят применение в химической кинетике, стационарной теории теплопроводности, теории горения.

Список литературы

[1] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. Под ред. С. М. Никольского, Е. Ф. Мищенко. Т. 234. М.: Наука, 2001.

[2] Kondrat'ev V.A. On the existence of positive solutions of second-order semilinear elliptic equations in cylindrical domains // Russian Journal of Mathematical Physics. 2003. Vol. 10, № 1. Pp. 11–20.

[3] Кондратьев В.А. О положительных решениях слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Под ред. Е. Ф. Мищенко. Т. 250. М.: Наука, 2005. С. 183–191.

[4] Похожаев С.И. Об отсутствии положительных решений эллиптических уравнений в плоских неограниченных областях // Математические заметки. 2009. Т. 85, № 2. С. 261–272. https://doi.org/10.4213/mzm5269

[5] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 3. С. 45–68. https://doi.org/10.4213/sm304

[6] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

[7] Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.

[8] Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 2. С. 87–158.

[9] Похожаев С.И. Об одном уравнении теории горения // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 1. С. 53–62. https://doi.org/10.4213/mzm8794

[10] Неклюдов А.В. О решениях эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 4. С. 135–146.

[11] Лахтуров С.С. Об асимптотике решений второй краевой задачи в неограниченных областях // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, № 4. С. 195–196.

[12] Неклюдов А.В. Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре // Математические заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 408–420. https://doi.org/10.4213/mzm4128

[13] Неклюдов А.В. О задаче Робена для эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 3. С. 417–436. https://doi.org/10.4213/mzm11086

[14] Олейник О.А., Иосифьян Г.А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Математический сборник. 1980. Т. 112(154), № 4(8). С. 588–610.

[15] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 216 с.

Образец цитирования

Неклюдов А.В. К отсутствию положительных решений эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 5–16. https://doi.org/10.26456/vtpmk504

Сведения об авторах

1. **Неклюдов Алексей Владимирович**
доцент кафедры ФН1 “Высшая математика” Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Россия, 105005, г. Москва, Рубцовская наб. д. 2/18, МГТУ им. Н.Э. Баумана.
E-mail: nekl5@yandex.ru

ON THE ABSENCE OF POSITIVE SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN CYLINDER DOMAINS

Neklyudov A.V.
Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Received 04.05.2018, revised 10.02.2023.

We consider conditions under which the second order elliptic equation has no positive solutions defined in the semiinfinite cylinder. The conditions of the absence of solutions are established in terms of degeneration of positive low coefficient.

Keywords: elliptic equation, Neuman boundary value condition, unbounded domain, positive solutions, absence of solutions.

Citation

Neklyudov A.V., "On the absence of positive solutions of second-order elliptic equations in cylinder domains", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 5–16 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk504

References

[1] Mitidieri E., Pokhozhaev S.I., "A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities", *Trudy MIAN*. V. 234, eds. S.M. Nikol'skii, E.F. Mishchenko, Nauka Publ., Moscow, 2001 (in Russian), 384 pp.

[2] Kondrat'ev V.A., "On the existence of positive solutions of second-order semilinear elliptic equations in cylindrical domains", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **10**:1 (2003), 11–20.

[3] Kondratev V.A., "O polozhitelnykh resheniyakh slabo nelinejnykh ellipticheskikh uravnenij vtorogo poryadka v tsilindricheskikh oblastyakh", *Differential equations and dynamical systems*. V. 250, ed. E.F. Mishchenko, Nauka Publ., Moscow, 2005, 183–191 (in Russian).

[4] Pokhozhaev S.I., "On the Absence of Positive Solutions of Elliptic Equations in Plane Unbounded Domains", *Mathematical Notes*, **85**:2 (2009), 240–250, https://doi.org/10.4213/mzm5269.

[5] Egorov Yu.V., Kondratev V.A., Olejnik O.A., "Asymptotic behaviour of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems in tube domains", *Sbornik: Mathematics*, **189**:3 (1998), 359–382, https://doi.org/10.4213/sm304.

[6] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P, Mikhailov A.P., *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij [Blow-up in quasilinear parabolic equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 480 pp.

[7] Frank-Kamenetskii D.A., *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoj kinetike [Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 502 pp.

[8] Gel'fand I.M., "Nekotorye zadachi teorii kvazilinejnykh uravnenij", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **14**:2 (1959), 87–158 (in Russian).

[9] Pokhozhaev S.I., "Concerning an equation in the theory of combustion", *Mathematical Notes*, **88**:1 (2010), 48–56, https://doi.org/10.4213/mzm8794.

[10] Neklyudov A.V., "On solutions of second order elliptic equations in cylindrical domains", *Ufimskij matematicheskij zhurnal [Ufa Mathematical Journal]*, **8**:4 (2016), 135–146 (in Russian).

[11] Lakhturov S.S., "The asymptotic behaviour of solutions of the second boundary-value problem in unbounded domains", *Russian Mathematical Surveys*, **35**:4 (1980), 175–176.

[12] Neklyudov A.V., "The Behavior of Solutions of Semilinear Elliptic Equations of Second Order of the Form $Lu = e^u$ in the Infinite Cylinder", *Mathematical Notes*, **85**:3 (2009), 397–408, https://doi.org/10.4213/mzm4128.

[13] Neklyudov A.V., "On the Robin Problem for Second-Order Elliptic Equations in Cylindrical Domains", *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 430–446, https://doi.org/10.4213/mzm11086.

[14] Oleinik O.A., Iosif'yan G.A., "On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary", *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **40**:4 (1981), 527–548.

[15] Bellman R., *Teoriya ustojchivosti reshenij differentsialnykh uravnenij [Stability theory of differential equations]*, Izdatelstvo inostrannoi literatury Publ., Moscow, 1954 (in Russian), 216 pp.

Author Info

1. **Neklyudov Aleksey Vladimirovich**
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
Bauman Moscow State Technical University.

Russia, 105005, Moscow, Rubtsovskaya nab., 2/18, Bauman MSTU.
E-mail: nekl5@yandex.ru