УДК 524.8

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С МОДИФИЦИРОВАННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ

Воронцова Е.Г., **Шаров Г.С.**
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 25.05.2023, после переработки 18.09.2023.

Рассмотрены космологические сценарии, которые обобщают известные модели ΛCDM и wCDM и имеют уравнения состояния вида $p_x = w(a)\,\rho_x$ и $p_x = f(\rho_x)$ для темной энергии, где множитель $w(a)$ может зависеть от масштабного фактора a, p_x и ρ_x — соответственно, давление и плотность темной энергии. Проведен сравнительный анализ моделей в плане соответствия их предсказаний наблюдательным данным по сверхновым типа Ia, параметру Хаббла $H(z)$ и барионным акустическим осцилляциям. Среди рассмотренных сценариев выявлена и исследована наиболее успешная модель $w(a) = w_0 + w_1(1-a)^3$ с указанной точки зрения.

Ключевые слова: космологическая модель, темная энергия, уравнение состояния, наблюдательные данные.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 19–40.
https://doi.org/10.26456/vtpmk693

1. Введение

В текущую эпоху во Вселенной доминирующую роль играет темная энергия — особый вид вещества неопределенной пока природы, характеризуемый отрицательным давлением. О большой доле темной энергии свидетельствуют современные наблюдательные данные, например, данные по анизотропии и спектрам реликтового излучения со спутника Planck [1]. Темная энергия позволяет объяснить имеющиеся наблюдения, в частности, она обеспечивает наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной [1, 2].

Для описания темной энергии было предложено множество космологических моделей, во многих из которых связь между плотностью ρ_x и давлением p_x темной энергии описывается некоторым феноменологическим уравнением состояния [2]–[18]. Для многих моделей характерно то, что оставшаяся часть вещества Вселенной в основном представлена темной материей с близким к нулю давлением, в то время как видимое вещество в настоящее время составляет лишь около 4% в общем балансе. Оценки долей различных компонент материи в составе Вселенной и уравнение состояния темной энергии определяются сопоставлением предсказаний космологических моделей с наблюдательными данными.

Среди моделей, которые используются в настоящее время для описания имеющихся данных, наиболее известна космологическая модель ΛCDM, часто называемая стандартной моделью. Она, наряду с темной энергией, реализуемой в виде Λ-члена в уравнениях Эйнштейна (или соответствующего уравнения состояния), включает холодную темную материю (cold dark matter). Последнюю компоненту с плотностью ρ_c удобно объединить с видимой барионной составляющей ρ_b так, чтобы объединенная холодная компонента с плотностью $\rho_m = \rho_b + \rho_c$ будет иметь уравнение состояния $p_m = 0$. Модель ΛCDM применяется для оценки космологических параметров в работах $[1, 8, 11, 12, 14, 15]$ и многих других, она достаточно хорошо описывает современные наблюдательные данные, включая данные о сверхновых типа Ia, оценки параметра Хаббла, барионные акустические осцилляции (БАО) и другие. Однако при этом данная модель имеет ряд известных недостатков. К ним можно отнести неясную природу темной энергии, малость обусловленного наблюдениями значения космологической константы Λ, малую вероятность примерного совпадения сегодняшних значений плотностей материи и темной энергии при разном характере их эволюции.

К проблемам модели ΛCDM следует отнести и известное расхождение между оценками постоянной Хаббла H_0, полученных, с одной стороны, коллаборацией Planck (последние данные $H_0 = 67.37 \pm 0.54$ км с$^{-1}$Мпк$^{-1}$ [1]) и, с другой стороны, — в проекте SH0ES на основе наблюдений спутника Hubble Space Telescope с оценкой 2021 года $H_0 = 73.3 \pm 1.04$ км с$^{-1}$Мпк$^{-1}$ [19].

Недостатки модели ΛCDM стали основанием для появления других космологических сценариев [2] – [18], простейшие из которых предлагают новые варианты реализации темной энергии в рамках эйнштейновской гравитации. В данной работе мы рассматриваем и анализируем космологические сценарии с модифицированным уравнением состояния для темной энергии, которые обобщают модель ΛCDM и ее простейшее расширение — модель wCDM. Анализ моделей предполагает поиск их оптимальных параметров с точки зрения соответствия предсказаний этих моделей наблюдательным данным по параметру Хаббла, сверхновым типа Ia, БАО и др. В следующем разделе мы описываем набор рассматриваемых космологических моделей, в разделе 3 характеризуем используемый набор наблюдательных данных, в разделе 4 приводим полученные результаты расчетов и подводим итоги в заключении.

2. Космологические модели

Мы предполагаем, что наша однородная изотропная расширяющаяся Вселенная описывается метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[(1 - kr^2)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi)\Big]. \qquad (1)$$

Здесь $a(t)$ — масштабный фактор, зависящий от времени, k — знак кривизны пространственной части Вселенной. Единицы измерения выбираем так, что скорость света c равна 1, а масштабный фактор $a(t_0) = a_0 = 1$ в настоящий момент времени.

Полагаем, что Вселенная заполнена тремя видами материи с суммарной плотностью энергии

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_x, \qquad (2)$$

где ρ_m — плотность пылевидной материи (она включает в себя видимую барионную и темную материю) с нулевым давлением $p_m = 0$, ρ_r — плотность релятивистской составляющей (излучение и нейтрино) с уравнением состояния $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$; ρ_x — плотность темной энергии. Предполагаем, что темная энергия взаимодействует с другими видами материи только гравитационно.

Уравнения Эйнштейна для метрики (1) сводятся к системе уравнений

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_x), \tag{3}$$

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m, \qquad \dot{\rho}_r = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r \tag{4}$$

$$\dot{\rho}_x = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x). \tag{5}$$

Здесь G — гравитационная постоянная Ньютона, точкой обозначена производная по t.

Решениями дифференциальных уравнений (4) являются функции:

$$\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}, \qquad \rho_r = \rho_r^0 a^{-4}. \tag{6}$$

Индекс «0» соответствует настоящему времени t_0.

Перепишем уравнение Фридмана (3), используя параметр Хаббла $H = \dot{a}/a$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_x) - \frac{k}{a^2}.$$

Выразим H, учитывая эволюцию плотностей (6), обозначив постоянную Хаббла $H_0 = H(t_0)$ и используя вместо масштабного фактора $a(t)$ красное смещение

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 = \frac{1}{a} - 1. \tag{7}$$

В результате получим следующее уравнение:

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_r^0(1+z)^4 + \Omega_k^0(1+z)^2 + \Omega_x(z)}, \tag{8}$$

где

$$\Omega_m^0 = \frac{8\pi G\rho_m^0}{3H_0^2}, \qquad \Omega_r^0 = \frac{8\pi G\rho_r^0}{3H_0^2}, \qquad \Omega_k^0 = \frac{-k}{H_0^2} \tag{9}$$

— современные доли пылевидной материи, радиации, и вклад кривизны пространства-времени;

$$\Omega_x(a) = \frac{8\pi G\rho_x(a)}{3H_0^2} \tag{10}$$

— зависящая от a (или z) доля темной энергии.

В данной работе мы рассматриваем модели с различными уравнениями состояния темной энергии, связывающими p_x с ρ_x и позволяющими проинтегрировать уравнение непрерывности (5), в частности, уравнение состояния вида

$$p_x = w(a)\,\rho_x. \tag{11}$$

Простейшими из моделей класса (11), относящимися одновременно и к классу $p_x = f(\rho_x)$, являются модели ΛCDM с $w = -1$ (и $p_x = -\rho_x$) и wCDM, в которой $w \equiv w_0 \equiv \text{const}$. К классу моделей (11) также относятся следующие известные модели: «линейная» [3] с уравнением состояния $w = w_0 + w_1 z = w_0 + w_1(a^{-1} - 1)$, модель CPL (Chevallier–Polarski–Linder) [4], [5] с уравнением состояния $w = w_0 + w_1(1 - a)$. Эти две модели обобщает модель BAZS (Barboza–Alcaniz–Zhu–Silva) [6], уравнение состояния которой имеет вид $w = w_0 + w_1 \frac{1-a^\beta}{\beta}$.

Интегрируя уравнение непрерывности (5) для уравнений состояния (11)

$$\dot\rho_x + 3H\big[1 + w(a)\big]\,\rho_x = 0,$$

найдем долю темной энергии (10)

$$\Omega_x(a) = \exp\left[-3\int \frac{1+w(a)}{a}\,da\right]. \tag{12}$$

В зависимости от модели функцию $\Omega_x(a)$ можно найти явно. Ниже, в Таблице 1, представлены значения функции $\Omega_x(a)$ для упомянутых выше известных моделей с уравнением состояния $p_x = w(a)\,\rho_x$.

Таблица 1: *Доля темной энергии $\Omega_x(a)$ для различных моделей с уравнением состояния $p_x = w(a)\,\rho_x$ из работ [3]– [6]*

Модель	$w(a)$	$\Omega_x(a)$
ΛCDM	$w = -1$	$\Omega_x = \Omega_x^0 = \Omega_\Lambda = \text{const}$
wCDM	$w \equiv w_0$	$\Omega_x(a) = \Omega_x^0\, a^{-3(1+w_0)}$
Линейная	$w = w_0 + w_1(a^{-1} - 1)$	$\Omega_x(a) = \Omega_x^0\, a^{-3(1+w_0-w_1)} e^{3w_1(a^{-1}-1)}$
CPL	$w = w_0 + w_1(1 - a)$	$\Omega_x(a) = \Omega_x^0\, a^{-3(1+w_0+w_1)} e^{3w_1(a-1)}$
BAZS	$w = w_0 + w_1 \frac{1-a^\beta}{\beta}$	$\Omega_x(a) = \Omega_x^0\, a^{-3(1+w_0+w_1/\beta)} \exp\left[\frac{3w_1(a^\beta-1)}{\beta^2}\right]$

Здесь константы w_0, w_1, β и Ω_x^0 — параметры модели.

Отметим, что модель ΛCDM, очевидно, является самой простой среди представленных в Таблице 1 (частным случаем модели wCDM при $w = -1$), линейная и CPL модели обобщают модель wCDM — они переходят в wCDM, если в их уравнениях состояния положить $w_1 = 0$. Модель BAZS обобщает линейную и CPL модели, последние получаются из BAZS при $\beta = -1$ и $\beta = 1$ соответственно.

Так как $z = 0$ при $t = t_0$ (настоящее время), то для всех представленных в таблице моделей из (8) получим тождество

$$1 = \Omega_m^0 + \Omega_x^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0.$$

Следовательно можно выразить один из параметров модели: $\Omega_x^0 = 1 - \Omega_m^0 - \Omega_r^0 - \Omega_k^0$. Таким образом, в линейной и CPL присутствует шесть независимых параметров: H_0, Ω_k^0, Ω_r^0, Ω_m^0, w_0 и w_1, в модели BAZS к ним добавлен еще один параметр — β.

Отметим, что в работе [16] была предложена и исследована модель, которая является обобщением BAZS:

$$w = w_0 + w_1 \frac{1 - a^\beta}{\beta} a^\gamma. \tag{13}$$

В данном случае функция $\Omega_x(a)$ (12) имеет вид

$$\Omega_x(a) = \Omega_x^0 \, a^{-3(1+w_0)} \exp\left[3 \frac{w_1}{\beta}\left(\frac{1 - a^\gamma}{\gamma} + \frac{a^{\beta+\gamma} - 1}{\beta + \gamma}\right)\right].$$

В данной работе мы предложим и протестируем другие варианты функций $w(a)$ для моделей с уравнением состояния (11) $p_x = w(a)\,\rho_x$, когда уравнение (12) может быть проинтегрировано и функция $\Omega_x(a)$ может быть получена явно. Приведем несколько таких случаев.

Например, если рассмотреть модель с уравнением состояния

$$w = w_0 + w_1(1 - a)^\gamma, \tag{14}$$

то выражение (12) принимает вид

$$\Omega_x(a) = \Omega_x^0 \, a^{-3(1+w_0)} \exp\left[3w_1 \int_a^1 \frac{(1 - a)^\gamma}{a}\, da\right].$$

Интеграл в показателе экспоненты может быть выражен через предельное значение (при $\alpha \to 0$) неполной бета-функции $B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1}dt$, а также может быть вычислен явно при рациональных γ. В частности, при целых γ для модели (14) имеем

$$\Omega_x(a) = \Omega_x^0 \, a^{-3(1+w_0+w_1)} e^{3w_1\phi(a)}, \quad \phi(a) = \begin{cases} 2a - \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}, & \gamma = 2, \\ 3a - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{11}{6}, & \gamma = 3, \\ 4a - 3a^2 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{25}{12}, & \gamma = 4. \end{cases} \tag{15}$$

При $\gamma = 1$ модель (14) сводится к модели CPL [4], [5] с уравнением состояния $w = w_0 + w_1(1 - a)$. Модель вида (14), точнее $w = w_0 + \sum_n w_n(1 - a)^n$, использовалась в работе [7] как промежуточный этап для перехода к $w = w_0 + \alpha\big(1 - e^{-w_1(1-a)}\big)$.

Кроме указанных предложим следующие варианты уравнений состояния: с квадратичной функцией $w(a)$

$$w = w_0 + w_1(2 - a - a^2), \tag{16}$$

$$\Omega_x(a) = \Omega_x^0 \, a^{-3(1+w_0+2w_1)} \exp\left[3w_1\left(a + \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2}\right)\right]$$

и обобщенная логарифмическая модель

$$w = w_0 + w_1|\ln a|^\delta, \tag{17}$$

$$\Omega_x(a) = \Omega_x^0 \, a^{-3(1+w_0)} \exp\left[\frac{3w_1(-\ln a)^{\delta+1}}{\delta + 1}\right].$$

Рассмотрим другой тип уравнений состояния темной энергии, а именно:

$$p_x = f(\rho_x). \tag{18}$$

В этом случае уравнение непрерывности (5) сводится к виду

$$\ln a^{-3} = \int \frac{d\rho_x}{\rho_x + f(\rho_x)}.$$

Рассмотрим два примера функции $f(\rho_x)$, позволяющих проинтегрировать уравнение непрерывности. Первый из примеров — известное уравнение состояния модифицированного газа Чаплыгина [8, 10, 11] (MCG), которое мы в данной работе распространяем только на темную энергию:

$$p_x = w_0\rho_x - B\,(\rho_x)^{-\alpha}, \tag{19}$$

где w_0, B и α — константы. Для этой модели из уравнения (5) получим

$$\Omega_x = \Omega_x^0\big[B_s + (1 - B_s)\,a^{-3(1+w_0)(1+\alpha)}\big]^{1/(1+\alpha)},$$

где удобно использовать безразмерный параметр $B_s = B\rho_0^{-1-\alpha}/(1+w_0)$ вместо B.

Следующий вариант функции $f(\rho_x)$ уравнение состояния

$$p_x = -\rho_x + \tilde{A}e^{\tilde{\beta}\rho_x} \tag{20}$$

назовем «экспоненциальным». Для этого случая проинтегрируем уравнение (5)

$$\Omega_x = -\frac{1}{\beta}\ln\big[e^{-\beta\Omega_x^0} + 3\beta A\ln a\big], \tag{21}$$

введя безразмерные параметры $A = \tilde{A}/\rho_{\rm cr}$, $\beta = \tilde{\beta}\rho_{\rm cr}$, где $\rho_{\rm cr} = 3H_0^2/(8\pi G)$.

3. Наблюдательные данные

Для описанных выше моделей мы будем добиваться наилучшего соответствия их предсказаний набору наблюдательных данных, включающего данные по сверхновым типа Ia (SNe Ia) [20], оценки параметра Хаббла $H(z)$ при разных красных смещениях, данные наблюдений барионных акустических осцилляций (БАО).

В качестве источника данных по сверхновым типа Ia мы используем наиболее полный на данный момент каталог Pantheon [20], включающий сведения о $N_{\rm SN} = 1048$ сверхновых, а именно, наблюдаемые значения $\mu_i^{\rm obs}$ модулей фотометрического расстояния

$$\mu = 5\lg\big(D_L(z)/10\text{пк}\big),$$

красного смещения $z = z_i$ для объектов и ковариационную матрицу $C_{\rm SN}$. Для рассматриваемых моделей с независимыми параметрами Ω_m^0, Ω_k, H_0 вычисляем функцию χ^2

$$\chi^2_{\rm SN}(\Omega_m^0,\Omega_k,\dots) = \min_{H_0}\sum_{i,j=1}^{N_{\rm SN}}\Delta\mu_i\big(C_{SN}^{-1}\big)_{ij}\Delta\mu_j, \qquad \Delta\mu_i = \mu^{\rm th}(z_i,\Omega_m^0,\dots) - \mu_i^{\rm obs}. \tag{22}$$

Данные каталога [20] требуют минимизации по H_0 в формуле (22) [15–18]. Необходимое для вычисления $\mu^{\rm th}$ фотометрическое расстояние $D_L(z)$ имеет вид:

$$D_L(z) = \frac{c\,(1+z)}{H_0} S_k\biggl(H_0\int\limits_0^z \frac{d\tilde z}{H(\tilde z)}\biggr), \qquad S_k(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sinh\bigl(x\sqrt{\Omega_k}\bigr)/\sqrt{\Omega_k}, & \Omega_k > 0,\\ x, & \Omega_k = 0,\\ \sin\bigl(x\sqrt{|\Omega_k|}\bigr)/\sqrt{|\Omega_k|}, & \Omega_k < 0. \end{array}\right.$$

В данной работе мы используем оценки значений параметра Хаббла H при разных красных смещениях z, полученные из наблюдений разностей возрастов Δt галактик с близкими красными смещениями (малыми Δz) с помощью соотношения $H(z) = \dot a/a \simeq -(1+z)^{-1}\Delta z/\Delta t$. Такие оценки в литературе получили название космических хронометров (cosmic chronometers). Мы включаем в анализ $N_H = 32$ такого рода значений $H(z)$, добавив недавнюю оценку $H = 98.8 \pm 33.6$ км с$^{-1}$Мпк$^{-1}$ при $z = 0.75$ [21] к 31 использованным ранее в работах [15–18, 22–24] оценкам космических хронометров. Оценки $H(z)$, извлеченные из данных по барионным акустическим осцилляциям (БАО), мы здесь не используем, чтобы избежать корреляции с данными БАО.

Сравнение предсказаний космологической модели $H^{\rm th}(z_j, \Omega_m^0, \Omega_k, \dots)$ и наблюдательных данных для параметра Хаббла $H^{\rm obs}(z_j) = H_j$ с погрешностями σ_j производим, вычисляя и анализируя функцию

$$\chi^2_H(\Omega_m^0, \dots) = \sum_{j=1}^{N_H} \frac{\bigl[H_j - H^{\rm th}(z_j, \Omega_m^0 \dots)\bigr]^2}{\sigma_j^2}. \tag{23}$$

Описание данных по барионным акустическим осцилляциям (БАО) основано на расчете параметров [25]

$$d_z(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}, \qquad A(z) = \frac{H_0\sqrt{\Omega_m^0}}{cz} D_V(z)\,, \tag{24}$$

где $D_V(z) = \bigl[czD_M^2(z)/H(z)\bigr]^{1/3}$, $D_M(z) = D_L(z)/(1+z)$, $r_s(z_d)$ — масштаб акустического горизонта в эпоху z_d исчезновения барионных осцилляций. Величину $r_s(z)$ вычисляем по формуле [16–18]

$$r_s(z) = \int_z^\infty \frac{c_s(\tilde z)}{H(\tilde z)}\,d\tilde z = \frac{1}{\sqrt 3}\int_0^{1/(1+z)} \frac{da}{a^2 H(a)\sqrt{1 + \bigl[3\Omega_b^0/(4\Omega_\gamma^0)\bigr]a}}. \tag{25}$$

Мы оцениваем современное отношение плотностей барионов и фотонов Ω_b^0/Ω_γ и величину z_d методами, описанными в работах [16–18]. В отличие от предыдущих работ здесь мы исключили ряд дублирующих оценок из одного каталога галактик и включили в анализ обновленные данные BAO: 21 измерение $d_z(z)$ и 7 оценок $A(z)$, приведенных в Таблице 2 из указанных источников [26]– [39].

Соответствующая функция χ^2 имеет вид

$$\chi^2_{\rm BAO}(\Omega_m^0, \Omega_k, \dots) = \Delta d \cdot C_d^{-1}(\Delta d)^T + \Delta A \cdot C_A^{-1}(\Delta A)^T\,. \tag{26}$$

Здесь C_d и C_A ковариационные матрицы для коррелированных данных БАО [26, 29], соответствующие векторы:

$$\Delta d_i = d_z^{\rm obs}(z_i) - d_z^{\rm th}(z_i, \dots)\,, \quad \Delta A_i = A^{\rm obs}(z_i) - A^{\rm th}(z_i, \dots)\,.$$

Таблица 2: *Значения параметров (24)*

z	$d_z(z)$	σ_d	$A(z)$	σ_A	Каталог	Ссылки
0.106	0.336	0.015	0.526	0.028	6dFGS	[28]
0.15	0.2237	0.0084	-	-	SDSS DR7	[32]
0.20	0.1905	0.0061	0.488	0.016	SDSS DR7	[26]
0.278	0.1394	0.0049	-	-	SDSS LRG	[27]
0.314	0.1239	0.0033	-	-	SDSS LRG	[29]
0.32	0.1181	0.0026	-	-	DR10,11	[31]
0.32	0.1165	0.0024	-	-	BOSS DR12	[34]
0.35	0.1097	0.0036	0.484	0.016	SDSS DR7	[26]
0.38	0.1011	0.0011	-	-	BOSS DR12	[33]
0.44	0.0916	0.0071	0.474	0.034	WiggleZ	[29]
0.57	0.0739	0.0043	0.436	0.017	BOSS DR9	[30]
0.57	0.0726	0.0014	-	-	DR10,11	[31]
0.59	0.0701	0.0008	-	-	BOSS DR12	[34]
0.60	0.0726	0.0034	0.442	0.020	WiggleZ	[29]
0.61	0.0696	0.0007	-	-	BOSS DR12	[33]
0.73	0.0592	0.0032	0.424	0.021	WiggleZ	[29]
0.85	0.0538	0.0041	-	-	DR16 ELG	[39]
1.48	0.0380	0.0013	-	-	eBOSS DR16	[38]
2.0	0.0339	0.0025	-	-	eBOSS DR14	[36]
2.35	0.0327	0.0016	-	-	DR14 Lyα	[37]
2.4	0.0331	0.0016	-	-	DR12 Lyα	[35]

Наиболее ранние из приведенных здесь данных БАО относятся к эпохе с красным смещением $z = 2.4$, что соответствует в $z+1 = 3.4$ раза меньшему чем сейчас значению масштабного фактора a, или возрасту Вселенной $t \simeq 2.75$ млрд лет. Этот возраст $t(a) = \int_0^a \big[\tilde{a}H(\tilde{a})\big]^{-1} d\tilde{a}$, равный примерно 1/5 современного возраста Вселенной $t_0 \simeq 13.75$ млрд лет, зависит от выбора космологической модели. Примерно к той же эпохе относятся и самые ранние данные SNe Ia ($z = 2.26$) и по $H(z)$ ($z = 1.956$).

4. Анализ результатов расчетов

Для сравнения предсказаний моделей с описанными выше наборами данных наблюдений используем функции χ^2 для сверхновых типа Ia (22), для данных по параметру Хаббла $H(z)$ (23) и для данных БАО (26), анализируя суммарную функцию

$$\chi^2 \equiv \chi^2_{\rm tot} = \chi^2_{\rm SN} + \chi^2_H + \chi^2_{\rm BAO}. \tag{27}$$

Исследуемая функция $\chi^2 = \chi^2(\Omega_m^0, \Omega_k, \dots)$ зависит от свободных параметров конкретной космологической модели, их число N_p различно для разных сценариев, большое число N_p является недостатком модели. Для уменьшения числа параметров исключим слабо влияющий на результаты расчетов параметр Ω_r^0 (9), точнее, зафиксируем отношение долей радиации и пылевидной материи в виде [16–18]

$$X_r = \frac{\Omega_r^0}{\Omega_m^0} = 2.9656 \cdot 10^{-4}. \tag{28}$$

В этом случае для простейшей модели ΛCDM число параметров N_p равно 3 (Ω_m^0, Ω_k, H_0), для wCDM это число равно 4 (добавляется w). Набор из $N_p = 5$ параметров

$$\Omega_m^0, \quad \Omega_k, \quad H_0, \quad w_0, \quad w_1 \tag{29}$$

имеют модели линейная, CPL, модель (14), (15) при конкретных значениях γ, модель (16). Для общего случая моделей (14), BAZS, логарифмической (17), MCG (19) число свободных параметров $N_p = 6$, в то время как для экспоненциальной модели (21) $N_p = 5$.

Для выбора наиболее успешной из упомянутых моделей сравним минимальные значения суммарной функции χ^2 (27) для них. Результаты такого сравнения представлены на Рис. 1 и в Таблице 3. Для наглядности на Рис. 1 мы сравниваем однопараметрические распределения $\chi^2(\Omega_m^0)$, рассчитанные с помощью минимизации χ^2-функций (27) по всем остальным $N_p - 1$ параметрам каждой модели. В частности, для моделей с 5-ю параметрами (29) эти распределения вычисляются как

$$\chi^2(\Omega_m^0) = \min_{\Omega_k, H_0, w_0, w_1} \chi^2(\Omega_m^0, \Omega_k, H_0, w_0, w_1). \tag{30}$$

При проведении расчетов мы используем описанный в работах [8, 10–12] метод численного поиска минимума функции χ^2 по $N_p - 1$ переменным, например, указанным в выражении (30). Этот метод предполагает выделение на первом этапе двух параметров модели θ_1, θ_2, и в каждой точке плоскости (θ_1, θ_2) мы ищем минимум по оставшимся параметрам в прямоугольнике на плоскости (θ_3, θ_4), размеры которого фиксированы, а координаты центра определяются на основе вычислений в предыдущих точках и интерполяции. Аналогичным образом смещается и прямоугольник на плоскости (θ_1, θ_2).

Результаты расчетов на Рис. 1 и в Таблице 3 показывают, что модель (15) с $\gamma = 3$, то есть с $w = w_0 + w_1(1-a)^3$, наиболее успешна среди рассмотренных моделей с точки зрения достижения минимума функции χ^2 (27), включающей данные по SNe Ia, $H(z)$ и БАО. Для этой модели абсолютный минимум $\min \chi^2 \simeq 1086.93$ существенно ниже соответствующих значений для моделей ΛCDM (1087.88) и wCDM (1087.76). Промежуточные результаты демонстрируют варианты модели (15) с $\gamma = 1$ (модель CPL), $\gamma = 2$ и $\gamma = 4$, имеющие $N_p = 5$ параметров (29) и представленные на левой панели Рис. 1.

Следует обратить внимание на график распределения $\chi^2(\Omega_m^0)$ для модели (15) с $\gamma = 2$ — эта функция наряду с глобальным минимумом при $\Omega_m^0 \simeq 0.2859$ имеет дополнительный локальный минимум при $\Omega_m^0 \simeq 0.2935$.

На правой панели Рис. 1 представлены однопараметрические распределения $\chi^2(\Omega_m^0)$ для логарифмической модели (17), модели BAZS, а также для моделей с уравнением состояния $p_x = f(\rho_x)$ (18): экспоненциальной (21) и MCG (19). Как видим, среди рассмотренных сценариев ближайший к модели (15) с $\gamma = 3$ результат по $\min \chi^2$ показывает модель MCG (19), которая, однако, имеет $N_p = 6$ параметров. Это снижает конкурентоспособность данной модели, если мы учтем

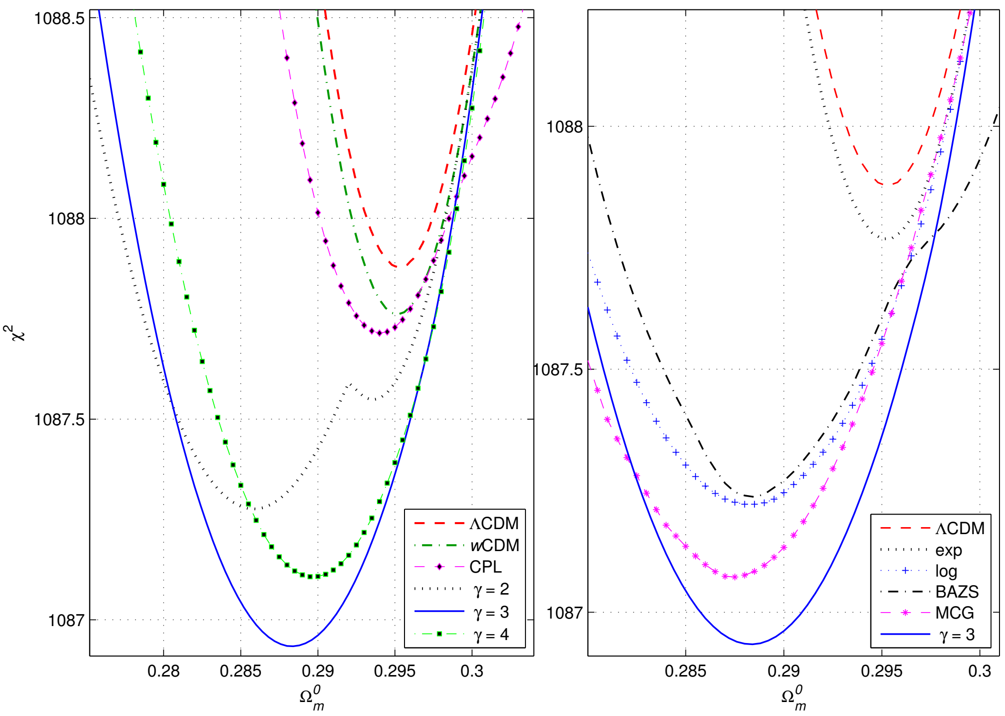

Рис. 1: *Однопараметрические распределения $\chi^2(\Omega_m^0)$ для моделей ΛCDM, $wCDM$, CPL, модели (15) с $\gamma = 2$, $\gamma = 3$, $\gamma = 4$ (слева), а также для моделей логарифмической (17), экспоненциальной (21), BAZS, MCG (19) (справа)*

информационный критерий Акаике [40]

$$\mathrm{AIC} = \min \chi^2 + 2N_p. \tag{31}$$

Значения AIC для различных моделей указаны в Таблице 3. Можно заключить, что критерий (31) дает преимущество моделям с малым числом свободных параметров N_p, в частности, модель ΛCDM с $N_p = 3$ выходит в лидеры по AIC, на втором месте модель wCDM с $N_p = 4$. Напротив, модели с наибольшим числом параметров $N_p = 6$ оказываются аутсайдерами с наибольшими значениями AIC.

Некоторые из рассмотренных моделей терпят неудачу в описании наблюдательных данных по SNe Ia, $H(z)$ и БАО. Как видно из Таблицы 3, к таковым относятся линейная модель с $w = w_0 + w_1(a^{-1} - 1)$, модель (16) с квадратичной функцией $w(a)$, экспоненциальная модель (21). Причиной неудач моделей (16) и линейной (они не представлены на Рис. 1) является малое оптимальное значение параметра w_1 в окрестности минимума функции χ^2 в пространстве параметров (29).

Сосредоточим внимание на наиболее успешной с точки зрения минимума χ^2 модели (15) с $\gamma = 3$. Для наглядного представления об оптимальных значениях параметров (29) этой модели рассчитаем двупараметрические распределения

Таблица 3: *Минимумы χ^2 и значения AIC для различных моделей*

Модель	$\min\chi^2$	N_p	AIC	Ω_m^0
ΛCDM	1087.88	3	1093.88	$0.2953^{+0.0063}_{-0.0061}$
wCDM	1087.76	4	1095.76	$0.2952^{+0.0062}_{-0.0061}$
линейная	1087.76	5	1097.76	$0.2952^{+0.0063}_{-0.0064}$
CPL	1087.71	5	1097.71	$0.2940^{+0.0073}_{-0.0066}$
(15) $\gamma = 2$	1087.28	5	1097.28	$0.2859^{+0.0073}_{-0.0066}$
(15) $\gamma = 3$	1086.93	5	1096.93	$0.2883^{+0.0102}_{-0.010}$
(15) $\gamma = 4$	1087.11	5	1097.11	$0.2897^{+0.0096}_{-0.0098}$
(16)	1087.73	5	1097.73	$0.2944^{+0.0137}_{-0.0075}$
(17) «log»	1087.22	5	1097.22	$0.2882^{+0.0112}_{-0.011}$
BAZS	1087.24	6	1099.24	$0.2884^{+0.0141}_{-0.0092}$
MCG	1087.07	6	1099.07	$0.2874^{+0.0112}_{-0.0106}$
(21) «exp»	1087.76	5	1097.76	$0.2952^{+0.0063}_{-0.006}$

$\chi^2(\theta_i,\theta_j)$ на плоскостях двух параметров, представленные на Рис. 2. В этих распределениях по аналогии с (30) проводится минимизация по всем оставшимся параметрам, например, $\chi^2(\Omega_m^0,\Omega_k) = \min\limits_{H_0,w_0,w_1} \chi^2(\Omega_m^0,\Omega_k,H_0,w_0,w_1)$.

Двупараметрические распределения на плоскостях (Ω_m^0,Ω_k), (Ω_m^0,H_0), (w_0,w_1) для модели (15) с $\gamma = 3$ показаны в нижней части Рис. 2 в виде линий уровня 1σ (68.27%) и 2σ (95.45%) в сравнении с моделями ΛCDM и wCDM. Кроме этого на Рис. 2 показаны однопараметрическое распределение вида (30) $\chi^2(H_0)$ и функции правдоподобия

$$\mathcal{L}(\theta_i) \sim \exp(-\chi^2(\theta_i)/2)$$

для свободных параметров θ_i. Распределение вида (30) $\chi^2(\theta_i)$ и функции позволяют определить оптимальные значения параметров моделей с 1σ-оценками в Таблицах 3 и 4.

Рис. 2 показывает, что оптимальное значение параметра Ω_m^0 для модели $w = w_0 + w_1(1-a)^3$ меньше, чем для ΛCDM и wCDM; по Ω_k модель ΛCDM предсказывает близкое к нулю оптимальное значение и (в сравнении с другими сценариями) существенно меньший допустимый разброс. Представленные на Рис. 2 и в Таблице 4 модели предсказывают близкие результаты по параметру Хаббла H_0 (с несколько меньшим разбросом у ΛCDM) и, соответственно, близкие функции правдоподобия $\mathcal{L}(H_0)$. Различие одномерных распределений $\chi^2(H_0)$ на Рис. 2 связано, главным образом, с различием $\min\chi^2$ для этих моделей.

Заключение

В работе рассмотрены космологические модели с различными уравнениями

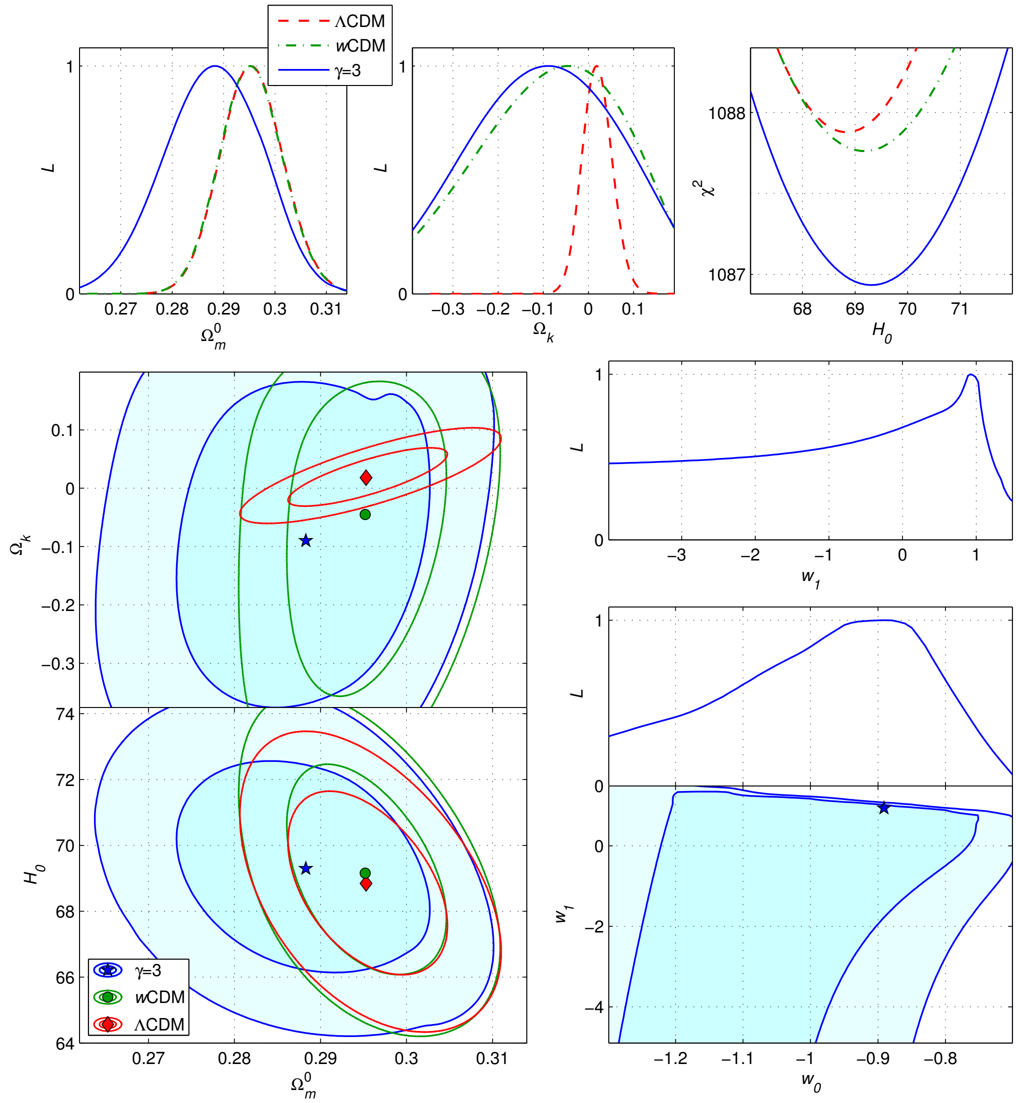

Рис. 2: *Линии уровня 1σ и 2σ функций $\chi^2(\theta_i, \theta_j)$ для модели (15) $w = w_0 + w_1(1-a)^3$ (заполненные контуры), а также распределение $\chi^2(H_0)$ и функции правдоподобия $\mathcal{L}(\theta_i)$ для $\theta_i = \Omega_m^0$, Ω_k, w_0, w_1 в сравнении с моделями ΛCDM и $wCDM$*

Таблица 4: *Минимумы χ^2, AIC и 1σ-оценки оптимальных значений параметров моделей (15) ($\gamma = 3$) с $w = w_0 + w_1(1-a)^3$, wCDM и ΛCDM для наблюдательных данных SNe Ia, $H(z)$ и БАО*

Модель	$\min\chi^2$	AIC	H_0	Ω_m^0	Ω_k	$w_0 \equiv w$	w_1
$\gamma = 3$	1086.93	1096.93	$69.31^{+2.14}_{-2.10}$	$0.2883^{+0.0102}_{-0.010}$	$-0.089^{+0.191}_{-0.195}$	$-0.891^{+0.096}_{-0.211}$	$0.938^{+0.208}_{-1.465}$
wCDM	1087.76	1095.76	$69.18^{+2.15}_{-2.07}$	$0.2952^{+0.0062}_{-0.0061}$	$-0.044^{+0.165}_{-0.207}$	$-0.932^{+0.084}_{-0.150}$	-
ΛCDM	1087.88	1093.88	$68.84^{+1.85}_{-1.83}$	$0.2953^{+0.0063}_{-0.0061}$	$0.018^{+0.034}_{-0.033}$	-1	-

состояния для темной энергии. Среди них были выявлены наиболее успешные в описании последних астрофизических данных по сверхновым типа Ia, параметру Хаббла $H(z)$ и барионным акустическим осцилляциям.

С точки зрения достижения минимума отвечающей этим данным функции (27) $\chi^2 = \chi^2_{\rm SN} + \chi^2_H + \chi^2_{\rm BAO}$ максимально успешной оказалась модель (15) при $\gamma = 3$ с уравнением состояния $w = w_0 + w_1(1-a)^3$. Представленные в Таблице 3 результаты расчетов минимума χ^2 для различных моделей показывают относительную успешность моделей с модифицированным газом Чаплыгина (19) и логарифмической модели (17). Однако применение информационного критерия Акаике (31) $\mathrm{AIC} = \min\chi^2 + 2N_p$ дает преимущество моделям с малым числом свободных параметров N_p, в результате модель ΛCDM с $N_p = 3$ оказывается наиболее успешной по AIC (см. Таблицы 3 и 4). Второе место по этому критерию занимает модель wCDM. Для этих сценариев вместе с (15) при $\gamma = 3$ в Таблице 4 приведены оценки оптимальных значений свободных параметров. Рис. 2 иллюстрирует особенности поведения функции χ^2 для этих моделей.

Список литературы

[1] Ade P.A.R. et al Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/1807.06209.

[2] Huterer D., Shafer D.L. Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests // Reports on Progress in Physics. 2018. Vol. 81, № 1. ID 016901. URL: https://arxiv.org/abs/1709.01091

[3] Cooray A.R., Huterer D. Gravitational Lensing as a Probe of Quintessence // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 513, № 2. Pp. L95–L98. URL: https://arxiv.org/abs/astro-ph/9901097

[4] Chevallier M., Polarski D. Accelerating Universes with Scaling Dark Matter // International Journal of Modern Physics D. 2001. Vol. 10, № 2. Pp. 213–223. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/0009008v1

[5] Linder E.V. Exploring the expansion history of the universe // Physical Review Letters. 2003. Vol. 90, № 9. ID 091301. URL: https://arxiv.org/abs/astro-ph/0208512

[6] Barboza E.M., Alcaniz J.S., Zhu Z.-H., Silva R. Generalized equation of state for dark energy // Physical Review D. 2009. Vol. 80, № 4. ID 043521. URL: https://arxiv.org/abs/0905.4052

[7] Davari Z., Malekjani M., Artymowski M. New parametrization for unified dark matter and dark energy // Physical Review D. 2018. Vol. 97. ID 123525. URL: https://arxiv.org/abs/1805.11033

[8] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2014. № 10. ID 057.

[9] Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологическая модель с обобщенным чаплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 1. С. 21–38.

[10] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Последние оценки астрофизических параметров и предсказания модели с модифицированным газом Чаплыгина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 7–24.

[11] Sharov G.S. Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. № 6. ID 023.

[12] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели с интегрируемыми уравнениями состояния // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 5–26.

[13] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели со скалярными полями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 97–111.

[14] Sharov G.S., Vasiliev V.O. How predictions of cosmological models depend on Hubble parameter data sets // Mathematical Modelling and Geometry. 2018. Vol. 6, № 1. ID 1. URL: https://arxiv.org/abs/1807.07323

[15] Sharov G.S., Sinyakov E.S. Cosmological models, observational data and tension in Hubble constant // Mathematical Modelling and Geometry. 2020. Vol. 8, № 1. Pp. 1–20. URL: https://arxiv.org/abs/2002.03599

[16] Sharov G.S., Myachin V.E. Modified Equations of State for Dark Energy and Observational Limitations // Universe. 2022. Vol. 8, № 4. ID 201. URL: https://arxiv.org/abs/2203.14336

[17] Nojiri S., Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Modelling and testing the equation of state for (Early) dark energy // Physics of the Dark Universe. 2021. Vol. 32. ID 100837. URL: https://arxiv.org/abs/2103.05304v1

[18] Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Testing viable extensions of Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Physics of the Dark Universe. 2022. Vol. 37. ID 101100. URL: https://arxiv.org/abs/2207.08513

[19] Riess A.G., Yuan W., Macri L.M., Scolnic D. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team // Astrophysical Journal Letters. 2021. Vol. 908. ID L6. URL: https://arxiv.org/abs/2112.04510

[20] Scolnic D.M. et al. The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed Type Ia Supernovae from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from The Combined Pantheon Sample // The Astrophysical Journal. 2018. Vol. 859. ID 101. URL: https://arxiv.org/abs/1710.00845v1

[21] Borghi N., Moresco M., Cimatti A. Towards a Better Understanding of Cosmic Chronometers: A new measurement of $H(z)$ at $z = 0.7$ // Astrophysical Journal Letters. 2022. Vol. 928, № 1. ID L4. URL: https://arxiv.org/abs/2110.04304v1

[22] Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 466, № 3. Pp. 3497–3506.

[23] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // The European Physical Journal C - Particles and Fields. 2017. Vol. 77. ID 862.

[24] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S. Testing logarithmic corrections on R^2-exponential gravity by observational data // Physical Review D. 2019. Vol. 99, № 2. ID 024003.

[25] Eisenstein D.J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies // The Astrophysical Journal. 2005. Vol. 633, № 2. Pp. 560–574. URL: https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501171

[26] Percival W.J. et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. Vol. 401, № 4. Pp. 2148–2168. URL: https://arxiv.org/abs/0907.1660?context=astro-ph

[27] Kazin E.A. et al. The Baryonic Acoustic Feature and Large-Scale Clustering in the SDSS LRG Sample // The Astrophysical Journal. 2010. Vol. 710. Pp. 1444–1461.

[28] Beutler F. et al. The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 416. Pp. 3017–3032. URL: https://arxiv.org/abs/1106.3366?context=astro-ph

[29] Blake C. et al. The WiggleZ dark energy Survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 418. Pp. 1707–1724. URL: https://arxiv.org/abs/1108.2635

[30] Chuang C.H. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of $f(z)\sigma_8(z)$ on constraining dark energy // Monthly Notices of the

Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 433, № 4. Pp. 3559–3571. URL: https://arxiv.org/abs/1303.4486

[31] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring D_A and H at $z = 0.57$ // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, № 1. Pp. 83–101. URL: https://arxiv.org/abs/1303.4666

[32] Ross A.J. et al. The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$ // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. Vol. 449, № 1. Pp. 835–847. URL: https://arxiv.org/abs/1409.3242

[33] Beutler F. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in Fourier-space // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 464, № 3. Pp. 3409–3430. URL: https://doi.org/10.1093/mnras/stw2373

[34] Chuang C.H. et al. The Clustering of Galaxies in the Completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: single-probe measurements from DR12 galaxy clustering – towards an accurate model // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 471, № 2. Pp. 2370–2390. URL: https://arxiv.org/abs/1607.03151

[35] Bourboux H.M. et al. Baryon acoustic oscillations from the complete SDSS-III Lya-quasar cross-correlation function at z = 2.4 // Astronomy and Astrophysics. 2017. Vol. 608. ID A130. URL: https://arxiv.org/abs/1708.02225

[36] Zhu F. et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: Measuring the anisotropic Baryon Acoustic Oscillations with redshift weights // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Vol. 480, № 1. Pp. 1096–1105. URL: https://arxiv.org/abs/1801.03038

[37] Blomqvist M. et al. Baryon acoustic oscillations from the cross-correlation of Lya absorption and quasars in eBOSS DR14 // Astronomy and Astrophysics. 2019. Vol. 629. ID A86. URL: https://arxiv.org/abs/1904.03430

[38] Hou J. et al. The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from anisotropic clustering analysis of the Quasar Sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2020. Vol. 500, № 1. Pp. 1201–1221. URL: https://arxiv.org/abs/2007.08998

[39] Tamone A. et al. The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Growth rate of structure measurement from anisotropic clustering analysis in configuration space between redshift 0.6 and 1.1 for the Emission Line Galaxy sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2020. Vol. 499, № 4. Pp. 5527–5546. URL: https://arxiv.org/abs/2007.09009

[40] Akaike H. A New Look at the Statistical Model Identification // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. Vol. AC-19. Pp. 716–723.

Образец цитирования

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели с модифицированными уравнениями состояния темной энергии // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 19–40. https://doi.org/10.26456/vtpmk693

Сведения об авторах

1. **Воронцова Елена Геннадьевна**
доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Vorontsova.EG@tversu.ru

2. **Шаров Герман Сергеевич**
заведующий кафедрой функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru

COSMOLOGICAL MODELS WITH MODIFIED EQUATIONS OF STATE FOR DARK ENERGY

Vorontsova E.G., Sharov G.S.
Tver State University, Tver

Received 25.05.2023, revised 18.09.2023.

We consider cosmological scenarios which generalize the well-known ΛCDM and wCDM models and have the equations of state $p_x = w(a)\,\rho_x$ and $p_x = f(\rho_x)$ for dark energy. Here the factor $w(a)$ can depend on the scale factor a, p_x and ρ_x are dark energy pressure and density respectively. We analyze these models comparing their predictions with observational data for type Ia supernovae, the Hubble parameter $H(z)$ and baryon acoustic oscillations. From this point of view we obtain and investigate the most successful model $w(a) = w_0 + w_1(1-a)^3$ among the considered scenarios.

Keywords: cosmological model, dark energy, equation of state, observational data.

Citation

Vorontsova E.G., Sharov G.S., “Cosmological models with modified equations of state for dark energy”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 3, 19–40 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk693

References

[1] Ade P.A.R. et al, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, https://arxiv.org/abs/1807.06209.

[2] Huterer D., Shafer D.L., “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests”, *Reports on Progress in Physics*, **81**:1 (2018), 016901, https://arxiv.org/abs/1709.01091.

[3] Cooray A.R., Huterer D., “Gravitational Lensing as a Probe of Quintessence”, *The Astrophysical Journal*, **513**:2 (1999), L95–L98, https://arxiv.org/abs/astro-ph/9901097.

[4] Chevallier M., Polarski D., “Accelerating Universes with Scaling Dark Matter”, *International Journal of Modern Physics D*, **10**:2 (2001), 213–223, https://arxiv.org/abs/gr-qc/0009008v1.

[5] Linder E.V., “Exploring the expansion history of the universe”, *Physical Review Letters*, **90**:9 (2003), 091301, https://arxiv.org/abs/astro-ph/0208512.

[6] Barboza E.M., Alcaniz J.S., Zhu Z.-H., Silva R., "Generalized equation of state for dark energy", *Physical Review D*, **80**:4 (2009), 043521, https://arxiv.org/abs/0905.4052.

[7] Davari Z., Malekjani M., Artymowski M., "New parametrization for unified dark matter and dark energy", *Physical Review D*, **97** (2018), 123525, https://arxiv.org/abs/1805.11033.

[8] Sharov G.S., Vorontsova E.G., "Parameters of cosmological models and recent astronomical observations", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014, № 10, 057.

[9] Sharov G.S., Vorontsova E.G., "Cosmological model with generalized Chaplygin gas and recent astronomical observations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 1, 21–38 (in Russian).

[10] Vorontsova E.G., Sharov G.S., "Recent estimations of astrophysical parameters and forecast of the model with modified Chaplygin gas", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 2, 7–24 (in Russian).

[11] Sharov G.S., "Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, № 6, 023.

[12] Vorontsova E.G., Sharov G.S., "Cosmological models with integrable equations of state", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 2, 5–26 (in Russian).

[13] Vorontsova E.G., Sharov G.S., "Cosmological models with scalar fields", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 97–111 (in Russian).

[14] Sharov G.S., Vasiliev V.O., "How predictions of cosmological models depend on Hubble parameter data sets", *Mathematical Modelling and Geometry*, **6**:1 (2018), 1, https://arxiv.org/abs/1807.07323.

[15] Sharov G.S., Sinyakov E.S., "Cosmological models, observational data and tension in Hubble constant", *Mathematical Modelling and Geometry*, **8**:1 (2020), 1–20 (in Russian), https://arxiv.org/abs/2002.03599.

[16] Sharov G.S., Myachin V.E., "Modified Equations of State for Dark Energy and Observational Limitations", *Universe*, **8**:4 (2022), 201, https://arxiv.org/abs/2203.14336.

[17] Nojiri S., Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S., "Modelling and testing the equation of state for (Early) dark energy", *Physics of the Dark Universe*, **32** (2021), 100837, https://arxiv.org/abs/2103.05304v1.

[18] Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S., “Testing viable extensions of Einstein-Gauss-Bonnet gravity”, *Physics of the Dark Universe*, **37** (2022), 101100, https://arxiv.org/abs/2207.08513.

[19] Riess A.G., Yuan W., Macri L.M., Scolnic D., “A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team”, *Astrophysical Journal Letters*, **908** (2021), L6, https://arxiv.org/abs/2112.04510.

[20] Scolnic D.M. et al., “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed Type Ia Supernovae from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from The Combined Pantheon Sample”, *The Astrophysical Journal*, **859** (2018), 101, https://arxiv.org/abs/1710.00845v1.

[21] Borghi N., Moresco M., Cimatti A., “Towards a Better Understanding of Cosmic Chronometers: A new measurement of $H(z)$ at $z = 0.7$”, *Astrophysical Journal Letters*, **928**:1 (2022), L4, https://arxiv.org/abs/2110.04304v1.

[22] Sharov G.S. et al., “A new interacting two fluid model and its consequences”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **466**:3 (2017), 3497–3506.

[23] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S., “Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history?”, *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, **77** (2017), 862.

[24] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S., “Testing logarithmic corrections on R^2-exponential gravity by observational data”, *Physical Review D*, **99**:2 (2019), 024003.

[25] Eisenstein D.J. et al., “Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies”, *The Astrophysical Journal*, **633**:2 (2005), 560–574, https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501171.

[26] Percival W.J. et al., “Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **401**:4 (2010), 2148–2168, https://arxiv.org/abs/0907.1660?context=astro-ph.

[27] Kazin E.A. et al., “The Baryonic Acoustic Feature and Large-Scale Clustering in the SDSS LRG Sample”, *The Astrophysical Journal*, **710** (2010), 1444–1461.

[28] Beutler F. et al., “The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **416** (2011), 3017–3032, https://arxiv.org/abs/1106.3366?context=astro-ph.

[29] Blake C. et al., “The WiggleZ dark energy Survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **418** (2011), 1707–1724, https://arxiv.org/abs/1108.2635.

[30] Chuang C.H. et al., “The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of $f(z)\sigma_8(z)$ on constraining dark energy”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **433**:4 (2013), 3559–3571, https://arxiv.org/abs/1303.4486.

[31] Anderson L. et al., “The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring D_A and H at $z = 0.57$”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **439**:1 (2014), 83–101, https://arxiv.org/abs/1303.4666.

[32] Ross A.J. et al., “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **449**:1 (2015), 835–847, https://arxiv.org/abs/1409.3242.

[33] Beutler F. et al., “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in Fourier-space”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **464**:3 (2016), 3409–3430, https://doi.org/10.1093/mnras/stw2373.

[34] Chuang C.H. et al., “The Clustering of Galaxies in the Completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: single-probe measurements from DR12 galaxy clustering – towards an accurate model”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **471**:2 (2017), 2370–2390, https://arxiv.org/abs/1607.03151.

[35] Bourboux H.M. et al., “Baryon acoustic oscillations from the complete SDSS-III Lya-quasar cross-correlation function at z = 2.4”, *Astronomy and Astrophysics*, **608** (2017), A130, https://arxiv.org/abs/1708.02225.

[36] Zhu F. et al., “The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: Measuring the anisotropic Baryon Acoustic Oscillations with redshift weights”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **480**:1 (2018), 1096–1105, https://arxiv.org/abs/1801.03038.

[37] Blomqvist M. et al., “Baryon acoustic oscillations from the cross-correlation of Lya absorption and quasars in eBOSS DR14”, *Astronomy and Astrophysics*, **629** (2019), A86, https://arxiv.org/abs/1904.03430.

[38] Hou J. et al., “The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from anisotropic clustering analysis of the Quasar Sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **500**:1 (2020), 1201–1221, https://arxiv.org/abs/2007.08998.

[39] Tamone A. et al., “The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Growth rate of structure measurement from anisotropic clustering analysis in configuration space between redshift 0.6 and 1.1 for the Emission Line Galaxy sample”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **499**:4 (2020), 5527–5546, https://arxiv.org/abs/2007.09009.

[40] Akaike H., “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19** (1974), 716–723.

Author Info

1. **Vorontsova Elena Gennadievna**
Associate Professor at General Mathematics and Mathematical Physics Department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov str., 33, TverSU.
E-mail: Vorontsova.EG@tversu.ru

2. **Sharov German Sergeyevich**
Head of Functional Analysis and Geometry Department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru