УДК 519.64

# УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПЕРВУЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

**Бештоков М.Х., Бештокова З.В.**
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

*Поступила в редакцию 17.03.2023, после переработки 09.07.2023.*

Исследованы интегро-дифференциальные параболические уравнения в многомерной области с граничными условиями первого рода. Для каждой задачи построена разностная схема с порядком аппроксимации $O(|h|^2+\tau^{m_\sigma})$, где $m_\sigma=1$, если $\sigma\neq 0.5$ и $m_\sigma=2$, если $\sigma=0.5$, методом энергетических неравенств для решения разностной задачи получена априорная оценка. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(|h|^2+\tau^2)$ при $\sigma=0.5$. Проведены численные расчеты тестовых примеров.

**Ключевые слова:** многомерная задача, первая краевая задача, параболическое уравнение, интегральное уравнение, разностная схема, априорная оценка, устойчивость и сходимость разностных схем.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 77–91.*
https://doi.org/10.26456/vtpmk661

## Введение

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью и долгосрочной памятью и описываются интегро-дифференциальными уравнениями, которые в свою очередь находят применение в современных исследованиях в теоретической физике, механике, биологии и прикладной математике [1,2].

Интегро-дифференциальными уравнениями в литературе принято называть класс уравнений, в которых неизвестная функция содержится как под знаком интеграла, так и под знаком дифференциала или производной [3,4].

Целью и новизной настоящей работы является разработка и обоснование конечно-разностного метода решения первой краевой задачи для интегро-дифференциальных параболических уравнений в многомерной области. Для каждой задачи построена разностная схема с порядком аппроксимации $O(|h|^2+\tau^{m_\sigma})$, где $m_\sigma = 1$, если $\sigma \neq 0.5$ и $m_\sigma = 2$, если $\sigma = 0.5$, методом энергетических неравенств для решения разностной задачи получена априорная оценка. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0.5$.

Задачи подобного рода возникают при описании функции распределения по массам капель и ледяных частиц, с учетом микрофизических процессов конденсации, коагуляции (объединение мелких капель в большие по размеру агрегаты), дробления и замерзания капель в конвективных облаках [5-9], а также при изучении процессов и явлений природы, учитывающих эффект памяти [10].

Исследованию различных краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами посвящены многие работы авторов, отметим из них работы [11,12].

## 1. Постановка первой начально-краевой задачи для многомерного дифференциального уравнения с нелокальным линейным источником

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является $p$-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей $\Gamma$, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u - \int\limits_0^{l_\alpha} \rho_\alpha(x,t) u dx_\alpha$,

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x,t) \leq c_1, \quad |q_\alpha(x,t)|, \quad |\rho_\alpha(x,t)| \leq c_2, \tag{4}$$

$$Q_T = G \times (0 < t \leq T],\ \alpha = \overline{1,p}, \quad c_0, c_1, c_2 = const > 0.$$

В дальнейшем предполагаем, что решение рассматриваемой дифференциальной задачи существует, единственно и обладает всеми непрерывными производными, необходимыми по ходу изложения.

Обозначим через $M_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи (1)-(3).

## 2. Построение разностной схемы

Разобьём $p$-мерное пространство переменных $x_1, \ldots, x_p$ (гиперплоскость размерности $p$) $(p-1)$-мерными гиперплоскостями $x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p$, где $h_\alpha = \dfrac{i_\alpha}{N_\alpha}$, $i_\alpha$ – целые числа, на $p$-мерные параллелепипеды [13]. Вершины этих параллелепипедов будем называть узлами сетки. Множество узлов, принадлежащих открытой области $G = \overline{G} \backslash \Gamma$, назовём внутренними узлами и обозначим через

$$\omega_h = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, ..., x_p^{(i_p)}),\ 0 < l_\alpha < N_\alpha\}.$$

Множество узлов, принадлежащих границе $\Gamma$, назовём граничными узлами $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$.

На отрезке $0 \le t \le T$ введём сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

Таким образом, в замкнутой области $\overline{Q}_T$ вводится равномерная сетка [13]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему с весами, порядка аппроксимации $O\big(|h|^2 + \tau^{m_\sigma}\big)$:

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(\sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{5}$$

$$y|_{\gamma_h} = 0,\ y(x, 0) = u_0(x), \tag{6}$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\bar{t}), \quad \Lambda_\alpha(\bar{t}) y^{(\sigma)} = \big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\sigma)}\big)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{(\sigma)} - \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} p_{\alpha,i_\alpha}^{j} y^{(\sigma)} h,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma) y, \quad a_\alpha^{(+1_\alpha)} = a_{\alpha, i_\alpha + 1}, \quad \hat{y} = y^{j+1},\ y = y^j,$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha},\ y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha},\ y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau},\ m_\sigma = \begin{cases} 2, \text{ при } \sigma = 0.5, \\ 1, \text{ при } \sigma \ne 0.5, \end{cases}$$

$$a_\alpha = k_\alpha\big(x^{-0.5\alpha}, \bar{t}\big), \quad d_\alpha = q_\alpha\big(x, \bar{t}\big), \quad p_\alpha = \rho_\alpha(x, \bar{t}), \quad \varphi = f\big(x, \bar{t}\big),$$

$$x^{-0.5\alpha} = x_1, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5 h_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p,\ \bar{t} = (j + 0.5)\tau = t_j + 0.5\tau = t_{j+0.5},$$

$$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + ... + h_p^2, \quad \tau, h - \text{шаги сетки.}$$

## 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для получения априорной оценки решения разностной задачи (5), (6) воспользуемся методом энергетических неравенств. Введём скалярное произведение в следующем виде:

$$\big(u, v\big) = \sum_{x \in \omega_h} u(x) v(x) h_1 h_2 \cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \cdots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(i_1h_1, i_2h_2, \ldots, i_p h_p) v(i_1h_1, i_2h_2, \ldots, i_p h_p) h_1h_2 \cdots h_p\,;$$

$$(u,v)_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \cdots \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \cdots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2 \cdots h_p = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left( \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u(x)v(x)h_\alpha \right) H/h_\alpha,$$

$$(u,v]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \cdots \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} \cdots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2 \cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left( \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} u(x)v(x)h_\alpha \right) H/h_\alpha, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

В пространстве функций определим норму и введём ее в таком виде:

$$(u,u) = \|u\|^2, \quad (u,u] = \|u]|^2, \quad (u,v] = \sum_{\alpha=1}^{p} (u,v]_\alpha, \ \|Y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|Y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Полагая $\sigma = 0.5$, умножим (5) скалярно на $Y = \hat{y} + y$ :

$$(y_t, Y) = 0.5(\Lambda(\bar{t})Y, Y) + (\varphi, Y). \tag{7}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (7), с учетом первой разностной формулы Грина [13]:

$$(y_t, Y) = \left( \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), (\hat{y} + y) \right) = \frac{(1, \hat{y}^2) - (1, y^2)}{\tau} = (1, y^2)_t, \tag{8}$$

$$\left( \Lambda(\bar{t})Y, Y \right) = \left( \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\bar{t})Y, Y \right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \left( \Lambda_\alpha(\bar{t})Y, Y \right)_\alpha =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{p} \left( a_\alpha, Y^2_{\overline{x}_\alpha} \right]_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{p} \left( d_\alpha, Y^2 \right)_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{p} \left( \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} p_{\alpha, i_\alpha} Y h_\alpha, Y \right)_\alpha. \tag{9}$$

С помощью (8), (9) из (7) находим

$$(1, y^2)_t + 0.5 \sum_{\alpha=1}^{p} \left( a_\alpha, Y^2_{\overline{x}_\alpha} \right]_\alpha =$$

$$= -0.5 \sum_{\alpha=1}^{p} \left( d_\alpha, Y^2 \right)_\alpha - 0.5 \sum_{\alpha=1}^{p} \left( \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} p_{\alpha, i_\alpha} Y h_\alpha, Y \right)_\alpha + (\varphi, Y). \tag{10}$$

Оценим суммы, входящие в тождество (10), пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon$:

$$(1, y^2)_t = \left( \|y\|^2 \right)_t, \tag{11}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left( a_\alpha, Y^2_{\overline{x}_\alpha} \right]_\alpha \geq c_0 \sum_{\alpha=1}^{p} (1, Y^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha = c_0 (1, Y^2_{\overline{x}}] = c_0 \|Y_{\overline{x}}]|^2, \tag{12}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}(d_\alpha, Y^2)_\alpha \le c_2\sum_{\alpha=1}^{p}(1, Y^2)_\alpha = c_2\|Y\|^2, \tag{13}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} p_{\alpha,i_\alpha} Y h_\alpha, Y\right)_\alpha \le \left(\frac{1}{2}, Y^2\right) + \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{1}{2}, \left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} p_{\alpha,i_\alpha} Y h_\alpha\right)^2_\alpha\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|Y\|^2 + M_1\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{1}{2}, \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\left(Y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)^2 h_\alpha\right) \le M_2\|Y\|^2, \tag{14}$$

$$(\varphi, Y) \le \frac{1}{2}\Big(\|Y\|^2 + \|\varphi\|^2\Big). \tag{15}$$

Учитывая оценки (11)-(15), после ряда преобразований из (10) получаем неравенство

$$\Big(\|y\|^2\Big)_t + \|Y_{\overline{x}}]|^2 \le M_3\|Y\|^2 + M_4\|\varphi]|^2. \tag{16}$$

Умножим обе части (16) на $\tau$ и просуммируем по $j'$ от 0 до $j$, тогда имеем:

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau \le M_3\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\tau + M_5\Big(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau + \|y^0\|^2\Big). \tag{17}$$

Обозначая через $F(t_j) = \sum\limits_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau + \|y^0\|^2$, из (17) получим

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau \le M_3\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\tau + M_5F(t_j). \tag{18}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (18). Имеем

$$\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\tau = \sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y^{j'+1} + y^{j'}\|^2\Big)\tau. \tag{19}$$

Учитывая неравенство $\|z^{j'+1}+z^{j'}\|^2 \le 2\|z^{j'+1}\|^2+2\|z^{j'}\|^2$, из (19) получаем оценку

$$\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\tau \le 2\|y^{j+1}\|^2\tau + 2\|y^0\|^2\tau + 4\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau. \tag{20}$$

В силу (20) из (18) находим

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau \le 2M_3\|y^{j+1}\|^2\tau + M_6\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau + M_7F(t_j). \tag{21}$$

Выбирая $\tau$ таким образом, что для всех $\tau \le \tau_0, \tau_0 = \dfrac{1}{4M_3}$, из (21) получаем

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau \le M_8\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau + M_9F(t_j). \tag{22}$$

Применяя к (22) аналог леммы Гронуолла для сеточной функций [14, лемма 4, с. 171], имеем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|\big(y^{j\,'+1}+y^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\leq M(T)\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2\bigg),\tag{23}$$

где $M(T)$ – положительная постоянная, не зависящая от |h| и $\tau$.

Из априорной оценки (23) следует следующая

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия (4). Тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (5), (6) при $\sigma=0.5$ и малом $\tau\leq\tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_0^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|\big(y^{j\,'+1}+y^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\leq M\bigg(\sum_{j\,'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|_0^2\bigg)$$

*на каждом временном слое, где $M$ – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и $\tau$.*

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (5), (6) по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|y\|_1^2=\|y^{j+1}\|_0^2+\sum\limits_{j\,'=0}^{j}\|\big(y^{j\,'+1}+y^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)-(3), $y_i^j$ – решение разностной задачи (5), (6), тогда обозначим через $z_i^j=y_i^j-u_i^j$ погрешность аппроксимации. Подставляя $y_i^j=z_i^j+u_i^j$ в (5), (6) и считая $u(x_i,t_j)$ заданной функцией, получим задачу для $z$:

$$z_t=\Lambda(\bar t)z^{(\sigma)}+\psi,\tag{24}$$

$$z|_{\gamma_h}=0,\ z(x,0)=0,\tag{25}$$

где $\psi_i=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha=O(|h|^2+\tau^{m_\sigma})$; $m_\sigma=1$, если $\sigma\neq0.5$ и $m_\sigma=2$, если $\sigma=0.5$ – погрешность аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном $t=\bar t$, в силу построения оператора $\Lambda$.

Применяя априорную оценку (23), в силу линейности разностной задачи (5), (6), к задаче для погрешности (24), (25), получим оценку

$$\|z^{j+1}\|_0^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|\big(z^{j\,'+1}+z^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\leq M\sum_{j\,'=0}^{j}\|\psi^{j'}\|^2\tau.\tag{26}$$

Из априорной оценки (26) следует сходимость схемы (24)-(25) при $\sigma=0.5$ со скоростью $O(|h|^2+\tau^2)$, $|h|^2=h_1^2+h_2^2+...+h_p^2$.

## 4. Постановка первой начально-краевой задачи для многомерного дифференциального уравнения с эффектом памяти

Вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int\limits_0^t\rho_\alpha(x,t,\tau)ud\tau=Lu+f(x,t),\quad(x,t)\in Q_T,\tag{27}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u,$

$$|\rho_\alpha(x,t,\tau)| \le c_2. \tag{28}$$

## 5. Построение разностной схемы

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (2), (3), (27) поставим в соответствие разностную схему с весами, порядка аппроксимации $O\big(|h|^2 + \tau^{m_\sigma}\big)$:

$$y_t = \Lambda(\bar{t})y^{(\sigma)} + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{29}$$

$$y|_{\gamma_h} = 0,\ y(x,0) = u_0(x), \tag{30}$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\bar{t}), \quad \Lambda_\alpha(\bar{t})y^{(\sigma)} = \big(a_\alpha y^{(\sigma)}_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{(\sigma)} - \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{j} p_s^j y^s \bar{\tau}.$$

## 6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для получения априорной оценки решения разностной задачи (29), (30) воспользуемся методом энергетических неравенств. Полагая $\sigma = 0.5$, умножим (29) скалярно на $Y = \hat{y} + y$ :

$$(y_t, Y) = 0.5(\Lambda(\bar{t})Y, Y) + (\varphi, Y). \tag{31}$$

Повторяя рассуждения (7)-(16), с учётом оценки

$$-\frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{s=0}^{j} p_s y \bar{\tau}, Y\right)_\alpha \le \left(\frac{1}{2p}, Y^2\right) + \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{1}{2p}, \left(\sum_{s=0}^{j} p_s y \bar{\tau}\right)^2\right)_\alpha \le$$

$$\le \frac{1}{2p}\|Y\|_0^2 + M_1 \sum_{s=0}^{j}\|y\|_0^2 \bar{\tau},$$

после ряда преобразований из (31) получаем неравенство

$$\big(\|y\|^2\big)_t + \|Y_{\overline{x}}]|^2 \le M_2\|Y\|^2 + M_3\sum_{s=0}^{j}\|y\|_0^2\bar{\tau} + M_4\|\varphi]|^2. \tag{32}$$

Умножим обе части (32) на $\tau$ и просуммируем по $j'$ от 0 до $j$. Получаем:

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau \le M_5\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\tau + M_6\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j'}\|y\|_0^2\bar{\tau}\tau +$$

$$+M_7\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2\Bigg). \tag{33}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (33). Имеем

$$\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|y\|_0^2\bar{\tau}\tau\le T\sum_{j\,'=0}^{j}\|y\|_0^2\tau. \tag{34}$$

В силу (20), (34) из (33) находим

$$\|y^{j+1}\|^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau\le 2M_5\|y^{j+1}\|^2\tau+M_8\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_9F(t_j), \tag{35}$$

где $F(t_j)=\sum\limits_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2$.

Выбирая $\tau$ таким образом, что для всех $\tau\le\tau_0,\tau_0=\dfrac{1}{4M_5}$, из (35) получаем

$$\|y^{j+1}\|^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}]|^2\tau\le M_{10}\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{11}F(t_j). \tag{36}$$

Применяя к (36) аналог леммы Гронуолла для сеточной функций [14, лемма 4, с. 171], получаем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|\big(y^{j\,'+1}+y^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\le M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2\Bigg), \tag{37}$$

где $M$ – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и $\tau$.

Из априорной оценки (37) следует следующая

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия (4), (28). Тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (29), (30) при $\sigma=0.5$ и малом $\tau\le\tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_0^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|\big(y^{j\,'+1}+y^{j\,'}\big)_{\overline{x}}]|^2\tau\le M\Bigg(\sum_{j\,'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|_0^2\Bigg)$$

*на каждом временном слое, где $M$ - положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и $\tau$.*

Таким образом, доказаны единственность, устойчивость решения разностной задачи (29), (30) по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|y\|_1^2$ на слое, а также, в силу линейности рассматриваемой задачи, сходимость схемы (29), (30) при $\sigma=0.5$ со скоростью $O(|h|^2+\tau^2)$, $|h|^2=h_1^2+h_2^2+...+h_p^2$.

## 7. Тестовая задача и результаты вычислительных экспериментов

Коэффициенты уравнения и граничных условий дифференциальных задач (1)–(3) и (1), (27), (3) подбираются таким образом, чтобы точным решением каждой из задач при $p = 1$ была функция $u(x,t) = t^3(x^4 - lx^3)$.

Ниже, в Таблицах 1 и 2, приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) при уменьшении размера сетки в норме $\|\cdot\|_0$, когда $p = 1$, $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации. Порядок сходимости будем определять по формуле ПС $= \log_2 \frac{||z_1||}{||z_2||}$, где $z_1$ и $z_2$ – погрешности, соответствующие шагам $0.5h$, $h$.

**Таблица 1:** *Результаты численного эксперимента для задачи (1)-(3)*

| $h$ | $\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_0$ | ПС в $\|\cdot\|_0$ |
|---|---|---|
| 1/20 | 0.000764758 | |
| 1/40 | 0.000191442 | 1.9981 |
| 1/80 | 0.000047876 | 1.9995 |
| 1/160 | 0.000011970 | 1.9999 |
| 1/320 | 0.000002993 | 2.0000 |

**Таблица 2:** *Результаты численного эксперимента для задачи (27),(2),(3)*

| $h$ | $\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_0$ | ПС в $\|\cdot\|_0$ |
|---|---|---|
| 1/20 | 0.000766878 | |
| 1/40 | 0.000191974 | 1.9981 |
| 1/80 | 0.000048010 | 1.9995 |
| 1/160 | 0.000012003 | 1.9999 |
| 1/320 | 0.000003001 | 2.0000 |

*Примечание* 1. Для решения полученных систем разностных уравнений (5), (6) и (29), (30) можно использовать итерационные методы решения. Отметим, что итерационный метод имеет смысл, если он сходится, т.е. $\|y_k - y\| \to 0$, при $k \to \infty$.

Каждый итерационный метод имеет свою ограниченную область применимости, так как, во-первых, процесс итераций может оказаться расходящимся для данной СЛАУ и, во-вторых, сходимость процесса может быть настолько медленной, что практически оказывается невозможным достигнуть необходимой близости к точному решению [15, с. 204].

При решении полученной алгебраической задачи $Ay = f$ итерационным методом, где $A-$ матрица коэффициентов системы разностных уравнений, необходимо, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационного процесса, т.е.

построчное диагональное преобладание:

$$\max_i \sum_{j\neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_i \frac{\sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad i,j = 1,2,...,N.$$

Если матрица $A$ имеет построчное диагональное преобладание, тогда условием окончания итерационного процесса является выполнение следующего условия

$$\|Ay_k - f\| \leq \varepsilon \|Ay_0 - f\|, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где $\varepsilon$ – относительная погрешность, с которой нужно найти приближенное решение задачи $Ay = f$, $k$ – число итераций, обеспечивающее нужную точность приближения к точному решению.

Представим $Ay = f$ в виде $y_{k+1} = By_k + F$, где $y_0$ – произвольное начальное приближение, $\det B \neq 0$. Тогда для сходимости итерационного процесса, в частности, в методах последовательных приближений, простой итерации или Якоби, Гаусса – Зейделя достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $B$, были меньше единицы по модулю, а это возможно, если:

$$\|B\| = \max_i \sum_j |b_{ij}| \leq q < 1, \quad i = 1,...,N,$$

тогда

$$\|Ay_k - f\| \leq q^k \|Ay_0 - f\| \to 0.$$

Из последнего неравенства видно, что необходимое количество итераций $k$ для достижения нужной точности приближения $\varepsilon$ может увеличиваться при стремлении $q$ к 1, т. е. зависит от конкретного вида построенной матрицы $B$.

## Заключение

В настоящей работе исследованы интегро-дифференциальные параболические уравнения в многомерной области с граничными условиями первого рода. Методом энергетических неравенств для решения каждой задачи получены априорные оценки в разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи в норме $\|\cdot\|_1$ со скоростью $O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0.5$. Для случая $p = 1$ проведены численные расчеты тестовых примеров.

## Список литературы

[1] Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 111 с.

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[3] Краснов М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию. М.: Наука, 1975. 302 с.

[4] Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения // Итоги науки. Серия Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1964. С. 5–37.

[5] Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В. Конвективные облака: численные модели ирезультаты моделирования в естественных условиях и при активномвоздействии. Нальчик, 2008. 254 с.

[6] Коган Е.Л., Мазин И.П., Сергеев Б.Н., Хворостьянов В.И. Численное моделирование облаков. Гидрометеоиздат, 1984. 186 с.

[7] Berry E.X. Cloud droplet growth by collection // Journal of the Atmospheric Sciences. 1967. Vol. 24, № 6. Pp. 688–701.

[8] Berry E.X., Reinhardt R.L. An analysis of cloud drop growth by collection. Part I. Double distributions // Journal of the Atmospheric Sciences. 1974. Vol. 31, № 7. Pp. 1814–1824.

[9] Berry E.X., Reinhardt R.L. An analysis of cloud drop growth by collection. Part II. Single initial distributions // Journal of the Atmospheric Sciences. 1974. Vol. 31, № 7. Pp. 1825–1831.

[10] Grasselli M. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory // Progress in nonlinear differential equations and their applications. Basel: Birkhauser Verlag, 2002. Pp. 155–178.

[11] Бештокова З.В. К нелокальным краевым задачам для многомерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 107–122.

[12] Бештокова З.В. Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 3 (77). С. 5–12.

[13] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

[14] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.

[15] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.

**Образец цитирования**

Бештоков М.Х., Бештокова З.В. Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих первую краевую задачу для интегро-дифференциальных параболических уравнений в многомерной области // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 77–91. https://doi.org/10.26456/vtpmk661

### Сведения об авторах

1. **Бештоков Мурат Хамидбиевич**
ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

*Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А.*
*E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru*

2. **Бештокова Зарьяна Владимировна**
младший научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

*Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А.*
*E-mail: zarabaeva@yandex.ru*

# STABILITY AND CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEMES APPROXIMATING THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRAL-DIFFERENTIAL PARABOLIC EQUATIONS IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN

**Beshtokov M.K., Beshtokova Z.V.**
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Nalchik

*Received 17.03.2023, revised 09.07.2023.*

Integral-differential parabolic equations are studied in a multidimensional domain with boundary conditions of the first kind. For each problem, a difference scheme is constructed with the order of approximation $O(|h|^2 + \tau^{m_\sigma})$, where $m_\sigma = 1$ if $\sigma \neq 0.5$ and $m_\sigma = 2$, if $\sigma = 0.5$, an a priori estimate is obtained by the method of energy inequalities for solving the difference problem. The obtained estimates imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding original differential problem at a rate of $O(|h|^2 + \tau^2)$ for $\sigma = 0.5$.

**Keywords:** multidimensional problem, first boundary value problem, parabolic equation, integral equation, difference scheme, a priori estimate, stability and convergence of difference schemes.

## Citation

Beshtokov M.K., Beshtokova Z.V., "Stability and convergence of difference schemes approximating the first boundary value problem for integral-differential parabolic equations in a multidimensional domain", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 3, 77–91 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk661

## References

[1] Imanaliev M.I., *Nelinejnye integro-differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Nonlinear integro-differential partial differential equations]*, Ilim, Bishkek, 1992 (in Russian), 111 pp.

[2] Nakhushev A.M., *Uravneniya matematicheskoj biologii [Equations of mathematical biology]*, Vysshaya shkola, Moscow, 1995 (in Russian), 301 pp.

[3] Krasnov M.L., *Integralnye uravneniya: vvedenie v teoriyu [Integral equations: an Introduction to Theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 302 pp.

[4] Vajnberg M.M., "Integro-differentsialnye uravneniya", *Itogi nauki. Seriya Matematicheskij analiz. Teoriya veroyatnostej. Regulirovanie*, 1964, 5–37 (in Russian).

[5] Ashabokov B.A., Shapovalov A.V., *Konvektivnye oblaka: chislennye modeli irezultaty modelirovaniya v estestvennykh usloviyakh i pri aktivnomvozdejstvii [Convective clouds: numerical models simulation results under natural conditions and under active influence]*, Nalchik, 2008 (in Russian), 254 pp.

[6] Kogan E.L., Mazin I.P., Sergeev B.N., Khvorostyanov V.I., *Chislennoe modelirovanie oblakov*, Gidrometeoizdat, 1984 (in Russian), 186 pp.

[7] Berry E.X., "Cloud droplet growth by collection", *Journal of the Atmospheric Sciences*, **24**:6 (1967), 688–701.

[8] Berry E.X., Reinhardt R.L., "An analysis of cloud drop growth by collection. Part I. Double distributions", *Journal of the Atmospheric Sciences*, **31**:7 (1974), 1814–1824.

[9] Berry E.X., Reinhardt R.L., "An analysis of cloud drop growth by collection. Part II. Single initial distributions", *Journal of the Atmospheric Sciences*, **31**:7 (1974), 1825–1831.

[10] Grasselli M., "Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory", *Progress in nonlinear differential equations and their applications*, Birkhauser Verlag, Basel, 2002, 155–178.

[11] Beshtokova Z.V., "K nelokalnym kraevym zadacham dlya mnogomernogo parabolicheskogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 2, 107–122 (in Russian).

[12] Beshtokova Z.V., "A locally one-dimensional scheme for a general parabolic equation with a non-local source", *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN [Proceedings of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]*, 2017, № 3 (77), 5–12 (in Russian).

[13] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.

[14] Samarskij A.A., Gulin A.B., *Ustojchivost raznostnykh skhem [Stability of difference schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 415 pp.

[15] Faddeev D.K., Faddeeva V.N., *Vychislitelnye metody linejnoj algebry*, Fizmatgiz, Moscow, 1960 (in Russian), 656 pp.

## Author Info

1. **Beshtokov Murat Khamidbievich**
Leading Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

*Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.*
*E-mail:* beshtokov-murat@yandex.ru

2. **Beshtokova Zaryana Vladimirovna**
Junior Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

*Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.*
*E-mail: zarabaeva@yandex.ru*