Вестник ТвГУ. Серия "Физика". 2010. Выпуск 9. С. 71-74

УДК 530.145

МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПИНОВЫХ ФУНКЦИЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

В. Л. Скопич

Тверской государственный университет
кафедра теоретической физики

Найдена матрица перехода между базисными спиновыми функциями частицы со спином ½. Получено соотношение между фазами спиноров, проясняющее появление еще одного независимого параметра (кроме двух сферических углов, задающих произвольное направление $\vec{n}$).

Ключевые слова: *спиновая функция, спинор*

В работе [1] решается задача о нахождении матрицы преобразования компонент спинора при произвольном повороте системы координат. При этом элементы матрицы зависят от трех параметров. Возникает вопрос, почему при наличии трех соотношений для четырех комплексных элементов матрицы параметров три, а не два?

Зададимся целью построить матрицу преобразования при переходе от собственных функций оператора проекции спина электрона $\hat{S}_z$ на ось z к собственным функциям оператора проекции спина $\hat{S}_n \equiv \left(\hat{\vec{S}}, \vec{n}\right)$ на произвольную ось. Здесь $\hat{\vec{S}}$ – оператор спина электрона, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении произвольной оси. Поскольку направление произвольной оси задается в пространстве двумя углами θ и φ сферической системы координат, то и искомая матрица должна также определяться этими углами.

Решим задачу на определение собственных функций и собственных значений оператора $\hat{S}_n$:

$$\hat{S}_n \beta = \lambda \beta \tag{1}$$

где λ собственное значение, β - собственная функция, которая может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора $\hat{S}_z$:

$$\beta = c_1 \alpha_{\frac{1}{2}} + c_2 \alpha_{-\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\alpha_{\frac{1}{2}} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\alpha_{-\frac{1}{2}} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ – так называемые [2] спиновые функции, которые есть собственные функции оператора $\hat{S}_z$. Из условия нормировки $\langle \beta | \beta \rangle = 1$ следует, что $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

Поскольку $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули, то $\hat{S}_n \equiv \left(\hat{\vec{S}}, \vec{n}\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z\right)$, и, значит, левая часть равенства (1) есть

$$\hat{S}_n \beta = \left(\hat{\vec{S}}, \vec{n}\right)\left(c_1 \alpha_{\frac{1}{2}} + c_2 \alpha_{-\frac{1}{2}}\right) = c_1 \left(\hat{\vec{S}}, \vec{n}\right)\alpha_{\frac{1}{2}} + c_2 \left(\hat{\vec{S}}, \vec{n}\right)\alpha_{-\frac{1}{2}}$$

Запишем матрицы Паули в явном виде:

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Далее, установим действие матриц Паули на спиновые функции, непосредственно умножая матрицу на столбец:

$$\sigma_x \alpha_{\frac{1}{2}} = \alpha_{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_y \alpha_{\frac{1}{2}} = i\alpha_{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_z \alpha_{\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_x \alpha_{-\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_y \alpha_{-\frac{1}{2}} = -i\alpha_{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_z \alpha_{-\frac{1}{2}} = -\alpha_{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь мы в состоянии представить уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\hbar}{2}\left[\left(c_1 n_z + c_2 n_x - i c_2 n_y\right)\alpha_{\frac{1}{2}} + \left(c_1 n_x + i c_1 n_y - c_2 n_z\right)\alpha_{-\frac{1}{2}}\right] = \lambda c_1 \alpha_{\frac{1}{2}} + \lambda c_2 \alpha_{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

или, приравнивая коэффициенты при спиновых функциях $\alpha_{\frac{1}{2}}$ и $\alpha_{-\frac{1}{2}}$, получим линейную однородную систему относительно неизвестных c_1 и c_2:

$$\begin{aligned} c_1 n_z + c_2\left(n_x - i n_y\right) &= \lambda' c_1 \\ c_1\left(n_x + i n_y\right) - c_2 n_z &= \lambda' c_2 \qquad \lambda' \equiv \frac{2\lambda}{\hbar}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система имеет решение, если определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_z - \lambda' & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z - \lambda' \end{vmatrix} = 0 .$$

Отсюда $\lambda'^2 = n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2 = 1$, $\lambda'_{1,2} = \pm 1$. Или $\lambda_{1,2} = \pm \dfrac{\hbar}{2}$.

Пусть $\lambda = +\dfrac{\hbar}{2}$, т.е. электрон находится в состоянии $\beta = \beta_{\frac{1}{2}}$, в котором проекция $\vec{S}$ на $\vec{n}$ есть $\dfrac{\hbar}{2}$. Полагая в (3) $\lambda' = 1$ и учитывая, что $n_z = \cos\theta$, $n_\perp = \sin\theta$, $n_\perp e^{\pm i\varphi} = n_x \pm in_y$, можно найти c_1 и c_2.

Итак, $$\beta_{\frac{1}{2}} = \left(e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \alpha_{\frac{1}{2}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \alpha_{-\frac{1}{2}} \right) e^{i\alpha},$$ где α – произвольное вещественное число.

Аналогично, полагая $\lambda' = -1$, находим $$\beta_{-\frac{1}{2}} = \left(-e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \alpha_{\frac{1}{2}} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \alpha_{-\frac{1}{2}} \right) e^{i\alpha'}.$$

Обозначим искомую матрицу $U = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$, т.е.

$$\beta_{\frac{1}{2}} = c_{11}\alpha_{\frac{1}{2}} + c_{12}\alpha_{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \beta_{-\frac{1}{2}} = c_{21}\alpha_{\frac{1}{2}} + c_{22}\alpha_{-\frac{1}{2}} .$$

По соображениям, аналогичным изложенным в [1], справедливы соотношения

$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$, $c_{11} = c_{22}{}^*$, $c_{12} = -c_{21}{}^*$. Отсюда $\alpha + \alpha' = \varphi$.

Окончательно, имеем

$$U = \begin{Vmatrix} e^{-i(\varphi-\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\varphi-\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{Vmatrix},$$

где α – произвольное вещественное число.

Таким образом, как и в случае матрицы преобразования компонент спинора, мы получили, что элементы нашей матрицы зависят, помимо двух сферических углов, еще и от произвольного параметра α. Причина этого кроется в том, что сам спинор определен с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$, а таких базисных спиноров два, при чем их фазы связаны соотношением $\alpha + \alpha' = \varphi$.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 2005.
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 2004.

MATRIX OF TRANSITION BETWEEN BASIC SPIN FUNCTIONS OF A PARTICLE WITH 1/2 SPIN

V. L. Skopich

Tver State University
Chair of Theoretical Physics

Matrix of transition between basic spin functions of a particle with 1/2 spin has been found. A relation for the phases of spinors explaining the appearance of one more independent parameter in addition to two spherical angles specifying the arbitrary direction $\vec{n}$.

Keywords: *spin function, spinor*

Об авторах:

СКОПИЧ Виктор Леонидович – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики ТвГУ, *e-mail:* Victor.Skopich@tversu.ru.