ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.216.8,519.216.24

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ К СТОХАСТИЧЕСКИ НЕПРЕРЫВНОМУ ПРОЦЕССУ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Лаврентьев В.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 09.12.2023, после переработки 30.01.2024.

В работе изучается слабая сходимость семимартингалов, принимающих значения в Гильбертовом пространстве, к произвольному стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями. Получены достаточные условия слабой сходимости таких семимартингалов к стохастически непрерывному семимартингалу с независимыми приращениями.

Ключевые слова: семимартингал, гильбертово пространство, слабая сходимость, стохастически непрерывные процессы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 5–16.
https://doi.org/10.26456/vtpmk699

Введение

Липцер Р.Ш. и Ширяев А.Н. в [1, 2] исследовали достаточные условия слабой сходимости последовательности семимартингалов к произвольному стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями. Техника интегрирования по семимартингалам и стохастическим мерам позволила единообразно рассматривать как случай непрерывного, так и дискретного времени. В частности, эта «семимартингальная схема» включает в себя традиционную схему серий, исследованную во многих работах (см. библиографию в [1, 2]).

При обобщении этих результатов на бесконечномерный случай возникают не только технические, но и совершенно новые принципиальные трудности, которые, в основном, связаны с тем фактом, что ограниченные множества в бесконечномерных пространствах не являются, вообще говоря, компактными множествами. Важный шаг в преодолении этих трудностей при исследовании в гильбертовом пространстве связан с фундаментальной теоремой Ю.В.Прохорова [3], в которой были получены условия относительной компактности семейства распределений в терминах вторых моментов. Эти результаты послужили основой для вывода условий слабой сходимости распределений сумм независимых гильбертовозначных случайных величин к безгранично делимым распределениям, которые изучались рядом авторов.

Для гильбертовозначных мартингалов и семимартингалов известны необходимые и достаточные условия слабой сходимости к непрерывному гильбертовозначному мартингалу [4,5]. Целью данной работы является распространение результатов [1] на случай семимартингалов со значениями в Гильбертовом пространстве.

1. Основные определения и вспомогательные результаты

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ выделено неубывающее непрерывное справа семейство σ-алгебр $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ и $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ - семимартингал, принимающий значения в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$.

Обозначим через $\mu = \mu\,(dt, dx)$ *целочисленную случайную меру скачков семимартингала* X и $\nu = \nu(ds, dx)$ - ее *компенсатор* [6]:

$$\mu\,((0,t],\Gamma) = \sum_{0<s\leq t} I\,(\Delta X_s \in \Gamma)\,, \quad \Gamma \in \mathcal{B}\,(\mathbb{H}\setminus\{0\})\,,$$

где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств.

Напомним, что для гильбертовозначных семимартингалов справедливо следующее *каноническое разложение* [7]:

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + \int_0^t \int_{\|x\|\leq 1} x d(\mu - \nu) + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\,\mu\,(ds, dx)\,, \qquad (1)$$

где $B = (B_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ - предсказуемый процесс с локально интегрируемой вариацией, $M = (M_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ - непрерывный локальный мартингал, $\mu = \mu(ds, dx)$ - мера скачков семимартингала X и $\nu = \nu(ds, dx)$ - ее компенсатор.

Для гильбертовозначного процесса X для $i \geq 1$ через x_i будем обозначать действительные процессы, определяемые равенствами $(x_i)_t = (e_i, X_t)$, где $\{e_i\}$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, т.е. $X_t = ((x_1)_t, (x_2)_t, \cdots)$.

Тогда локально квадратично интегрируемому гильбертовозначному мартингалу M соответствует набор предсказуемых действительных процессов локально интегрируемой вариации $(< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}$ таких, что $m_i m_j - < m_i, m_j >$ - локальный мартингал; $< m_i > \equiv < m_i, m_i >$. Заметим [8], что

$$< M >_t = \sum_{i=1}^{\infty} < m_i >_t\,.$$

По аналогии с конечномерным случаем набор $(B, (< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}, \nu)$ будет называться *триплетом локальных характеристик семимартингала* X. Следует отметить, что этот триплет определяется по процессу X единственным образом.

Если семимартингал X является *стохастически непрерывным*, то его триплет будет *непрерывным*: $\mathbf{P}$-п.н. функции $(B_t)_{t\geq 0}, (< m_i, m_j >_t)_{t\geq 0}, i, j \geq 1$ непрерывны, а $\nu(\{t\}, \mathbb{H} \setminus 0) = 0, t > 0$.

Если семимартингал X является процессом *с независимыми приращениями*, то его триплет будет *детерминированным*.

Таким образом, если семимартингал X является *стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями*, то триплет $(B, (< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}, \nu)$ будет *детерминированным и непрерывным.*

Пусть S - непустое подмножество $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Для обозначения слабой сходимости конечномерных распределений X^n к конечномерным распределениям X, определяемых ограничениями на моменты времени из S, используется запись $X^n \xrightarrow{D_f(S)} X$.

Если $S = \mathbb{R}_+$, то пишем $X^n \xrightarrow{D_f} X$.

Слабую сходимость X^n к X в пространстве $(\mathbf{D}(\mathbb{H}), \mathcal{D})$ с топологией Скорохода будем обозначать $X^n \xrightarrow{D} X$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $X^n = (X^n_t, \mathcal{F}^n_t; \mathbb{H}), n \geq 1$ - семимартингалы с триплетами $(B^n, (< m_i, m_j >^n)_{i,j\geq 1}, \nu^n)$ и $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ - семимартингал с триплетом $(B, (< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}, \nu)$, являющийся стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями.*

Пусть выполнено условие

$$X^n_0 \xrightarrow{d} X_0. \tag{2}$$

a) Если для любых $t \in S \subset \mathbb{R}_+$ выполнены условия

$$B^n_t \xrightarrow{P} B_t, \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbf{P}(|< m^{n\epsilon}_i, m^{n\epsilon}_j >_t - < m_i, m_j >_t| > a) = 0,\ a > 0,\ i, j \geq 1; \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbf{P}(|< M^{n\varepsilon} >_t - < M >_t| > a) = 0,\ a > 0; \tag{5}$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f = f(x)$ равной нулю в некоторой окрестности нуля

$$\int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} f(x)\nu^n(ds, dx) \xrightarrow{P} \int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} f(x)\nu(ds, dx), \tag{6}$$

$$\nu(\mathbb{R}_+, \{\| x \| = 1\}) = 0; \tag{7}$$

$$\sup_{o<s\leq t} \nu^n(\{s\}, \{\| x \| > \varepsilon\}) \xrightarrow{P} 0,\ \varepsilon > 0,\ t \in \mathbb{R}_+; \tag{8}$$

то $X^n \xrightarrow{D_f(S)} X$.

b) Если условия (3),(4),(5),(6) и (7) выполнены для любых $t \in \mathbb{R}_+$, то $X^n \xrightarrow{D_f} X$.

c) Если для любых $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие

$$\sup_{o<s\leq t} \| B^n_s - B_s \| \xrightarrow{P} 0, \tag{9}$$

и условия (4),(5),(6) и (7), то $X^n \xrightarrow{D} X$.

Замечание 1. Для конечномерного пространства $\mathbb{H}$ условие (5) вытекает из условия (4).

Доказательство. В силу [9] распределение процессов $X^n, n \geq 1$, относительно компактны, поэтому для доказательства сходимости $X^n \xrightarrow{D} X$ достаточно показать сходимость конечномерных распределений ($X^n \xrightarrow{D_f} X$).

Для произвольного $k \geq 0$ и $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k < \infty$, $h_i \in \mathbb{H}, 0 \leq i \leq k$, рассмотрим процессы

$$Y_t^n = (h_0, X_0^n) + \sum_{i=1}^{k} (h_i, X_{t_i \wedge t}^n - X_{t_{i-1} \wedge t}^n), Y_t = (h_0, X_0) + \sum_{i=1}^{k} (h_i, X_{t_i \wedge t} - X_{t_{i-1} \wedge t}). \quad (10)$$

Так как в силу первой части теоремы 1 [9] конечномерные распределения процессов $X^n, n \geq 1$, относительно компактны, то для сходимости ($X^n \xrightarrow{D_f(S)} X$) (в частности, ($X^n \xrightarrow{D_f} X$)) достаточно [3] показать, что ($Y_T^n \xrightarrow{d} Y_T$) для любого $T \in S$ и $t_i \in S, 0 \leq i \leq k$. Для этого проверим, что для действительных семимартингалов $Y, Y^n, n \geq 1$, выполняются соответствующие условия теоремы 1 в [1] при $t = T$. Легко видеть, что достаточно проверить это для

$$Y^n = (h, X^n),\ Y = (h, X), h \in \mathbb{H}. \quad (11)$$

Заметим (подробнее см. [10]), что для любого $h \in \mathbb{H}$ существует $a \geq 1$ такое, что $\nu(\mathbb{R}_+, \{|(h, x)| = a\}) = 0$. Так как для любого $\alpha > 0$ сходимость $(h, X_T^n) \xrightarrow{d} (h, X_T)$ эквивалентна $(\alpha h, X_T^n) \xrightarrow{d} (\alpha h, X_T)$, то выбором $\alpha > 0$ можно добиться выполнения условий

$$\nu(\mathbb{R}_+, \{|(h, x)| = 1\}) = 0;\ \|h\| \leq 1, \quad (12)$$

которые далее будут предполагаться выполненными.

$Y, Y^n, n \geq 1$, - действительные семимартингалы, следовательно, они допускают канонические представления (1) с триплетами локальных характеристик $(\beta, < m >, \nu), (\beta^n, < m^n >, \nu^n), n \geq 1$.

С другой стороны, из соотношений (11), (1) получаем

$$Y_T^n = (h, X_0^n) + [(h, B_T^n) + \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)| \leq 1} (h, x)\, d\nu^n] + \quad (13)$$

$$+(h, M_T^{n1}) + \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)| \leq 1} (h, x)\, d(\mu^n - \nu^n) + \int_0^T \int_{|(h,x)|>1} (h, x)\, d\mu^n$$

$$Y_T = (h, X_0) + [(h, B_T) + \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)| \leq 1} (h, x)\, d\nu] + (h, M_T) + \quad (14)$$

$$+(h, M_T^d) + \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)| \leq 1} (h, x)\, d(\mu - \nu) + \int_0^T \int_{|(h,x)|>1} (h, x)\, d\mu.$$

Таким образом, согласно теореме 1 из [1] для сходимости $Y_T^n \xrightarrow{d} Y_T$ достаточно проверить выполнение следующих условий

$$(h, X_0^n) \xrightarrow{D} (h, X_0), \quad (15)$$

$$(h, B_T^n) \xrightarrow{P} (h, B_T), \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)|\leq 1} (h,x)\, d\nu^n \to \int_0^T \int_{\|x\|>1, |(h,x)|\leq 1} (h,x)\, d\nu \quad (16)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(| < (h, M^{n\epsilon}) >_T - < (h, M) >_T | > a) = 0, \ a > 0, \quad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(| < \int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon, |(h,x)|\leq\varepsilon} (h,x)\, d(\mu^n - \nu^n) > | > a) =$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(| \int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon, |(h,x)|\leq\varepsilon} (h,x)^2\, d\nu^n - \quad (18)$$

$$- \sum_{0<s\leq t} (\int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon, |(h,x)|\leq\varepsilon} (h,x) \nu^n(\{s\}, dx))^2 | > a\} = 0;$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f = f(x)$, равной нулю в некоторой окрестности нуля

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} f(y) d\nu^n \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f(y) d\nu, \quad (19)$$

$$\sup_{0<s\leq t} \nu^n(\{s\}, |y| > \varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \in (0,1], \ t \in \mathbb{R}_+. \quad (20)$$

Условие (15) и первое условие (16) согласно следствию 1 из теоремы 5.1 [11] вытекают из условий (2) и (3), соответственно.

Для проверки второго условия (16) рассмотрим множество непрерывных функций $f_\delta(x), |f_\delta(x)| \leq 1$ таких, что

$$f_\delta(x) I(\|x\| > 1 - \delta) I(|(h,x)| < 1 + \delta) = f_\delta(x),$$

$$f_\delta(x) I(\|x\| \geq 1) I(|(h,x)| \leq 1) = (h,x).$$

Введём также обозначения:

$$A_\delta = \{1 - \delta < \|x\| \leq 1\} \cup \{1 < |(h,x)| < 1 + \delta\},$$

$$B_\delta = \{1 < \|x\| < 1 + \delta\} \cup \{1 - \delta < |(h,x)| \leq 1\}, \quad (21)$$

$$D_\varepsilon = \{\|x\| > \varepsilon\} \cap \{|(h,x)| \leq \varepsilon\}, D \equiv D_1.$$

Тогда для любого $\eta > 0$

$$\mathbf{P}\{| \int_0^T \int_D (h,x) d\nu^n - \int_0^T \int_D (h,x) d\nu | > \eta\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\{| \int_0^T \int_{D\cup A_\delta} f_\delta(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{D\cup A_\delta} f_\delta(x) d\nu | > \frac{\eta}{3}\} + \quad (22)$$

$$+ \mathbf{P}\{ \int_0^T \int_{A_\delta} d\nu > \frac{\eta}{3}\} + \mathbf{P}\{ \int_0^T \int_{A_\delta} |f_\delta(x)| d\nu^n > \frac{\eta}{3}\}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $f_\delta^*(x)$, такую что

$$f_\delta^*(x) I(A_\delta \cup B_\delta) = f_\delta^*(x) \geq |f_\delta(x)| I(A_\delta).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{A_\delta} |f_\delta(x)| d\nu^n > \frac{\eta}{3}\} \le \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{A_\delta \cup B_\delta} d\nu > \frac{\eta}{6}\} + \tag{23}$$

$$+\mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{A_\delta \cup B_\delta} f_\delta^*(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{A_\delta \cup B_\delta} f_\delta^*(x) d\nu| > \frac{\eta}{6}\}.$$

Таким образом, в соответствии с (22) и (23), достаточно выбрать (в силу условия (6) и (12)) такое $\delta_0 = \delta_0(\eta)$, что

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{A_{\delta_0} \cup B_{\delta_0}} d\nu > \frac{\eta}{6}\} < \frac{\eta}{4}$$

и такое $n_0 = n_0(\eta)$, что

$$\sup_{n \ge n_0} \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{D \cup A_{\delta_0}} f_{\delta_0}(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{D \cup A_{\delta_0}} f_{\delta_0}(x) d\nu| > \frac{\eta}{3}\} < \frac{\eta}{4},$$

$$\sup_{n \ge n_0} \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{A_{\delta_0} \cup B_{\delta_0}} f_{\delta_0}^*(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{A_{\delta_0} \cup B_{\delta_0}} f_{\delta_0}^*(x) d\nu| > \frac{\eta}{6}\} < \frac{\eta}{4}.$$

Первое условие (17) вытекает из условий (4) и (5). Далее, так как

$$(\int_{D_\varepsilon} (h,x) \nu^n(\{s\}, dx))^2 \le \int_{D_\varepsilon} (h,x)^2 \nu^n(\{s\}, dx),$$

то для любого $a > 0$

$$\mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{D_\varepsilon} (h,x)^2 d\nu^n - \sum_{0<s\le t} (\int_{D_\varepsilon} (h,x) \nu^n(\{s\}, dx))^2| > a\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{D_\varepsilon} (h,x)^2 d\nu^n > \frac{a}{2}\}. \tag{24}$$

Рассмотрим непрерывную функцию $f_\varepsilon(x)$ такую, что

$$0 \le f_\varepsilon(x) \le \varepsilon \wedge \|x\|^2,\ f_\varepsilon(x) I(\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}) = f_\varepsilon(x) \ge ((h,x)^2 \wedge \varepsilon) I(\|x\| > \varepsilon).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{D_\varepsilon} (h,x)^2 d\nu^n > \frac{a}{2}\} \le \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon} f_\varepsilon(x) d\nu^n > \frac{a}{2}\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} (\|x\|^2 \wedge \varepsilon) d\nu^n > \frac{a}{4}\} + \tag{25}$$

$$+\mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} f_\varepsilon(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} f_\varepsilon(x) d\nu| > \frac{a}{4}\}.$$

Таким образом, фиксируя произвольное $\eta > 0$, выбираем $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ из соотношения (см. лемму в [7])

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} (\|x\|^2 \wedge \varepsilon) d\nu^n > \frac{a}{4}\} < \frac{\eta}{2}$$

и (в силу условия (6)) такое $n_0 = n_0(\eta)$, что

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}} f_\varepsilon(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}} f_\varepsilon(x) d\nu| > \frac{a}{4}\} < \frac{\eta}{2}.$$

Для проверки условия (19) заметим, что для любого

$$\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),\ \nu^*((0,t], \Gamma) = \int_{\mathbb{H}} I((h,x) \in \Gamma) \nu((0,t], dx)$$

(аналогично для ν^{n*} и ν^n), поэтому для любой действительной непрерывной ограниченной функции $f = f(y)$ в силу условия (6)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(y) \nu^{n*}(ds, dy) = \int_0^T \int_{\mathbb{H}\setminus\{(h,x)=0\}} f((h,x)) \nu^n(ds, dy) \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \int_0^T \int_{\mathbb{H}\setminus\{(h,x)=0\}} f((h,x)) \nu(ds, dy) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(y) \nu^*(ds, dy). \tag{26}$$

Условие (20) вытекает из условия (8) и следующего соотношения

$$\sup_{0<s\leq t} \nu^{n*}(\{s\}, |y| > \varepsilon) \leq \sup_{0<s\leq t} \nu(\{s\}, \|x\| > \frac{\varepsilon}{\|h\|}) \xrightarrow{P} 0.$$

Заметим, что в случае $S = \mathbb{R}_+$ (и $\nu^*(\{t\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$) условие (20), как показано в лемме 3 [1], вытекает из условия (19). Таким образом, теорема полностью доказана. □

3. Следствия и замечания

Следствие 1. Если X - непрерывный гауссовский мартингал с $X_0 = 0$, то $B = 0, \nu = 0$ и из теоремы 1 автоматически вытекает справедливость функциональных центральных предельных теорем для гильбертовозначных мартингалов [4] и семимартингалов [5].

Следствие 2. Если $X, X^n, n \geq 1$, являются однородными процессами с независимыми приращениями с $X_0 = 0, X_0^n = 0$, то, полагая

$$a^n = B_1^n, a = B_1, \lambda^n(dx) = \nu^n((0,1], dx), \lambda(dx) = \nu((0,1], dx)$$

и обозначая через $S^n, T^{n\varepsilon}$ S-операторы, определяемые равенствами

$$(S^n y, y) = \mathbf{E}(M_1^n, y)^2 =< (M^n, y) >_1,$$

$$(T^{n\varepsilon} y, y) = (S^n y, y) + \mathbf{E}(M_1^{nd\varepsilon}, y)^2 =< (M^{n\varepsilon}, y) >_1,$$

Заметим [12], что семейство S-операторов $S^n, n \geq 1$ называется компактным, если

$$\sup_n \sum_{i=1}^{\infty} (S^n e_i, e_i) < \infty, \ \lim_{m\to\infty} \sup_n \sum_{i=m}^{\infty} (S^n e_i, e_i) \longrightarrow 0 \tag{27}$$

Из теоремы 1 автоматически получаем условия слабой сходимости безгранично делимых распределений $\mu^n = (a^n, S^n, \lambda^n)$ к безгранично делимому распределению $\mu = (a, S, \lambda)$, которые изучались в работах [12, 13] и других.

Замечание 1. Условие (7) не является ограничительными, так как всегда можно найти такое $a > 1$, что $\nu(\mathbb{R}_+, \{\|x\| = a\}) = 0$ и тогда в условиях (3) и (9) достаточно положить $B^n \equiv B^{na}, B \equiv B^a$ (подробнее см. [1] и [10]). От этого условия можно отказаться (см. [1])), заменив условие (3), на

$$B_t^{*n} \xrightarrow{p} B_t^*, \tag{28}$$

где

$$B_t^{*n} = B_t^n + \int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} \frac{x}{1+\|x\|^2} - xI(\|x\| \leq 1) d\nu^n,$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} \frac{x}{1+\|x\|^2} - xI(\|x\| \leq 1) d\nu.$$

Следствие 3. Пусть $X_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_{nk}, \mathcal{F}_t^n = \sigma\{X_s^n, s \leq t\}, 0 \leq t \leq 1, \xi_{n0} = 0,$ (ξ_{nk}) - схема серий гильбертовозначных случайных величин $0 \leq k \leq n, n \geq 1$. Используя обозначение $\xi^a = \xi I(\|\xi\| \leq a)$, и полагая $\mathcal{F}_k^n = \mathcal{F}_t^n$ при $k = [nt]$, получаем следующее следствие из теоремы.

Пусть семимартингал X является стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями.
1) Если для $t \in S \subset [0,1]$ выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}(\xi_{nk}^1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{p} B_t; \tag{29}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\sum_{k=1}^{[nt]} (\mathbf{E}((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i)(\xi_{nk}^\varepsilon, e_j) | \mathcal{F}_{k-1}^n) - \tag{30}$$

$$-\mathbf{E}((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i)|\mathcal{F}_{k-1}^n)\mathbf{E}((\xi_{nk}^\varepsilon, e_j)|\mathcal{F}_{k-1}^n)) - \mathbf{E}(M_t, e_i)(M_t, e_j)| > a\} = 0, a > 0, i, j \geq 1;$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\sum_{k=1}^{[nt]} (\mathbf{E}(\|\xi_{nk}^\varepsilon\|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) - \tag{31}$$

$$-\|\mathbf{E}(\xi_{nk}^\varepsilon | \mathcal{F}_{k-1}^n)\|^2) - \mathbf{E}\|M_t^n\|^2| > a\} = 0, a > 0;$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f = f(x)$ равной нулю в некоторой окрестности нуля

$$\sum_{k=1}^{[nt]} (\mathbf{E}(f(\xi_{nk})|\mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{p} \int_0^t \int_{\mathbb{H}} f(x) d\nu; \tag{32}$$

$$\nu((0,1],\{\|x\|=1\})=0; \tag{33}$$

$$\sup_{1\le k\le n}\mathbf{P}\{\|\xi_{nk}\|>\varepsilon|\mathcal{F}^n_{k-1})\xrightarrow{p}0,\varepsilon>0, \tag{34}$$

то $X^n\xrightarrow{D_f(S)}X$.
2) Если условия (29)-(33) выполнены для любых $t\in[0,1]$, то $X^n\xrightarrow{D_f}X$.
3) Если для любого $t\in[0,1]$ выполнены условия (30)-(33) и

$$\sup_{0<s\le t}\|\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}(\xi^1_{nk}|\mathcal{F}^n_{k-1})-B_s\|\xrightarrow{p}0 \tag{35}$$

то $X^n\xrightarrow{D}X$.

Заключение

В этой работе доказаны достаточные условия слабой сходимости последовательности гильбертовозначных семимартингалов к стохастически непрерывному семимартингалу с независимыми приращениями. Эта семимартингальная схема включает в себя также традиционную схему серий, исследованную во многих работах. При $\mathbb{H}=\mathbb{R}$ эти условия совпадают с приведенными в работе [1].

Список литературы

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Математический сборник. 1981. Т. 116, № 3. С. 331–358.

[2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

[3] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Избранные труды. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. С. 148–232.

[4] Lavrentyev V.V., Nazarov L.V. A functional central limit theorem for Hilbert-valued martingales // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Vol. 37. Pp. 138–145. https://doi.org/10.1134/S1995080216020086

[5] Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Условия слабой сходимости гильбертовозначных семимартингалов к гауссовскому мартингалу // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 45–57.

[6] Лаврентьев В.В. О структуре гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 2. С. 13–19.

[7] Лаврентьев В.В. Каноническое представление гильбертовозначных семимартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 1. С. 123–130.

[8] Meyer P.A. Notes sur les integrales stochastiques. I Integrales Hilbertiennes // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Vol. 581. Pp. 446–462.

[9] Лаврентьев В.В., Бугримов А.Л. Условия компактности семейства мер гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 39–51.

[10] Jacod J., Mémin J. Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants // Lecture Notes in Mathematics. 1980. Vol. 784. Pp. 227–248.

[11] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.

[12] Varadhan S.R.S. Limit theorems for sums of independent random variables with values in a Hilbert space // Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A. 1962. Vol. 24, № 3. Pp. 213–238.

[13] Jajte R. On convergence of infinitely divisiable distributions in a Hilbert space // Colloquium Mathematicum. 1968. Vol. 19, № 2. Pp. 327–332.

Образец цитирования

Лаврентьев В.В. Слабая сходимость гильбертовозначных семимартингалов к стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 5–16. https://doi.org/10.26456/vtpmk699

Сведения об авторах

1. **Лаврентьев Виктор Владимирович**
научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: Lavrent@cs.msu.ru

WEAK CONVERGENCE OF HILBERT-VALUED SEMIMARTINGALES TO A STOCHASTICALLY CONTINUOUS PROCESS WITH INDEPENDENT INCREMENTS

Lavrentyev V.V.
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Received 09.12.2023, revised 30.01.2024.

The paper studies the weak convergence of semimartingales taking values in Hilbert space to an arbitrary stochastically continuous process with independent increments. Sufficient conditions for the weak convergence of such semimartingales to a stochastically continuous semimartingale with independent increments are obtained.

Keywords: semimartingale, Hilbert space, weak convergence, stochastically continuous processes.

Citation

Lavrentyev V.V., "Weak convergence of Hilbert-valued semimartingales to a stochastically continuous process with independent increments", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 1, 5–16 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk699

References

[1] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., "On weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments", *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **44**:3 (1983), 299–323.

[2] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., *Theory of martingales, Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. V. 49, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, 792 pp.

[3] Prokhorov Yu.V., "Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory", *Theory of Probability and its Applications*. V. 1, Torus Press, Moscow, 1956, 157–214.

[4] Lavrentyev V.V., Nazarov L.V., "A functional central limit theorem for Hilbert-valued martingales", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **37** (2016), 138–145, https://doi.org/10.1134/S1995080216020086.

[5] Lavrentyev V.V., Nazarov L.V., "Weak convergence to Gaussian martingale of semimartingales with values in Hilbert space", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 3, 45–57 (in Russian).

[6] Lavrentyev V.V., "On the structure of Hilbert-valued martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2010, № 2, 13–19 (in Russian).

[7] Lavrentyev V.V., "Canonical representation of Hilbert-valued semi-martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2011, № 1, 123–130 (in Russian).

[8] Meyer P.A., "Notes sur les integrales stochastiques. I Integrales Hilbertiennes", *Lecture Notes in Mathematics*, **581** (1977), 446–462.

[9] Lavrentyev V.V., Bugrimov A.L., "Compactness conditions for a family of measures of Hilbert-valued continuous semi-martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 39–51 (in Russian).

[10] Jacod J., Mémin J., "Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants", *Lecture Notes in Mathematics*, **784** (1980), 227–248.

[11] Billingsli P., *Convergence of probability measures*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (in Russian), 352 pp.

[12] Varadhan S.R.S., "Limit theorems for sums of independent random variables with values in a Hilbert space", *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **24**:3 (1962), 213–238.

[13] Jajte R., "On convergence of infinitely divisiable distributions in a Hilbert space", *Colloquium Mathematicum*, **19**:2 (1968), 327–332.

Author Info

1. **Lavrentyev Victor Vladimirovich**
Researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, Lomonosov MSU.
E-mail: Lavrent@cs.msu.ru