

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.62, 536.21

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЕ С УПОРЯДОЧЕННОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ¹

Зинина С.А., Попов А.И., Еремин А.В.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

Поступила в редакцию 20.01.2024, после переработки 01.03.2024.

В настоящей работе исследован процесс теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой. Рассмотрена краевая задача теплопереноса с симметричными граничными условиями первого рода с учетом зависимости эффективного коэффициента теплопроводности от температуры. При выводе дифференциального уравнения теплопереноса учитывалась также зависимость теплофизических свойств пористой среды от геометрических характеристик элементарных ячеек. Решение краевой задачи получено с использованием широко распространенных численных методов (метод конечных разностей, метод конечных элементов). В работе представлены графики распределения температуры и плотности теплового потока в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой в различных точках пространственной переменной в зависимости от значений коэффициента пористости. Выполнен анализ влияния геометрических характеристик пористой среды на распределение искомых функций.

Ключевые слова: упорядоченная макроструктура, трижды периодические минимальные поверхности (ТПМП) Шварца P , нелинейная задача теплопроводности, метод конечных разностей, метод конечных элементов, пористость, метод минимального репрезентативного объема.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 53–67.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk702>

Введение

Исследование теплофизических свойств пористых материалов и процессов тепло-массопереноса в них является важной задачей теоретической и инженерной теплофизики. Известно, что теплофизические свойства веществ зависят от температуры. При моделировании переноса тепла в твердых телах учет этой зависимости

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-79-10044).
© Зинина С.А., Попов А.И., Еремин А.В., 2024

приводит к существенному усложнению решаемых дифференциальных уравнений, однако позволяет приблизиться к описанию реальных процессов. Решению нелинейных задач теплопроводности посвящено большое количество научных работ. Так, в работах [1–4] авторами проведено исследование влияния неоднородности теплофизических свойств материалов на расчет температурных профилей, в некоторых случаях учет зависимости теплопроводности от температуры приводит к поправке в значениях до 11%.

При теоретическом моделировании процессов теплообмена возможно применение точных, численных и приближенных аналитических методов. Наибольшее распространение при исследовании нелинейных процессов теплопроводности получили численные и приближенно-аналитические методы. Так, работы [5–8] посвящены разработке приближенно-аналитических методов, позволяющих получать решения удовлетворительной точности во всем диапазоне времени. Однако, из анализа результатов, представленных в [9–11], следует что использование численных методов позволяет проводить анализ температурного состояния тел с меньшими вычислительными затратами.

Кроме того, практический интерес представляет изучение теплофизических характеристик, а также распределение температурных полей и теплового потока в пористых материалах, имеющих упорядоченную структуру, основанную на ТПМП. Связано это в первую очередь с возможностью изменения теплофизических свойств пористого материала. Например, изменяя геометрические характеристики элементарной ячейки, возможно варьирование значений коэффициента эффективной теплопроводности. Преимуществами пористых материалов, основанных на ТПМП, являются малый вес, высокая прочность, а также возможность варьирования термического сопротивления материала. Возможными областями применения таких материалов являются теплоэнергетика (теплоизоляция, теплообменные аппараты и др.), химическая промышленность и т.д. Исследованию теплофизических свойств пористых материалов, основанных на ТПМП, посвящено множество работ, например, [12–17], однако авторами данных исследований не учитывается влияние температуры на изменение коэффициента теплопроводности. В настоящей работе предлагается учитывать не только влияние геометрических параметров элементарной ячейки, но и влияние температуры на коэффициент эффективной теплопроводности пористого материала.

В настоящей работе рассматривается нелинейная задача теплопроводности в пористой стенке, структура которой основана на трижды периодических минимальных поверхностях (ТПМП) типа Шварца Р с толщиной стенки $2l$ (Рис.1).

1. Математическая постановка задачи

С целью осреднения теплофизических свойств материала в исследуемой области выполнена вычислительная «гомогенизация среды» на основе метода минимального репрезентативного объема [18].

Согласно данному методу применяется эффективный коэффициент теплопроводности λ_e вместо истинного значения. Коэффициент λ_e определяется следующей линейной зависимостью

$$\lambda_e = \frac{\pi}{2} \Delta \lambda_k, \quad (1)$$

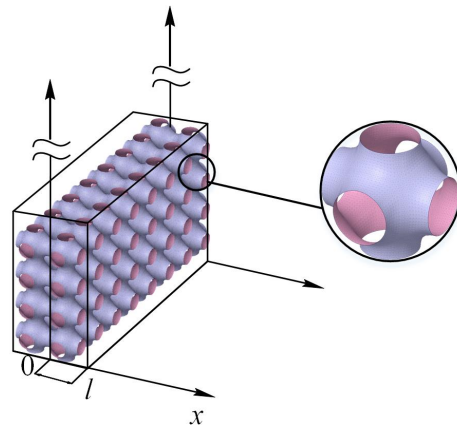


Рис. 1: Модель пористой пластины на основе ТПМП Шварца P

где λ_k – коэффициент теплопроводности материала твердотельного каркаса [19]; Δ – относительная толщина, $\Delta = \delta/b$; δ – толщина стенки ячейки; b – длина ребра куба, в который вписана ячейка.

Плотность пористого материала ρ_e определяется линейной зависимостью от пористости ϕ

$$\rho_e = \rho(1 - \phi), \tag{2}$$

где ρ - истинное значение плотности материала каркаса, из которого изготовлена пористая структура; ϕ - пористость, определяется в зависимости от геометрических параметров ячейки.

Пористость элементарной ячейки зависит от геометрических параметров самой ячейки (толщины δ и ребра куба b) и определяется следующим образом: выполняется серия вычислений в ПО «SpaceClaim», в ходе которых измеряется объем элементарной ячейки в зависимости от толщины δ при помощи функции «Mass Properties». Таким образом, пористость определяется выражением

$$\phi = 1 - \frac{V_{TPMS}}{V}, \tag{3}$$

где V_{TPMS} - объем элементарной ячейки; V – объем куба, в который вписана ячейка.

Аппроксимируя полученные результаты линейной функцией, получаем

$$\phi = -2.3298\Delta + 1. \tag{4}$$

Нелинейное одномерное уравнение теплопроводности в общем виде [7, 8, 20] будет:

$$c\rho \left(\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right). \tag{5}$$

При этом зависимость теплопроводности от температуры имеет вид

$$\lambda(T) = \lambda_0 [1 + \beta (T(x, \tau) - T_0)], \quad (6)$$

где λ_0 коэффициент теплопроводности при значении начальной температуры T_0 , принимается $\lambda_0 = \lambda_e$; β – коэффициент, определяемый опытным путем, принимается равным $\beta = 0.01$

С учетом (1), выражение (6) примет вид

$$\lambda(T) = \frac{\pi \delta}{2b} \lambda_k^0 [1 + \beta (T(x, \tau) - T_0)] = \lambda_e^0 [1 + \beta (T(x, \tau) - T_0)], \quad (7)$$

где λ_e^0 – коэффициент эффективной теплопроводности при начальной температуре T_0 .

С учетом выражений (7) математическая постановка задачи принимает вид (Рис.2)

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_e^0 \beta}{c\rho(1-\phi)} \left(\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda_e^0}{c\rho(1-\phi)} [1 + \beta (T(x, \tau) - T_0)] \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$(\tau > 0; 0 < x < l);$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (9)$$

$$T(l, 0) = T_{ст}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

где $T_{ст}$ – температура стенки; T_0 – начальная температура.

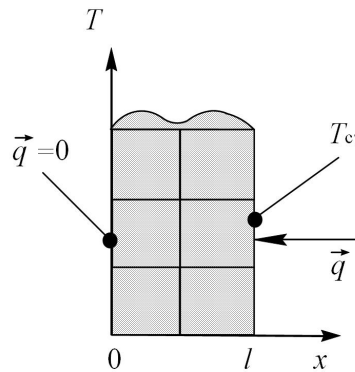


Рис. 2: Схема теплообмена

Учитывая выражения (7), а также геометрические характеристики элементарной ячейки Шварца Р возможно получить выражение для определения плотности

теплового потока q . Согласно закону Фурье, плотность теплового потока с учетом нелинейности задачи определяется в следующем виде:

$$q = -\lambda_e^0 [1 + \beta (T(x, \tau) - T_0)] \text{grad}T. \quad (12)$$

2. Численное решение задачи

Решение краевой задачи (8)–(11) находится методом конечных разностей [21–23]. Согласно данному методу вводится пространственно – временная сетка с шагами по пространственной координате Δx и по времени $\Delta \tau$. При этом

$$x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{0, I}; \quad \tau_k = k\Delta \tau, \quad k = \overline{0, K}, \quad (13)$$

где I, K – число шагов по пространственной и временной координатам соответственно.

На принятой пространственно-временной сетке (13) вводятся сеточные функции $T_i^k = T(x_i, \tau_k)$. В ходе применения явной схемы аппроксимации дифференциальных операторов математическая постановка задачи (8)–(11) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} = & \frac{\lambda_e^0 \beta}{c\rho(1 - \phi)} \left(\frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right)^2 + \\ & + \frac{\lambda_e^0}{c\rho(1 - \phi)} [1 + \beta (T_i^k - T_0)] \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$T_i^0 = T_0; \quad (15)$$

$$T_I^k = T_{\text{ст}}; \quad (16)$$

$$\frac{T_I^k - T_0^k}{\Delta x} = 0. \quad (17)$$

3. Численное моделирование

Для верификации решения, полученного методом конечных разностей, было выполнено численное решение поставленной задачи методом конечных элементов в модуле Transient Thermal программного комплекса ANSYS.

Согласно методу минимального репрезентативного объема [18], в исходной геометрии выделяется такой объем, который дает представление о свойствах (теплофизических, механических и др.) всего материала. На Рис. 3 изображена схема минимального репрезентативного объема для решаемой задачи.

В исследуемой геометрии можно выделить два характерных параметра: b – длина ребра куба, в который вписана ТППП ячейка, и δ – толщина стенки ячейки. Варьируя данными параметрами, можно изменять как пористость ϕ , так и относительную толщину Δ .

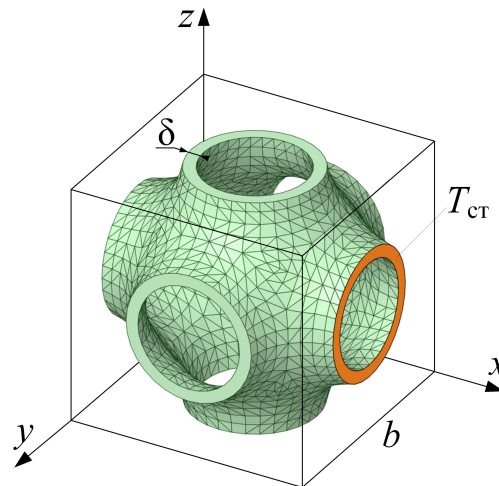


Рис. 3: Расчетная геометрия

В соответствии с задачей (8)–(11) на одной из граней исследуемой ячейки задается граничное условие первого рода $T_{ст}$, а на всех остальных – отсутствие теплообмена. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры устанавливается в соответствии с выражением (7). Конечно–элементная сетка для решения задачи в ANSYS Thermal изображена на Рис. 4 и состоит из 4 млн. элементов. Из анализа графика сеточной сходимости (Рис. 4) можно заключить, что данного количества элементов достаточно для получения решения с погрешностью, не превышающей 1-2%.

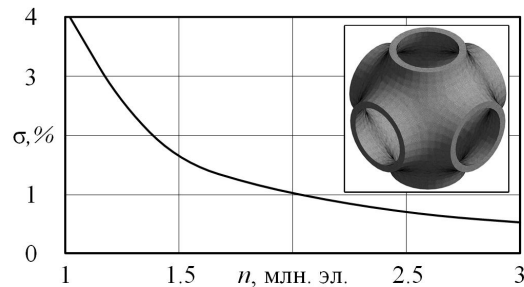


Рис. 4: Сеточная сходимість

В результате решения задачи методом конечных элементов были получены контуры распределения температуры в исследуемой ячейке (см. Рис. 5), а также графики изменения температуры по координате (Рис. 6).

4. Результаты

На Рис. 6 представлено решение нелинейной задачи теплопроводности в по-

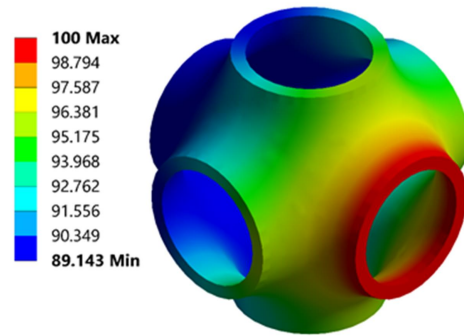


Рис. 5: Контуры распределения температуры в элементарной ячейке Шварца Р

ристой плоской пластине при толщине стенки 0.01 м. Температура в начальный момент времени принимается равной $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, температура на поверхности пластины – $T_{ст} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Пористая пластина состоит из элементарных ячеек типа Шварца Р и изготовлена из пластика PETG с использованием FDM – печати (от англ. Fused Deposition Modeling). Свойства данного пластика приняты согласно [19]: теплоемкость – 1050 Дж/кгК; плотность – 1300 кг/м³; теплопроводность – 0,2 Вт/(мК). На Рис. 6 сравниваются решения, полученные методом конечных разностей и методом конечных элементов. Из анализа Рис. 6 следует, что расхождение результатов не превышает 3%.

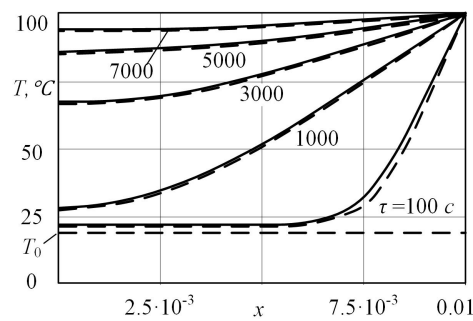


Рис. 6: Распределение температуры по координате: сплошная линия – МКР, пунктир – МКЭ (Ansys)

На Рис. 7 представлены графики распределения плотности теплового потока по ширине пластины при различных значениях пористости в момент времени $\tau = 5000 \text{ с}$. Из анализа рисунка следует, что при увеличении пористости плотность теплового потока снижается во всех точках пространственной переменной. Например, плотность теплового потока на поверхности пластины снижается с $q = 12.3 \text{ Вт/(мК)}$ при $\phi = 0.76$ до $q = 3.7 \text{ Вт/(мК)}$ при $\phi = 0.93$. Таким образом, задавая значение ϕ , можно определить количество тепла, протекающее через пористую пластину. Соотношение (4) позволяет оценить влияние геометрических характе-

ристик элементарной ячейки (толщина стенки ячейки; длина ребра куба, в который вписана ячейка) на пористость, а, следовательно, и на значение q . Используя полученное решение, можно подобрать такие параметры пористой среды (δ и b), которые обеспечат требуемый тепловой поток через пористую пластину. Стоит отметить, что существует некий предел допустимой толщины стенки, при достижении которого происходит структурное разрушение твердотельного каркаса (наплыв граней, разрыв фасетов и т.д.). Для ТПМП Шварца Р со стороной $b = 0.01$ м диапазон толщины поры составляет $0.0001 < \delta < 0.001$ м, что соответствует значениям пористости в диапазоне $0.76 < \phi < 0.98$.

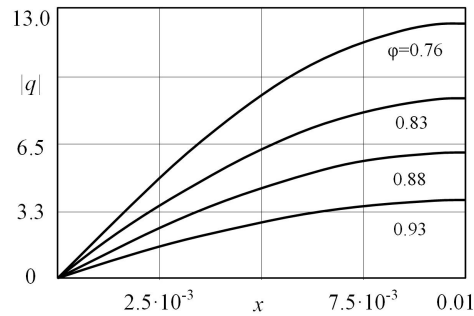


Рис. 7: Распределение плотности теплового потока в пористой пластине при $\tau = 5000$ с)

Заключение

1. Рассмотрена краевая задача теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой. Получены графики распределения температурных кривых по пространственной координате, а также контуры распределения температуры в элементарной ячейке. Выполнен сравнительный анализ результатов, полученных МКР и МКЭ. Расхождение между результатами не превышает 3 %.
2. Установлена зависимость плотности теплового потока, протекающего через пористую пластину, основанную элементарными ячейками Шварца Р, от пористости. Из анализа полученной зависимости следует, что, варьируя значение пористости возможно корректировать величину теплового потока, протекающего через пластину. Установлена зависимость влияния геометрических характеристик элементарных ячеек на распределение плотности теплового потока.

Список литературы

- [1] Зельдович Я.Б., Компанец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. 1950.
- [2] Брыков Н.А. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 5-3 (47). С. 52–55.
- [3] Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
- [4] Фомин В.Г. Математическое моделирование нелинейной задачи теплопроводности для двухсвязной пластинки переменной толщины // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2019. № 5. С. 264–267.
- [5] Кудряшов Н.А. Приближенные решения одной задачи нелинейной теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 2044–2051.
- [6] Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
- [7] Еремин А.В. Об одном методе решения нелинейных задач теплопроводности // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2018. № 3.
- [8] Кудинов И.В., Радченко В.П. Получение аналитических решений нелинейных задач теплопроводности на основе введения дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2010. № 1 (20).
- [9] Дилевская Е.В., Станкевич И. В., Попков-Мелентьев А.А. Численное решение нелинейных задач теплопроводности // Вестник Международной академии холода. 2009. № 2.
- [10] Есьман Р.И., Устимович В.А. Численное решение задачи нестационарной теплопроводности в многослойных телах // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2007. № 6. С. 32–36.
- [11] Лабинский А.Ю. Использование метода конечных разностей для расчета нестационарной теплопроводности // Надзорная деятельность и судебная экспертиза в системе безопасности. 2021. № 2. С. 29–34.
- [12] Zhou Z. Effective Thermal Conductivity and Heat Transfer Characteristics of a Series of Ceramic Triply Periodic Minimal Surface Lattice Structure // Advanced Engineering Materials. 2023. Vol. 25, № 17. ID 2300359.

- [13] Tang D. Effects of porosity on effective thermal conductivities of thermal insulation SiC sandwich panels with Schoen-gyroid structure // *Ceramics International*. 2023.
- [14] Catchpole-Smith S. Thermal conductivity of TPMS lattice structures manufactured via laser powder bed fusion // *Additive Manufacturing*. 2019. Vol. 30. ID 100846.
- [15] Andrianov I.V., Kalamkarov A.L., Starushenko G.A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section // *Composites Part B: Engineering*. 2013. Vol. 50. Pp. 44–53.
- [16] Bragin D.M. Experimental Study of Effective Thermal Conductivity of Materials Based on TPMS // *5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2023. Pp. 983–985.
- [17] Selvakumar A., Mohanram P.V. Analysis of effective thermal conductivity for mineral cast material structures with varying epoxy content using TPS method // *Materials Research*. 2013. Vol. 16. Pp. 315–321.
- [18] Брагин Д.М., Еремин А.В., Попов А.И., Шульга А.С. Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(R) // *Вестник Ивановского государственного энергетического университета*. 2023. № 2. С. 61–68.
- [19] Попов А.И. Определение эффективного коэффициента теплопроводности пористого материала с упорядоченной структурой, основанной на ТППП I-WP // *Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности*. 2022. Т. 7, № 3.
- [20] Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I // *Математический сборник*. 1982. Т. 118, № 3. С. 291–322.
- [21] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие*. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
- [22] Гадиева С.С., Гахраманов П.Ф. Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений теплопереноса // *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки*. 2017. Т. 32, № 4. С. 38–46.
- [23] Карпович Д.С. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности // *Труды БГТУ. Серия 3: Физико-математические науки и информатика*. 2015. № 6 (179). С. 122–127.

Образец цитирования

Зинина С.А., Попов А.И., Еремин А.В. Численное решение нелинейной задачи теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 53–67. <https://doi.org/10.26456/vtprmk702>

Сведения об авторах**1. Зинина Софья Алексеевна**

ассистент кафедры промышленной теплоэнергетики Самарского государственного технического университета.

Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, СамГТУ.

E-mail: sofazinina4@gmail.com

2. Попов Андрей Игоревич

старший преподаватель кафедры промышленной теплоэнергетики Самарского государственного технического университета.

Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, СамГТУ.

E-mail: pixinot@icloud.com

3. Еремин Антон Владимирович

заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики Самарского государственного технического университета.

Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, СамГТУ.

E-mail: eremin.av@samgtu.ru

NUMERICAL SOLUTION OF THE NONLINEAR PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY IN A POROUS PLATE WITH AN ORDERED MACROSTRUCTURE

Zinina S.A., Popov A.I., Eremin A.V.
Samara State Technical University, Samara

Received 20.01.2024, revised 01.03.2024.

In this paper, the process of thermal conductivity in a porous plate with an ordered macrostructure is investigated. The boundary value problem of heat transfer with symmetric boundary conditions of the first kind is considered, taking into account the dependence of the effective coefficient of thermal conductivity on temperature. When deriving the differential equation of heat transfer, the dependence of the thermophysical properties of the porous medium on the geometric characteristics of the elementary cells was also taken into account. The solution of the boundary value problem was obtained using widely used numerical methods (finite difference method, finite element method). The paper presents graphs of the distribution of temperature and heat flux density in a porous plate with an ordered macrostructure at various points of a spatial variable depending on the values of the porosity coefficient. The analysis of the influence of the geometric characteristics of a porous medium on the distribution of the desired functions is performed.

Keywords: ordered macrostructure, thrice periodic minimum surfaces (TPMS) Schwarz P, nonlinear thermal conductivity problem, finite difference method, finite element method, porosity, minimum representative volume method.

Citation

Zinina S.A., Popov A.I., Eremin A.V., “Numerical solution of the nonlinear problem of thermal conductivity in a porous plate with an ordered macrostructure”, *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 1, 53–67 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk702>

References

- [1] Zeldovich Ya.B., Kompaneets A.S., “On the theory of heat propagation with temperature-dependent thermal conductivity”, *Sbornik, posvyashchennyj semidesyatiletiyu akademika A. F. Ioffe [Collection dedicated to the seventieth anniversary of Academician A. F. Ioffe]*, 1950 (in Russian).
- [2] Brykov N.A., “Solving the nonlinear non-stationary problem of thermal conductivity”, *Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International Scientific Research Journal]*, 2016, № 5-3 (47), 52–55 (in Russian).

- [3] Rubina L.I., Ulyanov O.N., “On a method for solving the equation of nonlinear thermal conductivity”, *Sibirskij matematicheskij zhurnal [Siberian Mathematical Journal]*, **53**:5 (2012), 1091–1101 (in Russian).
- [4] Fomin V.G., “Mathematical modeling of a nonlinear thermal conductivity problem for a two-connected plate of variable thickness”, *Tekhnicheskoe regulirovanie v transportnom stroitelstve [Technical regulation in transport construction]*, 2019, № 5, 264–267 (in Russian).
- [5] Kudryashov N.A., “Approximate solutions to a problem of nonlinear thermal conductivity”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **45**:11 (2005), 2044–2051 (in Russian).
- [6] Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F., “On a boundary value problem with degeneracy for a nonlinear heat equation in spherical coordinates”, *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences]*, **20**:1 (2014), 119–129 (in Russian).
- [7] Eremin A.V., “On a method for solving nonlinear problems of thermal conductivity”, *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Tambov State Technical University]*, 2018, № 3 (in Russian).
- [8] Kudinov I.V., Radchenko V.P., “Obtaining analytical solutions to nonlinear thermal conductivity problems based on the introduction of additional boundary conditions”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki» [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*, 2010, № 1 (20) (in Russian).
- [9] Dilevskaya E.V., Stankevich I. V., Popkov-Melentev A.A., “Numerical solution of nonlinear thermal conductivity problems”, *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii kholoda [Bulletin of the International Academy of Cold]*, 2009, № 2 (in Russian).
- [10] Esman R.I., Ustimovich V.A., “Numerical solution of the problem of nonstationary thermal conductivity in multilayer bodies”, *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij i energeticheskikh obedinenij SNG [Energy. News of higher educational institutions and energy associations of the CIS]*, 2007, № 6, 32–36 (in Russian).
- [11] Labinskij A.Yu., “Using the finite difference method to calculate non-stationary thermal conductivity”, *Nadzornaya deyatelnost i sudebnaya ekspertiza v sisteme bezopasnosti [Supervisory activities and forensic examination in the security system]*, 2021, № 2, 29–34 (in Russian).
- [12] Zhou Z., “Effective Thermal Conductivity and Heat Transfer Characteristics of a Series of Ceramic Triply Periodic Minimal Surface Lattice Structure”, *Advanced Engineering Materials*, **25**:17 (2023), 2300359.
- [13] Tang D., “Effects of porosity on effective thermal conductivities of thermal insulation SiC sandwich panels with Schoen-gyroid structure”, *Ceramics International*, 2023.

- [14] Catchpole-Smith S., “Thermal conductivity of TPMS lattice structures manufactured via laser powder bed fusion”, *Additive Manufacturing*, **30** (2019), 100846.
- [15] Andrianov I.V., Kalamkarov A.L., Starushenko G.A., “Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section”, *Composites Part B: Engineering*, **50** (2013), 44–53.
- [16] Bragin D.M., “Experimental Study of Effective Thermal Conductivity of Materials Based on TPMS”, *5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, 2023, 983–985.
- [17] Selvakumar A., Mohanram P.V., “Analysis of effective thermal conductivity for mineral cast material structures with varying epoxy content using TPS method”, *Materials Research*, **16** (2013), 315–321.
- [18] Bragin D.M., Eremin A.V., Popov A.I., Shulga A.S., “Method for determining the coefficient of effective thermal conductivity of a porous material based on a minimum surface of the Schoen’s I-WP(R) type”, *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta [Bulletin of the Ivanovo State Energy University]*, 2023, № 2, 61–68 (in Russian).
- [19] Popov A.I., “Determination of the effective thermal conductivity coefficient of a porous material with an ordered structure based on TPMP I-WP”, *International Journal of Information Technology and Energy Efficiency*, **7:3** (2022) (in Russian).
- [20] Galaktionov V.A., Samarskij A.A., “Methods for constructing approximate self-similar solutions of nonlinear equations of thermal conductivity. I”, *Matematicheskij sbornik [Mathematical collection]*, **118:3** (1982), 291–322 (in Russian).
- [21] Amosov A.A., Dubinskij Yu.A., Kopchenova N.V., *Computational methods for engineers: Textbook*, Higher School Publ., Moscow, 1994 (in Russian), 544 pp.
- [22] Gadieva S.S., Gakhramanov P.F., “Application of finite difference methods for solving model equations of heat and mass transfer”, *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki [Bulletin of Dagestan State University. Series 1: Natural Sciences]*, **32:4** (2017), 38–46 (in Russian).
- [23] Karpovich D.S., “Analytical and numerical methods for solving the thermal conductivity equation”, *Trudy BGTU. Seriya 3: Fiziko-matematicheskie nauki i informatika [The works of BSTU. Series 3: Physical and Mathematical Sciences and Computer Science]*, 2015, № 6 (179), 122–127 (in Russian).

Author Info

1. Zinina Sofya Alekseevna

Assistant at the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University.

Russia, 443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244, SSTU.

E-mail: sofazinina4@gmail.com

2. Попов Андрей Игоревич

Senior Lecturer at the Department of Industrial Thermal Power Engineering,
Samara State Technical University.

Russia, 443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244, SSTU.

E-mail: pixinot@icloud.com

3. Eremin Anton Vladimirovich

Head of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State
Technical University.

Russia, 443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244, SSTU.

E-mail: eremin.av@samgtu.ru