УДК 519.2

ФОРМУЛА ДЛЯ ПРЕДЕЛА НОРМИРОВАННОЙ РАЗНОСТИ МОЩНОСТЕЙ КРИТЕРИЕВ В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

Королев Р.А.
Кафедра математической статистики,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Поступила в редакцию 20.01.2010, после переработки 22.01.2010.

В работе доказывается формула для предела нормированной разности мощностей наилучшего критерия и асимптотически оптимального критерия в случае распределения Лапласа (см. Теорема 2.4). При этом асимптотически оптимальный критерий основан на знаковой статистике с решетчатым распределением, в то время как для логарифма отношения правдоподобия выполняется аналог условия Крамера (C), поэтому непосредственное применение общей Теоремы 3.2.1 работы [1] невозможно. В работе используется комбинированный метод, основанный на сходимости условных моментов и асимптотических разложениях.

In the paper we prove a formula for the limit of the normalized difference between the power of the asymptotically most powerful test and the power of the asymptotically optimal test for the case of Laplace distribution. The asymptotically optimal test is based on the sign statistic which has a lattice distribution, and an analog of Cramér's (C) condition is valid for the logarithm of the likelihood ratio. Thereby we can not use the main formula 3.2.1 from [1] directly. In this paper we suggest a combined method based on the convergence of the conditional moments and on the asymptotic expansions.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, решетчатая статистика, функция мощности, условный момент, распределение Лапласа.
Keywords: asymptotic expansion, lattice statistic or distribution, power function, conditional moment, Laplace or double exponential distribution.

1. Введение

В работе исследуется формула для предела нормированной разности мощностей критериев в случае распределения Лапласа (см. Теорему 3.2.1 работы [1]). Следуя работам [2] и [3], рассмотрим задачу проверки простой гипотезы

$$\mathsf{H}_0 : \theta = 0 \tag{1.1}$$

против последовательности сложных близких альтернатив вида

$$\mathsf{H}_{n,1} : \theta \;=\; \frac{t}{\sqrt{n}}, \;\; 0 \,<\, t \,\leq\, C, \;\; C \,>\, 0, \tag{1.2}$$

на основе выборки $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$, являющейся элементом выборочного пространства $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ и состоящей из независимых и одинаково распределенных наблюдений с плотностью

$$p(x, \theta) \;=\; \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad x, \; \theta \,\in\, \mathsf{R}^1.$$

Обозначим через $\mathsf{P}_{n,0}$ и $\mathsf{P}_{n,1}$ распределения $\mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$ при гипотезе H_0 и альтернативе $\mathsf{H}_{n,1}$, соответственно, плотности распределений выборки будем обозначать $p_{n,0}(x)$ и $p_{n,1}(x)$.

В работе [3] с помощью асимптотических разложений была доказана формула для предела отклонения мощности асимптотически оптимального критерия, основанного на статистике

$$S_n \;=\; \frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} sign(X_i) \;-\; \frac{t^2}{2}, \tag{1.3}$$

от мощности наилучшего критерия, основанного на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \big(|X_i| - |X_i - tn^{-1/2}|\big). \tag{1.4}$$

При этом для получения асимптотического разложения для мощности асимптотически оптимального критерия была использована работа [4] (см. Лемму 3.5.1 работы [4], стр. 56).

Однако применение результатов работы [4] ограничивается лишь случаем биномиального распределения статистики S_n с точностью до линейного преобразования. В любом другом случае, в котором асимптотически оптимальный критерий основан на решетчатой статистике с распределением, отличным от биномиального, работу по построению асимптотического разложения его мощности приходится начинать с начала.

В настоящей работе доказательство формулы для предела нормированной разности мощностей критериев в случае распределения Лапласа (см. (2.6)) устраняет этот недостаток. Техника для работы с решетчатыми случайными величинами из фундаментальной работы [7] адаптируется к схеме доказательства Теоремы 3.2.1 работы [1]. Заметим, что последняя Теорема не может непосредственно быть применена к случаю распределения Лапласа, поскольку достаточное условие 3 (ii) – аналог условия Крамера (C) – не выполняется для решетчатой статистики S_n. Поэтому Лемма 3.4.4 из работы [1] (в настоящей работе Лемма 3.7) полностью пересматривается и доказывается только для точек разрыва функции распределения S_n (см. (3.14)). Также потребовала изменений Лемма 3.5.1 работы [1] (в настоящей работе Лемма 3.4), были построены вспомогательные Леммы, справедливые в случае распределения Лапласа. При этом к логарифму отношения правдоподобия Λ_n по-прежнему применяются теоремы об асимптотических разложениях функций распределения при гипотезе и альтернативе из работы [5].

2. Формула для разности мощностей критериев

В этом разделе докажем формулу для предела разности мощностей критериев в случае распределения Лапласа.

Рассмотрим последовательность критериев

$$\Psi_n^*(\Lambda_n) = \begin{cases} 0, & \Lambda_n < c_n, \\ \gamma_n^*, & \Lambda_n = c_n, \\ 1, & \Lambda_n > c_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

основанную на последовательности Λ_n (см. (1.4)), и последовательность критериев

$$\Psi_n(S_n) = \begin{cases} 0, & S_n < \bar{d}_n, \\ \gamma_n, & S_n = \bar{d}_n, \\ 1, & S_n > \bar{d}_n, \end{cases} \tag{2.2}$$

основанную на последовательности S_n (см. (1.3)), уровня α, $\alpha \in (0,1)$, так что

$$\mathsf{E}_{n,0}\Psi_n^*(\Lambda_n) = \mathsf{E}_{n,0}\Psi_n(S_n) = \alpha + o(\tau_n^2), \tag{2.3}$$

где $\tau_n \equiv n^{-1/4}$, а $\mathsf{E}_{n,0}$ и $\mathsf{E}_{n,1}$ математические ожидания по отношению к $\mathsf{P}_{n,0}$ и $\mathsf{P}_{n,1}$, соответственно.

Обозначим через

$$\beta_n^* = \mathsf{E}_{n,1}\Psi_n^*(\Lambda_n), \tag{2.4}$$

$$\beta_n = \mathsf{E}_{n,1}\Psi_n(S_n) \tag{2.5}$$

мощности соответствующих критериев.

Докажем, что в случае распределения Лапласа справедлива формула для предела разности мощностей критериев r в терминах условной дисперсии

$$r \equiv \lim_{n\to\infty} \tau_n^{-2}(\beta_n^* - \beta_n) = \frac{1}{2}e^b \mathsf{D}[\Delta \mid \Lambda = b]p(b), \tag{2.6}$$

где Δ и Λ – случайные величины, такие что

$$\mathcal{L}((\tau_n^{-1}\Delta_n, \Lambda_n) \mid \mathsf{H}_0) \to \mathcal{L}(\Delta, \Lambda), \tag{2.7}$$

$$\Delta_n = \begin{cases} 0, & S_n = \Lambda_n = +\infty, \\ S_n - \Lambda_n, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$b = \Phi_1^{-1}(1-\alpha). \tag{2.9}$$

Здесь $\Phi_1(x)$ обозначает предельную функцию распределения случайных величин Λ_n при гипотезе H_0 (см. (1.1)), $p(x)$ – ее функция плотности.

Учитывая, что в случае распределения Лапласа плотности $p_{n,0}(x)$, $p_{n,1}(x)$ не обращаются в ноль, т.е.

$$p_{n,0}(x) > 0, \quad p_{n,1}(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}_n, \tag{2.10}$$

имеем из (1.3) и (1.4) для любого n

$$|S_n| < \infty, \quad |\Lambda_n| < \infty.$$

Тогда (2.8) запишется с точностью до множеств меры ноль (см. (3.4) работы [2])

$$\Delta_n = S_n - \Lambda_n = -\frac{t^2}{2} - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - tn^{-1/2})\mathbf{1}_{[0,tn^{-1/2}]}(X_i). \tag{2.11}$$

Из Лемм 2.1 и 3.1 работы [2] имеем

$$\mathcal{L}(\Lambda_n \mid \mathsf{H}_0) \to \mathcal{N}\Big(-\frac{t^2}{2}, t^2\Big), \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}((\tau_n^{-1}\Delta_n, \Lambda_n) \mid \mathsf{H}_0) \to \mathcal{N}_2\Big(0, \frac{2t^3}{3}, 0, -\frac{t^2}{2}, t^2\Big), \tag{2.13}$$

где $\mathcal{N}_2$ - двумерный нормальный закон с соответствующими параметрами.

Тогда требуется доказать, что (2.9) и (2.6) вычисляются по формулам

$$b = tu_\alpha - \frac{t^2}{2}, \quad r = \frac{t^2}{3}\varphi(u_\alpha - t),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(x)$ – его плотность, $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Для этого рассмотрим свойства статистик S_n и Λ_n в случае распределения Лапласа. Из Леммы 3.2 работы [3] следует

Лемма 2.1. *В случае распределения Лапласа для $\tau_n = n^{-1/4}$ и непрерывно дифференцируемой функции $\Phi_1(x)$, не зависящей от n и имеющей ограниченную производную $p(x) = \Phi_1'(x) > 0$, выполняется*

(i) $$\sup_x \big|\mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n < x\} - \Phi_1(x)\big| = \mathcal{O}(\tau_n^2);$$

(ii) $$\sup_{x \le x_0} \mathsf{P}_{n,1}\big\{x \le \Lambda_n \le x + \tau_n^{2+\beta}\big\} = o(\tau_n^2)$$

для некоторого $\beta > 0$ и любого $x_0 \in \mathsf{R}^1$.

Лемма 2.2. *В случае распределения Лапласа для $\tau_n = n^{-1/4}$ и $\eta_n = n^{-1/8}$ выполняется*

(i) $$\eta_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) = o(\tau_n^2);$$

(ii) $$\mathsf{E}_{n,0}e^{\Lambda_n}\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) = o(\tau_n^2),$$

где $\mathbf{1}_A(\cdot)$ – индикаторная функция множества A.

Доказательство. С учетом Леммы 3.5 работы [3] имеем

$$\eta_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) = \eta_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}\frac{\Delta_n^4}{\Delta_n^2}\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \le$$

$$\le \eta_n^{-3}\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^4 = \eta_n^{-3}\mathcal{O}(\tau_n^4) = o(\tau_n^2).$$

Из (2.9) работы 2 (см. там Лемму 2.1) для $s = -ix$ следует

$$\mathsf{E}_{n,0} e^{x\Lambda_n} \;\to\; e^{-\frac{t^2}{2}(x-x^2)},$$

для любого фиксированного x. Отсюда с учетом неравенства Гёльдера получим

$$\mathsf{E}_{n,0} e^{\Lambda_n} \mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \;\le\; (\mathsf{E}_{n,0} e^{p\Lambda_n})^{1/p} (\mathsf{P}_{n,0}(|\Delta_n| > \eta_n))^{1/q} \;=\; \mathcal{O}(e^{-\eta_n \tau_n^{-1}/q}) \;=\; o(\tau_n^2).$$

□

Из Леммы 2.1 для мощности β_n^* следует равенство

$$\beta_n^* \;=\; \mathsf{P}_{n,1}\big\{\Lambda_n > c_n\big\} \;+\; o(\tau_n^2). \tag{2.14}$$

Из (2.10), (2.14), Леммы 2.1 и ограниченности $\bar{d}_n$ (см. (3.11)) разность $\beta_n^* - \beta_n$ может быть представлена в виде

$$\begin{gathered}\beta_n^* - \beta_n \;=\; \mathsf{E}_{n,0} e^{\Lambda_n}(\mathbf{1}_{(c_n,\infty)}(\Lambda_n) - \Psi_n(S_n)) \;+\; o(\tau_n^2) \;= \\ =\; \mathsf{E}_{n,0}(e^{\Lambda_n} - e^{\bar{d}_n})(\mathbf{1}_{(c_n,\infty)}(\Lambda_n) - \Psi_n(S_n)) \;+\; o(\tau_n^2) \;\equiv \\ \equiv\; A_n \;+\; B_n \;+\; o(\tau_n^2),\end{gathered}$$

где

$$A_n \;=\; \mathsf{E}_{n,0}(e^{\Lambda_n} - e^{\bar{d}_n})(\mathbf{1}_{(-\infty,\bar{d}_n)}(\Lambda_n) - \mathbf{1}_{(-\infty,c_n)}(\Lambda_n)), \tag{2.15}$$

$$B_n \;=\; \mathsf{E}_{n,0}(e^{\Lambda_n} - e^{\bar{d}_n})(1 - \Psi_n(S_n) - \mathbf{1}_{(-\infty,\bar{d}_n)}(\Lambda_n)). \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение случайные величины

$$\tilde{\Lambda}_n \;=\; \Lambda_n \;+\; \xi_n, \quad \xi_n \;\sim\; \mathcal{N}(0, \sigma_n^2), \tag{2.17}$$

где

$$\sigma_n^2 \;=\; \mathcal{O}(\tau_n^{4+4\beta}), \tag{2.18}$$

$\beta > 0$ – постоянная, такая же как в Лемме 2.1, причем случайная величина ξ_n не зависит от $\mathbf{X}_n$ при H_0, и $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – нормальный закон с параметрами μ и σ^2. Определим

$$\tilde{A}_n \;=\; \mathsf{E}_{n,0}(e^{\tilde{\Lambda}_n} - e^{\bar{d}_n})(\mathbf{1}_{(-\infty,\bar{d}_n)}(\tilde{\Lambda}_n) - \mathbf{1}_{(-\infty,c_n)}(\tilde{\Lambda}_n)). \tag{2.19}$$

Справедливость следующей Леммы следует из Лемм 2.1, 2.2, ограниченности c_n и $\bar{d}_n$ (см. (3.11)).

Лемма 2.3. *В случае распределения Лапласа справедливо соотношение*

$$A_n \;=\; \tilde{A}_n \;+\; o(\tau_n^2).$$

Обозначим

$$D_n \;=\; c_n - \bar{d}_n. \tag{2.20}$$

В Леммах 3.5-3.7 следующего раздела показано, что

$$D_n \;=\; -\tau_n \mathsf{E}\big[\Delta \mid \Lambda = b\big] \;+\; o(\tau_n), \tag{2.21}$$

$$\tilde{A}_n \;=\; -\frac{1}{2}D_n^2 e^b p(b) \;+\; o(\tau_n^2), \tag{2.22}$$

$$B_n \;=\; \frac{1}{2}\tau_n^2 e^b \mathsf{E}\big[\Delta^2 \mid \Lambda = b\big]p(b) \;+\; o(\tau_n^2), \tag{2.23}$$

где $b \;=\; \Phi_1^{-1}(1-\alpha)$ (см. 2.9).

Из Леммы 2.3, (2.21)-(2.23) следует

Теорема 2.4. *В случае распределения Лапласа справедлива формула для предела разности мощностей критериев*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^{-2}(\beta_n^* - \beta_n) \;=\; \frac{1}{2}e^b \mathsf{D}[\Delta \mid \Lambda = b]p(b).$$

3. Доказательство вспомогательных лемм

Для доказательства Лемм 3.5-3.7 требуются Леммы 3.1–3.4.

Введем обозначения для моментов случайных величин $Y_1 = |X_1| - |X_1 - \theta|$ и $Z_1 = \theta sign(X_1)$, $\theta = tn^{-1/2}$, при гипотезе и альтернативе

$$\alpha_k(\theta) \;\equiv\; \mathsf{E}_0 Y_1^k, \quad \beta_k(\theta) \;\equiv\; \mathsf{E}_0 \big|Y_1\big|^k,$$

$$\hat{\alpha}_k(\theta) \;\equiv\; \mathsf{E}_0 Z_1^k, \quad \hat{\alpha}_k^*(\theta) \;\equiv\; \mathsf{E}_1 Z_1^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Обычными приемами, используя разложение экспоненты в ряд Тейлора и теорему о среднем значении, несложно показать, что для моментов случайных величин Y_1 и Z_1 справедлива следующая

Лемма 3.1. *Для распределения Лапласа верны следующие утверждения:*

(i)
$$\big|\alpha_1(\theta)\big| \;\le\; \frac{\theta^2}{2}e^\theta, \quad \Big|\alpha_1(\theta) + \frac{\theta^2}{2}\Big| \;\le\; \frac{\theta^3}{6}e^\theta, \quad |\alpha_2(\theta)| \;\le\; \theta^2 e^\theta,$$

$$\big|\alpha_2(\theta) - \theta^2\big| \;\le\; \frac{\theta^3}{3}e^\theta, \quad |\alpha_3(\theta)| \;\le\; \frac{\theta^4}{2}e^\theta;$$

(ii)
$$\beta_k(\theta) \;\le\; \theta^k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

(iii)
$$|\hat{\alpha}_1^*(\theta)| \;\le\; \theta^2 e^\theta, \quad |\hat{\alpha}_3^*(\theta)| \;\le\; \theta^4 e^\theta, \quad \Big|\hat{\alpha}_1^*(\theta) - \theta^2 + \frac{\theta^3}{2}\Big| \;\le\; \frac{\theta^4}{6}e^\theta.$$

Получим теперь асимптотические разложения в нуле характеристических функций случайных величин Λ_n и S_n при гипотезе и альтернативе, используя оценки для моментов их вкладов из предыдущей Леммы.

Лемма 3.2. *Для распределения Лапласа справедливы соотношения:*

(i) при $|s| \le T_n' = \frac{\sqrt{n}}{6te^{3t}}$ *и достаточно больших* n *имеет место неравенство*

$$\left|\mathsf{E}_{n,0}e^{is\Lambda_n} \;-\; e^{-is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}}\right| \;\le\; \frac{C_1(t)}{\sqrt{n}}\big(|s| + s^2 + |s|^3\big)e^{-\frac{s^2t^2}{4}};$$

(ii) при $|s| \le T_n'' = \frac{\sqrt{n}}{3t}$ имеют место неравенства

$$\left| \mathsf{E}_{n,0} e^{isS_n} \;-\; e^{-is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}} \right| \;\le\; \frac{C_2(t)}{n} s^4 e^{-\frac{s^2t^2}{4}},$$

$$\left| \mathsf{E}_{n,1} e^{isS_n} - e^{is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}} \left\{ 1 - \frac{ist^3}{2\sqrt{n}} \right\} \right| \le \frac{C_2^*(t)}{n} (|s| + s^2 + |s|^3 + s^4 + |s|^5 + s^6) e^{-\frac{s^2t^2}{4}},$$

где второе неравенство выполняется для достаточно больших n.

Доказательство. Обозначим $\theta = tn^{-1/2}$.

(i) Обозначим

$$f_0(s) \;=\; \mathsf{E}_0 e^{is(|X_1| - |X_1 - \theta|)},$$
$$f_0^n(s) \;=\; \mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n}.$$

Воспользуемся формулой (см. Лемма 4.5 из работы [6])

$$e^{ix} \;=\; \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(ix)^\nu}{\nu!} \;+\; \Theta \frac{x^k}{k!}, \quad |\Theta| \le 1, \tag{3.1}$$

которая верна для любого действительного x и любого целого положительного k. Тогда имеем

$$U \;\equiv\; f_0(s) - 1 \;=\; \sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k}{k!} (is)^k \;+\; \Theta_1 \frac{\alpha_3}{6} s^3, \quad |\Theta_1| \le 1.$$

Так как $|\alpha_k| \le \beta_k$ и $\beta_1 \le \beta_2^{1/2} \le \beta_3^{1/3}$, то при $|s| \le T_n'$ с учетом Леммы 3.1(ii) имеем

$$|U| \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|}{k!} |s|^k \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} |s|^k \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_3^{1/3}|s|)^k}{k!} \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})^k}{k!} \;=\; e^{\frac{1}{6}} - 1 \;\le\; 0.2.$$

Следовательно логарифм $\log(1+U)$ можно разложить в ряд Тейлора в точке $U = 0$ с дополнительным членом в форме Коши

$$\log f_0(s) \;=\; \log(1+U) \;=\; U \;+\; r_1(U),$$

где

$$r_1(U) \;=\; -\frac{1-\Theta}{(1+\Theta U)^2} U^2, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Решая квадратное уравнение $\Theta U^2 + 2U + 1$, получаем, что оно больше нуля для $|U| < 0.5$, то есть

$$\frac{1-\Theta}{(1+\Theta U)^2} \;<\; 1.$$

Тогда имеем

$$\log f_0(s) \;=\; U + \Theta_2 U^2 \;=$$
$$= \; -is\frac{\theta^2}{2} + (is)^2 \frac{\theta^2}{2} + is\big(\alpha_1 + \frac{\theta^2}{2}\big) + (is)^2 \frac{(\alpha_2 - \theta^2)}{2!} + \Theta_1 (is)^3 \frac{\alpha_3}{3!} +$$

$$+\Theta_2\Big\{(is)^2\alpha_1^2+(is)^4\frac{\alpha_2^2}{4}+\Theta_1^2 s^6\frac{\alpha_3^2}{36}+(is)^3\alpha_1\alpha_2+\Theta_1 is^4\frac{\alpha_1\alpha_3}{3}+\Theta_1 i^2 s^5\frac{\alpha_2\alpha_3}{6}\Big\} \equiv \quad (3.2)$$

$$\equiv\ -is\frac{\theta^2}{2}\ -\ s^2\frac{\theta^2}{2}\ +\ R,$$

где $|\Theta_2|<1$. Тогда

$$\log f_0^n(s)\ =\ -is\frac{t^2}{2}\ -\ \frac{s^2t^2}{2}\ +\ nR.$$

Обозначим

$$V\ \equiv\ \log\Big(e^{is\frac{t^2}{2}+\frac{s^2t^2}{2}}f_0^n(s)\Big)\ =\ nR$$

и используем неравенство, верное для любого комплексного v:

$$|e^v-1|\ \le\ |v|e^{|v|}.$$

С учетом Леммы 3.1 из (3.2) при $|s|\le T_n'$ имеем для |V| две оценки

$$|V|\ \le\ \frac{C(t)}{\sqrt{n}}\big(|s|+s^2+|s|^3\big), \tag{3.3}$$

$$|V|\ \le\ 0.04+\frac{t^3e^{tn^{-1/2}}}{6\sqrt{n}}s^2+\frac{t^2s^2}{8}. \tag{3.4}$$

Используя оценки (3.3) и (3.4), получим

$$\Big|e^{is\frac{t^2}{2}+\frac{s^2t^2}{2}}f_n(s)-1\Big|\ \le\ \frac{C_1(t)}{\sqrt{n}}\big(|s|+s^2+|s|^3\big)e^{(\frac{t^3e^{tn^{-1/2}}}{6\sqrt{n}}+\frac{t^2}{8})s^2}.$$

Для завершения доказательства остается потребовать, чтобы n было достаточно большим, по крайней мере, чтобы выполнялось неравенство

$$n\ >\ \frac{16}{9}t^2e^{2t}.$$

(ii) Обозначим

$$\hat g_0(s)\ =\ \mathsf{E}_0 e^{is\theta sign(X_1)},\quad \hat g_0^n(s)\ =\ \mathsf{E}_{n,0}e^{is\sum_{i=1}^n\theta sign(X_i)},$$

$$\hat g_1(s)\ =\ \mathsf{E}_1 e^{is\theta sign(X_1)},\quad \hat g_1^n(s)\ =\ \mathsf{E}_{n,1}e^{is\sum_{i=1}^n\theta sign(X_i)},$$

прямые вычисления дают

$$\hat\alpha_1(\theta)\ =\ 0,\quad \hat\alpha_2(\theta)\ =\ \theta^2,\quad \hat\alpha_3(\theta)\ =\ 0,\quad \hat\beta_4(\theta)\ =\ \theta^4,$$

$$\hat\alpha_1^*(\theta)\ =\ \theta(1-e^{-\theta}),\quad \hat\alpha_2^*(\theta)\ =\ \theta^2,\quad \hat\alpha_3^*(\theta)\ =\ \theta^3(1-e^{-\theta}),\quad \hat\beta_3^*(\theta)\ =\ \theta^3.$$

Случай гипотезы H_0 (см. (1.1)) не вызывает значительных затруднений, следуя схеме рассуждений в пункте (i), имеем окончательную оценку

$$\Big|e^{\frac{s^2t^2}{2}}g_0^n(s)-1\Big|\ \le\ \frac{C(t)}{n}s^4e^{\frac{s^2t^2}{4}},$$

что доказывает первую часть утверждения (ii).

Рассмотрим теперь случай при альтернативе. Имеем как и выше

$$\log \hat{g}_1(s) \;=\; \log(1+U) \;=\; U \;+\; \Theta_2 U^2 \;=$$

$$= is\hat{\alpha}_1^* + (is)^2\frac{\hat{\alpha}_2^*}{2} + \Theta_1\frac{\hat{\alpha}_3^*}{6}s^3 +$$

$$+\Theta_2\Big\{(is)^2\hat{\alpha}_1^{*2} + (is)^4\frac{\hat{\alpha}_2^{*2}}{4} + \Theta_1^2\frac{\hat{\alpha}_3^{*2}}{36}s^6 + (is)^3\hat{\alpha}_1^*\hat{\alpha}_2^* + \Theta_1 is^4\frac{\hat{\alpha}_1^*\hat{\alpha}_3^*}{3} + \Theta_1 i^2 s^5\frac{\hat{\alpha}_2^*\hat{\alpha}_3^*}{6}\Big\} \equiv$$

$$\equiv is(\theta^2 - \frac{\theta^3}{2}) + (is)^2\frac{\theta^2}{2} + R,$$

где $|\Theta_1| \le 1$, $|\Theta_2| \le 1$.

Тогда

$$\log \hat{g}_1^n(s) \;=\; ist^2 - \frac{s^2t^2}{2} - \frac{ist^3}{2\sqrt{n}} + nR.$$

Обозначим

$$V \;\equiv\; \log\Big(e^{-ist^2 + \frac{s^2t^2}{2}}\hat{g}_1^n(s)\Big) \;=\; -\frac{ist^3}{2\sqrt{n}} + nR.$$

Используем неравенство, верное для любых комплексных z и y:

$$|e^z - 1 - y| \;\le\; |z-y| + z^2 e^{|z|}.$$

Оценим остаточные члены с помощью Леммы 3.1, при $|s| \le T_n''$ имеем

$$|V + \frac{ist^3}{2\sqrt{n}}| \;=\; n|R| \;\le\; \frac{C(t)}{n}(|s| + s^2 + |s|^3 + s^4),$$

$$V^2 \;\le\; \frac{C'(t)}{n}(|s| + s^2 + |s|^3 + s^4 + |s|^5 + s^6),$$

$$|V| \;\le\; C''(t) \;+\; \Big(\frac{32}{81}\frac{te^t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{36}\Big)t^2s^2.$$

Отсюда получаем

$$\left|e^{-ist^2+\frac{s^2t^2}{2}}\hat{g}_1^n(s) - \Big\{1 - \frac{ist^3}{2\sqrt{n}}\Big\}\right| \;\le\; \frac{C_3^*(t)}{n}(|s| + s^2 + |s|^3 + s^4 + |s|^5 + s^6)e^{(\frac{32}{81}\frac{te^t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{36})t^2s^2}.$$

Остается потребовать, чтобы выполнялось по крайней мере

$$n \;>\; \frac{256}{81}t^2e^{2t}.$$

□

Для статистики Λ_n получим оценку для характеристической функции, аналогичную условию Крамера (C), в случае гипотезы H_0 (см. (1.1)).

Лемма 3.3. *Для логарифма отношения правдоподобия Λ_n в случае распределения Лапласа для $|s| \ge \pi\sqrt{n}/2t$ существуют n_0 и постоянная C, зависящая от n_0 и параметра t такие, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$\sup_{|s|\ge\pi\sqrt{n}/2t}\left|\mathsf{E}_{n,0}e^{is\Lambda_n}\right| \;\le\; e^{-C\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\Lambda_n \;=\; \Lambda_n(t) \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h_{n,t}(X_i),$$

где

$$h_{n,t}(x) \;=\; \sqrt{n}(|x| - |x - \frac{t}{\sqrt{n}}|) \;=\; \begin{cases} -t, & x \;<\; 0,\\ 2\sqrt{n}x \;-\; t, & 0 \;\le\; x \;\le\; \frac{t}{\sqrt{n}},\\ t, & x \;>\; \frac{t}{\sqrt{n}}.\end{cases}$$

Случайная величина $h_{n,t}(X_1)$ имеет функцию распределения

$$F_{n,t}(x) \;\equiv\; \mathsf{P}_0\{h_{n,t}(X_1) < x\} \;=\; \begin{cases} 0, & x \;\le\; -t,\\ \frac{1}{2} \;+\; \int_{-t}^{x} \frac{1}{4\sqrt{n}} e^{-\frac{x+t}{2\sqrt{n}}}, & -t \;<\; x \;\le\; t,\\ 1, & x \;>\; t.\end{cases}$$

Последняя может быть представлена в виде смеси абсолютно непрерывного, $F_{n,t,1}(x)$, и дискретного, $F_{n,t,2}(x)$, распределений $(0 < \kappa_{n,t} < 1)$

$$F_{n,t}(x) \;=\; \kappa_{n,t}F_{n,t,1}(x) \;+\; (1 - \kappa_{n,t})F_{n,t,2}(x) \;=$$

$$=\; \frac{1 - e^{-t/\sqrt{n}}}{2}\int_{-\infty}^{x} f_{n,t,1}(u)du \;+\; \frac{1 + e^{-t/\sqrt{n}}}{2}F_{n,t,2}(x),$$

где

$$f_{n,t,1}(x) \;=\; \begin{cases} \frac{2}{1-e^{-t/\sqrt{n}}}\frac{1}{4\sqrt{n}}e^{-\frac{x+t}{2\sqrt{n}}}, & x \;\in\; [-t,t],\\ 0, & x \;\notin\; [-t,t],\end{cases}$$

$$F_{n,t,2}(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \;\le\; -t,\\ \frac{1}{1+e^{-t/\sqrt{n}}}, & -t \;<\; x \;\le\; t,\\ 1, & x \;>\; t.\end{cases}$$

Так как для $x \;\in\; [-t,t]$ имеем $f_{n,t,1} \to \frac{1}{2t}$ при $n \to \infty$, и, значит,

$$\sup_{x\,\in\,[-t,t]} f_{n,t,1}(x) < M/2t < \infty,$$

то с учетом неравенства (1.16) из работы [5] (см. [5], стр. 421, и литературу там) получаем равномерную оценку для характеристической функции случайной величины $h_{n,t}(X_1)$ для $|s| \ge \pi/2t$ и некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\sup_{|s|\ge\pi/2t}\bigl|\mathsf{E}_0 e^{ish_{n,t}(X_1)}\bigr| \;\le\; \kappa_{n,t}\Bigl|\int e^{isx}F_{n,t,1}(dx)\Bigr| \;+\; (1-\kappa_{n,t}) \;\le$$

$$\le\; \frac{1 - e^{-t/\sqrt{n}}}{2}\bigl(1 - C_1M^{-2}\bigr) \;+\; \frac{1 + e^{-t/\sqrt{n}}}{2} \;=\; 1 - C_1\frac{M^{-2}t}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Тогда, начиная с некоторого n_0, найдется постоянная $C > 0$ такая, что для всех $n > n_0$ выполняется

$$\sup_{|s|\ge\pi\sqrt{n}/2t}\bigl|\mathsf{E}_0 e^{i\frac{s}{\sqrt{n}}h_{n,t}(X_1)}\bigr|^{\sqrt{n}} \;\le\; e^{-C},$$

откуда следует утверждение Леммы. □

Обозначим

$$\bar{Q}_{n,0}(x) \;=\; \int_{|z|\le \eta_n\tau_n^{-1}} \Big[\mathsf{P}_{n,0}\big\{\tau_n^{-1}\Delta_n < z \mid \tilde{\Lambda}_n = x-\tau_n z\big\} \;-\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)\Big] p_n(x-\tau_n z)dz,$$

$$\tilde{Q}_{n,0}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\mathsf{P}_{n,0}\big\{\tau_n^{-1}\Delta_n < z \mid \tilde{\Lambda}_n = x-\tau_n z\big\} \;-\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)\Big] p_n(x-\tau_n z)dz,$$

где случайная величина $\Delta_n = S_n - \Lambda_n$ (см. 2.11), и $p_n(x)$ – плотность случайной величины $\tilde{\Lambda}_n = \Lambda_n + \xi_n$ (см. 2.17). Далее предполагаем, что существуют случайные величины Δ и Λ (см. (2.7) и (2.13)) такие, что Λ имеет плотность $p(x)$, существует функция

$$\begin{aligned} Q_0(x) \;\equiv\; p(x)\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\mathsf{P}\big\{\Delta < z \mid \Lambda = x\big\} \;-\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)\Big]dz \;= \\ \;=\; -\mathsf{E}\Big(\Delta \mid \Lambda = x\Big)p(x). \end{aligned}$$

Введем также обозначения для преобразований Фурье соответствующих функций,

$$\tilde{q}_{n,0}(s) \;\equiv\; \int e^{isx}\tilde{Q}_{n,0}(x)dx \;=\; \mathsf{E}_{n,0}e^{is\tilde{\Lambda}_n}\int_{\tau_n^{-1}\Delta_n}^{0} e^{is\tau_n z}dz,$$

$$q_{n,0}(s) \;\equiv\; \mathsf{E}_{n,0}e^{is\Lambda_n}\int_{\tau_n^{-1}\Delta_n}^{0} e^{is\tau_n z}dz,$$

$$\omega_n(s) \;=\; \mathsf{E}\exp\{is\xi_n\} \;=\; \exp\Big\{-\frac{1}{2}s^2\sigma_n^2\Big\},$$

$$q_0(s) \;\equiv\; \int e^{isx}Q_0(x)dx \;=\; -\mathsf{E}e^{is\Lambda}\Delta.$$

Лемма 3.4. *В случае распределения Лапласа справедливо соотношение*

$$\sup_x\big|\bar{Q}_{n,0}(x) \;-\; Q_0(x)\big| \to 0.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\sup_x\big|\bar{Q}_{n,0}(x) \;-\; \tilde{Q}_{n,0}(x)\big| \to 0. \tag{3.5}$$

$$\big|\bar{Q}_{n,0}(x) \;-\; \tilde{Q}_{n,0}(x)\big| \;=$$

$$= \int_{|z|\ge \eta_n\tau_n^{-1}} \Big[\mathsf{P}_{n,0}\big\{\tau_n^{-1}\Delta_n < z \mid \tilde{\Lambda}_n = x-\tau_n z\big\} \;-\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)\Big] p_n(x-\tau_n z)dz \;\equiv$$

$$\equiv\; I_{n,0}^{+} \;+\; I_{n,0}^{-},$$

где

$$I_{n,0}^{+} \;=\; \int_{\eta_n\tau_n^{-1}}^{\infty} \mathsf{P}_{n,0}\big\{\tau_n^{-1}\Delta_n \ge z \mid \tilde{\Lambda}_n = x-\tau_n z\big\} p_n(x-\tau_n z)dz$$

и с заменой $z = -u$

$$I^{-}_{n,0} = \int_{\eta_n\tau_n^{-1}}^{\infty} \mathsf{P}_{n,0}\{-\tau_n^{-1}\Delta_n > u \mid \tilde{\Lambda}_n = x + \tau_n u\} p_n(x+\tau_n u)du.$$

Оценим $I^{+}_{n,0}$ и $I^{-}_{n,0}$ с помощью неравенства Чебышёва вида

$$\mathsf{P}\{X > x \mid Y\} \le \frac{\mathsf{E}\big[|X|\mathbf{1}_{(x,\infty)}(|X|) \mid Y\big]}{x}, \quad x > 0,$$

получим

$$I^{+}_{n,0} \le \tau_n\eta_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}_{n,0}\big[|\tau_n^{-1}\Delta_n|\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \bigm| \tilde{\Lambda}_n = x - \tau_n z\big] p_n(x-\tau_n z)dz =$$

с заменой $v = x - \tau_n z$

$$= \eta_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}_{n,0}\big[|\tau_n^{-1}\Delta_n|\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \bigm| \tilde{\Lambda}_n = v\big] p_n(v)dv =$$

$$= \eta_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}|\tau_n^{-1}\Delta_n|\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|).$$

Та же оценка справедлива для $I^{-}_{n,l}$, и для доказательства (3.5) достаточно показать, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Используя Лемму 2.2 (i), имеем

$$\eta_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}|\tau_n^{-1}\Delta_n|\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) = \eta_n^{-1}\tau_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}\frac{\Delta_n^2}{|\Delta_n|}\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \le$$

$$\le \eta_n^{-2}\tau_n^{-1}\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) = o(n^{-1/8}) \to 0.$$

Докажем теперь, что

$$\sup_x\big|\tilde{Q}_{n,0}(x) - Q_0(x)\big| \to 0. \tag{3.6}$$

Формула инверсии для преобразования Фурье дает

$$\big|\tilde{Q}_{n,0}(x) - Q_0(x)\big| \le \int\big|\tilde{q}_{n,0}(s) - q_0(s)\big|ds.$$

В силу свойства линейности интеграла имеем

$$\int\big|\tilde{q}_{n,0}(s)-q_0(s)\big|ds \le \int_{|s|\le n/t}\big|\tilde{q}_{n,0}(s)-q_0(s)\big|ds+\int_{|s|>n/t}\big|\tilde{q}_{n,0}(s)\big|ds+\int_{|s|>n/t}\big|q_0(s)\big|ds.$$

Последний интеграл правой части в силу интегрируемости функции $q_0(s) \equiv 0$ (см. (2.13)) и ограниченности параметра t стремится к нулю с ростом n. Оценим второй интеграл правой части, применяя Лемму 3.5 из работы [3] и (2.18),

$$\int_{|s|>n/t}\big|\tilde{q}_{n,0}(s)\big|ds = \int_{|s|>n/t}\Big|\mathsf{E}_{n,0}e^{is\tilde{\Lambda}_n}\int_{\tau_n^{-1}\Delta_n}^{0} e^{is\tau_n z}dz\Big|ds =$$

$$= \int_{|s|>n/t} \omega_n(s) \big| \mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n} \int_{\tau_n^{-1}\Delta_n}^{0} e^{is\tau_n z} dz \big| ds \ \le$$

$$\le \int_{|s|>n/t} \omega_n(s) \mathsf{E}_{n,0}\big(\tau_n^{-1}|\Delta_n|\big) ds \ = \ C \int_{|s|>n/t} \omega_n(s) ds \ =$$

$$= C\sigma_n^{-1} \int_{|y|>n\sigma_n/t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \ \le \ C \cdot t\sigma_n^{-2} n^{-1} \exp\Big\{ -\frac{1}{2t} n^2 \sigma_n^2 \Big\} \ \longrightarrow \ 0$$

для $0 < \beta < 1$.

Рассмотрим первый интеграл. Так как в случае распределения Лапласа $q_0(s) \equiv 0$ (см. (2.13)), имеем

$$\int_{|s|\le n/t} \big| \tilde{q}_{n,0}(s) \ - \ q_0(s) \big| ds \ \le \ \int_{|s|\le n/t} \big| q_{n,0}(s) \big| ds \ = \ \int_{|s|\le n/t} \big| \mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n} \int_{\tau_n^{-1}\Delta_n}^{0} e^{is\tau_n z} dz \big| ds \ =$$

$$= \ \tau_n^{-1} \int_{|s|\le n/t} \bigg| \frac{\mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n} - \mathsf{E}_{n,0} e^{isS_n}}{s} \bigg| ds \ \le \tag{3.7}$$

$$\le \ \tau_n^{-1} \int_{|s|\le \delta\sqrt{n}/t} \bigg| \frac{\mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n} - e^{-is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}}}{s} \bigg| ds \, + \tag{3.7a}$$

$$+ \, \tau_n^{-1} \int_{|s|\le \delta\sqrt{n}/t} \bigg| \frac{e^{-is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}} - \mathsf{E}_{n,0} e^{isS_n}}{s} \bigg| ds \, + \tag{3.7b}$$

$$+ \, \tau_n^{-1} \int_{\delta\sqrt{n}/t<|s|\le n/t} \bigg| \frac{\mathsf{E}_{n,0} e^{is\Lambda_n}}{s} \bigg| ds \, + \tag{3.7c}$$

$$+ \, \tau_n^{-1} \int_{\delta\sqrt{n}/t<|s|\le n/t} \bigg| \frac{e^{-is\frac{t^2}{2}} d_n(st) \ - \ \mathsf{E}_{n,0} e^{isS_n}}{s} \bigg| ds \, + \tag{3.7d}$$

$$+ \, \tau_n^{-1} \int_{\delta\sqrt{n}/t<|s|\le n/t} \bigg| \frac{d_n(st)}{s} \bigg| ds, \tag{3.7e}$$

где из Леммы 3.2 величина $0 < \delta = \delta(t) \le \frac{1}{6e^{3t}} < \frac{1}{3}$ при $0 < t \le C$ (см. (1.2)), а разрывный член $d_n(s)$ определяется по формуле (см. формулу (4.25) в работе [7])

$$d_n(st) \ = \ -\frac{st}{\pi\sqrt{n}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \, \frac{1}{\nu} e^{-\frac{1}{2}(st+\pi\nu\sqrt{n})^2}, \tag{3.8}$$

где суммирование ведется по всем $\nu \ne 0$.

Из Леммы 3.2 следует, что интеграл в (3.7a) есть величина $\mathcal{O}(n^{-1/2})$, а интеграл в (3.7b) – величина $\mathcal{O}(n^{-1})$. Из Леммы 3.3 и из свойств характеристической функции на промежутке $\frac{\delta\sqrt{n}}{t} < |s| < \frac{\pi\sqrt{n}}{2t}$ следует, что интеграл в (3.7c) есть величина $o(n^{-1/2})$. Произведем в интеграле из (3.7d) замену переменных $u = st$ (см. (3.8)) и применим теорему 4.3 работы [7] в части оценки интеграла (4.38) работы [7] к случайной величине $sign(X_1)$, получаем, что интеграл в (3.7d) представляет собой величину $o(n^{-1/2})$.

Используя технику работы [7] для оценки разрывного члена в интеграле (3.7e), имеем с учетом замены $u = st$

$$\tau_n^{-1}\int_{\delta\sqrt{n}/t<|s|\le n/t}\left|\frac{d_n(st)}{s}\right|ds \;=\; \frac{\tau_n^{-1}}{\pi\sqrt{n}}\int_{\delta\sqrt{n}<|s|\le n}\left|\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu}e^{-\frac{1}{2}(s+\pi\nu\sqrt{n})^2}\right|ds \;=$$

$$=\; \mathcal{O}\Big(\frac{\log n}{n^{1/4}}\Big) \;\to\; 0.$$

Утверждение Леммы следует из полученных оценок.

□

Следующие две Леммы взяты из работы [1] (см. Леммы 3.4.2-3.4.3 работы [1], стр. 92-98) и проверяются для случая распределения Лапласа.

Лемма 3.5 *В случае распределения Лапласа справедливо соотношение*

$$D_n \;=\; -\tau_n \mathsf{E}\big[\Delta \mid \Lambda = b\big] \;+\; o(\tau_n)$$

и $\bar{d}_n \to b$.

Доказательство. Введем следующие обозначения (см. работу [1], стр. 92-94)

$$F_{\Lambda_n}(x) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n < x\}, \quad F_{\tilde{\Lambda}_n}(x) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\{\tilde{\Lambda}_n < x\},$$

$$F_{S_n}(x) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\{S_n < x\}, \quad F_{\tilde{S}_n}(x) \;=\; \mathsf{P}_{n,0}\{\tilde{S}_n < x\},$$

где

$$\tilde{S}_n \;=\; S_n + \xi_n.$$

Отсюда имеем

$$\tilde{S}_n \;=\; \tilde{\Lambda}_n + \Delta_n,$$

следовательно

$$\Big|F_{\tilde{S}_n}(x) - \mathsf{P}_{n,0}\{\tilde{S}_n < x,\; x-\eta_n < \tilde{\Lambda}_n < x+\eta_n\} - F_{\tilde{\Lambda}_n}(x-\eta_n)\Big| \;\le\; \mathsf{P}_{n,0}\{|\Delta_n| > \eta_n\}.$$

Из Леммы 2.2 (i) следует

$$\mathsf{P}_{n,0}\{|\Delta_n| > \eta_n\} \;\le\; \eta_n^{-2}\mathsf{E}_{n,0}\Delta_n^2\mathbf{1}_{(\eta_n,\infty)}(|\Delta_n|) \;=\; \eta_n^{-1}o(\tau_n^2) \;=\; o(\tau_n).$$

Тогда, следуя работе [1], имеем

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \;=\; F_{\tilde{\Lambda}_n}(x) + \tau_n\bar{Q}_{n,0}(x) + o(\tau_n).$$

В силу Леммы 2.2 (i), Леммы 2.1 (ii) и из определения для ξ_n (см. (2.17)) получаем

$$F_{\tilde{\Lambda}_n} \;=\; F_{\Lambda_n}(x) + o(\tau_n)$$

равномерно по $x \in \mathsf{R}^1$.

Отсюда и из Леммы 3.4 следует

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \;=\; F_{\Lambda_n}(x) - \tau_n\mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = x]p(x) \;+\; o(\tau_n), \tag{3.9}$$

где функция $\mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = x]p(x)$ непрерывная и ограниченная.

Тогда из (3.9), непрерывности функции $\mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = x]p(x)$ (см. (2.12), (2.13)) и Леммы 2.1 (ii) получаем

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \;=\; F_{S_n}(x) \;+\; o(\tau_n).$$

Из Леммы 2.1 (ii) и определения для критерия $\Psi_n^*(\Lambda_n)$ (см. (2.1)) имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n = c_n\} \;=\; o(\tau_n)$$

и

$$\mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n > c_n\} \;=\; 1 - \Phi_1(c_n) + o(\tau_n) \;=\; \alpha + o(\tau_n).$$

Таким образом,

$$\Phi_1(c_n) \;=\; 1 - \alpha + o(\tau_n).$$

Так как

$$\Phi_1'(x) = p(x) > 0,$$

то

$$c_n \to \Phi_1^{-1}(1-\alpha). \tag{3.10}$$

Покажем, что

$$\bar{d}_n \to \Phi_1^{-1}(1-\alpha). \tag{3.11}$$

Так как

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n = \bar{d}_n\} \;=\; \mathcal{O}(n^{-1/2}) \;=\; o(\tau_n),$$

то

$$F_{\Lambda_n}(c_n) - F_{\Lambda_n}(\bar{d}_n) \;=\; -\tau_n \mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = \bar{d}_n]p(\bar{d}_n) + o(\tau_n). \tag{3.12}$$

С другой стороны из Леммы 2.1 (ii) следует

$$F_{\Lambda_n}(c_n) - F_{\Lambda_n}(\bar{d}_n) \;=\; \Phi_1(c_n) - \Phi_1(\bar{d}_n) + o(\tau_n). \tag{3.13}$$

Так как $\mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = x]p(x)$ ограничена (см. (2.12), (2.13)), из последних двух соотношений имеем

$$\Phi_1(c_n) - \Phi_1(\bar{d}_n) \;=\; \mathcal{O}(\tau_n),$$

что при условии (3.10) дает (3.11).

Более того, из (3.13) также следует, что

$$F_{\Lambda_n}(c_n) - F_{\Lambda_n}(\bar{d}_n) \;=\; D_n p(\tilde{d}_n), \quad \tilde{d}_n \in [\bar{d}_n, c_n].$$

Из непрерывности и ограниченности функций $p(x) > 0$, $\mathsf{E}[\Delta \mid \Lambda = x]p(x)$ и из (3.12) следует утверждение Леммы.

□

Дословно повторяя доказательство Леммы 3.4.3 из работы [1], из предыдущей Леммы, Леммы 2.1 (i) следует справедливость следующей Леммы.

Лемма 3.6 *В случае распределения Лапласа справедливо соотношение*

$$\tilde{A}_n \;=\; -\frac{1}{2}D_n^2 e^{\bar{d}_n} p(\bar{d}_n) \;+\; o(\tau_n^2).$$

Лемма 3.7 *В случае распределения Лапласа справедливо соотношение*

$$B_n \;=\; \frac{1}{2}\tau_n^2 e^{\bar{d}_n}\mathsf{E}[\Delta^2 \mid \Lambda = \bar{d}_n]p(\bar{d}_n) \;+\; o(\tau_n^2),$$

где $\bar{d}_n$ *– значение решетчатой случайной величины* S_n.

Доказательство.

Из (2.2) и (2.3)

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar{d}_n\} \;-\; \gamma_n\mathsf{P}_{n,0}\{S_n = \bar{d}_n\} \;=\; 1-\alpha \;+\; o(\tau_n^2)$$

будем считать, что

$$\bar{d}_n \;=\; \min\{x : \mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le x\} \ge 1-\alpha + o(\tau_n^2)\}, \tag{3.14}$$

$$\gamma_n \;=\; \frac{\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar{d}_n\} - (1-\alpha \;+\; o(\tau_n^2))}{\mathsf{P}_{n,0}\{S_n = \bar{d}_n\}}.$$

Так определенное критическое значение $\bar{d}_n$ (см. (3.14)), очевидно, есть точка разрыва функций распределения $\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le x\}$ и $\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le x\}$.

Из (2.16) имеем

$$B_n = \mathsf{E}_{n,0}\Big(e^{\Lambda_n} - e^{\bar{d}_n}\Big)\Big(\mathbf{1}_{(-\infty,\bar{d}_n]}\big(S_n\big) - \mathbf{1}_{(-\infty,\bar{d}_n)}\big(\Lambda_n\big)\Big) + \gamma_n\mathsf{E}_{n,0}\Big(e^{\Lambda_n} - e^{\bar{d}_n}\Big)\mathbf{1}_{\{\bar{d}_n\}}\big(S_n\big).$$

Получим асимптотические разложения для величин скачков функций распределения случайной величины S_n при гипотезе и альтернативе. Из представления

$$S_n \;=\; -\frac{t^2}{2} \;-\; t\sqrt{n} \;+\; \frac{2t}{\sqrt{n}}\nu, \quad \nu \;=\; 0,1,\ldots,n,$$

и из Теоремы 1.8 работы [6] имеем формулы обращения для решетчатой случайной величины S_n в точке разрыва $\bar{d}_n$ при гипотезе и альтернативе

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n = \bar{d}_n\} \;=\; \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} g_{n,0}(s)e^{-is\bar{d}_n}ds,$$

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n = \bar{d}_n\} \;=\; \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} g_{n,1}(s)e^{-is\bar{d}_n}ds,$$

где

$$g_{n,0}(s) \;=\; \mathsf{E}_{n,0}e^{isS_n}, \quad g_{n,1}(s) \;=\; \mathsf{E}_{n,1}e^{isS_n}.$$

Рассмотрим детально случай альтернативы, при гипотезе рассуждения аналогичны. С учетом доказательства Теоремы 4.5 работы [7] имеем

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n = \bar{d}_n\} \;=\; \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}}\Big(g_{n,1}(s) \;-\; e^{is\frac{t^2}{2}-\frac{s^2t^2}{2}}\Big\{1-\frac{ist^3}{2\sqrt{n}}\Big\}\Big)e^{-is\bar{d}_n}ds \,+$$

$$+\,\frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} e^{is\frac{t^2}{2}-\frac{s^2t^2}{2}}\Big\{1-\frac{ist^3}{2\sqrt{n}}\Big\}e^{-is\bar{d}_n}ds \;\equiv\; J_1 \;+\; J_2.$$

Так как для $\frac{\sqrt{n}}{3t} \le |s| \le \frac{\pi\sqrt{n}}{2t}$

$$|g_{n,1}(s)| \le \Big(\cos^2\frac{1}{3} + \sin^2\frac{1}{3}\big(1 - e^{-tn^{-1/2}}\big)^2\Big)^{n/2} < e^{-Cn}, \quad C > 0, \tag{3.15}$$

то с учетом Леммы 3.2 (ii) имеем

$$J_1 = o(n^{-1}).$$

Для второго интеграла имеем

$$J_2 = \frac{t}{\pi\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\frac{t^2}{2} - \frac{s^2t^2}{2}} \Big\{1 - \frac{ist^3}{2\sqrt{n}}\Big\} e^{-is\bar d_n} ds + o(n^{-1}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\Big(\frac{\bar d_n - \frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}).$$

Заметим, что в случае гипотезы Теорема 4.5 работы [7] применима непосредственно. Окончательно имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n = \bar d_n\} = \mathsf{P}_{n,0}\Big\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} sign(X_i) = \frac{\bar d_n + \frac{t^2}{2}}{t}\Big\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\Big(\frac{\bar d_n + \frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}),$$

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n = \bar d_n\} = \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\Big(\frac{\bar d_n - \frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}).$$

Теперь, поскольку

$$e^{\bar d_n} \varphi\Big(\frac{\bar d_n + \frac{t^2}{2}}{t}\Big) = \varphi\Big(\frac{\bar d_n - \frac{t^2}{2}}{t}\Big),$$

получаем

$$B_n = \mathsf{E}_{n,0}\Big(e^{\Lambda_n} - e^{\bar d_n}\Big)\Big(\mathbf{1}_{(-\infty,\bar d_n]}(S_n) - \mathbf{1}_{(-\infty,\bar d_n)}(\Lambda_n)\Big) + o(\tau_n^2) =$$

$$= \tau_n^2 e^{\bar d_n} \tau_n^{-2}\Big(e^{-\bar d_n}\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le \bar d_n\} - \mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar d_n\} -$$

$$- e^{-\bar d_n}\mathsf{P}_{n,1}\{\Lambda_n < \bar d_n\} + \mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n < \bar d_n\}\Big) + o(\tau_n^2) \equiv \tau_n^2 e^{\bar d_n} Q_{n,1}(\bar d_n) + o(\tau_n^2).$$

Рассмотрим $Q_{n,1}(\bar d_n)$ отдельно. Из Леммы 4.3 работы [7] следует, что

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar d_n\} = \frac{t}{\pi\sqrt{n}} \int_{|s| < \frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} g_{n,0}(s)\Big(\sum_{-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} \le \zeta \le \bar d_n} e^{-is\zeta}\Big) ds,$$

$$\sum_{-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} \le \zeta \le \bar d_n} e^{-is\zeta} = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} e^{-is(-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} + \frac{2t}{\sqrt{n}}\nu)} =$$

$$= e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n})}\Big(1 + \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\cos\frac{2st}{\sqrt{n}}\nu - i\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sin\frac{2st}{\sqrt{n}}\nu\Big) = \frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{2i\sin\frac{st}{\sqrt{n}}}.$$

В таком случае имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar d_n\} = \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} g_{n,0}(s)\Big(\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{2i\sin\frac{st}{\sqrt{n}}}\Big)ds.$$

Аналогично, в случае альтернативы получаем формулу обращения

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le \bar d_n\} = \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}} g_{n,1}(s)\Big(\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{2i\sin\frac{st}{\sqrt{n}}}\Big)ds. \quad (3.16)$$

Обозначим через

$$\bar g_{n,0}(s) \equiv e^{-is\frac{t^2}{2}-\frac{s^2t^2}{2}},$$

$$\bar g_{n,1}(s) \equiv e^{is\frac{t^2}{2}-\frac{s^2t^2}{2}} - \frac{ist^3}{2\sqrt{n}}e^{is\frac{t^2}{2}-\frac{s^2t^2}{2}}.$$

Поскольку в случае гипотезы рассуждения работы [7] применяются непосредственно, то подробного изучения требует случай альтернативы.

В (3.16) обозначим

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le \bar d_n\} = \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\Big(\int_{-\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}}^{-\frac{\sqrt{n}}{3t}} + \int_{-\frac{\sqrt{n}}{3t}}^{\frac{\sqrt{n}}{3t}} + \int_{\frac{\sqrt{n}}{3t}}^{\frac{\pi\sqrt{n}}{2t}}\Big) \equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

где с учетом (3.15)

$$I_1 + I_3 = \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Теперь

$$I_2 = \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\sqrt{n}}{3t}}\big(g_{n,1}(s) - \bar g_{n,1}(s)\big)\Big(\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{2i\sin\frac{st}{\sqrt{n}}}\Big)ds +$$

$$+ \frac{t}{\pi\sqrt{n}}\int_{|s|<\frac{\sqrt{n}}{3t}}\bar g_{n,1}(s)\Big(\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{2i\sin\frac{st}{\sqrt{n}}}\Big)ds \equiv I_2' + I_2''.$$

Из Леммы 3.2 (ii) имеем

$$I_2' = o(n^{-1/2}).$$

Используя разложение $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x)$ для $|x| \le \frac{\pi}{2}$, получаем

$$I_2'' = \frac{t}{2\pi\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{t}\int_{|s|<\frac{\sqrt{n}}{3t}}\bar g_{n,1}(s)\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{is}ds + \mathcal{O}(n^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar g_{n,1}(s)\frac{e^{-is(-\frac{t^2}{2}-t\sqrt{n}-\frac{t}{\sqrt{n}})} - e^{-is(\bar d_n+\frac{t}{\sqrt{n}})}}{is}ds + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Последняя формула обращения дает

$$I_2'' = \bar{G}_{n,1}\big(\bar{d}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\big) - \bar{G}_{n,1}\big(-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} - \frac{t}{\sqrt{n}}\big) + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

и окончательно, применяя похожие рассуждения в случае гипотезы, имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar{d}_n\} = \bar{G}_{n,0}\big(\bar{d}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\big) - \bar{G}_{n,0}\big(-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} - \frac{t}{\sqrt{n}}\big) + o(n^{-1/2}),$$

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le \bar{d}_n\} = \bar{G}_{n,1}\big(\bar{d}_n + \frac{t}{\sqrt{n}}\big) - \bar{G}_{n,1}\big(-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{n} - \frac{t}{\sqrt{n}}\big) + o(n^{-1/2}),$$

где

$$\bar{G}_{n,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u+\frac{t^2}{2})^2}{2t^2}}du = \Phi\Big(\frac{x+\frac{t^2}{2}}{t}\Big),$$

$$\bar{G}_{n,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\frac{t^2}{2})^2}{2t^2}}du + \frac{t^2}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\frac{t^2}{2})^2}{2t^2}} =$$

$$= \Phi\Big(\frac{x-\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + \frac{t^2}{2\sqrt{n}}\varphi\Big(\frac{x-\frac{t^2}{2}}{t}\Big).$$

Из свойств функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$, а также из ограниченности $\bar{d}_n$ (см. 3.11) имеем

$$\mathsf{P}_{n,0}\{S_n \le \bar{d}_n\} = \Phi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}),$$

$$\mathsf{P}_{n,1}\{S_n \le \bar{d}_n\} = \Phi\Big(\frac{\bar{d}_n-\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + \Big(\frac{t^2}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n-\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}).$$

Для случайной величины Λ_n можно сразу применить теоремы работы [5] об асимптотическом разложении функций распределения при гипотезе и альтернативе (см. также Лемму 3.2 работы [3])

$$\mathsf{P}_{n,0}\{\Lambda_n < \bar{d}_n\} = \Phi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{\bar{d}_n-\frac{t^2}{2}}{t}\Big)\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}),$$

$$\mathsf{P}_{n,1}\{\Lambda_n < \bar{d}_n\} = \Phi\Big(\frac{\bar{d}_n-\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + \frac{t}{6\sqrt{n}}\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big)\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n-\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(n^{-1/2}).$$

Из асимптотических разложений и из (3.11) имеем

$$Q_{n,1}(\bar{d}_n) = \frac{t^2}{3}\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big) + o(1).$$

Из (2.12) и (2.13) окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\mathsf{E}[\Delta^2 \mid \Lambda = \bar{d}_n]p(\bar{d}_n) = \frac{1}{2}\mathsf{E}\Delta^2 p(\bar{d}_n) = \frac{t^2}{3}\varphi\Big(\frac{\bar{d}_n+\frac{t^2}{2}}{t}\Big),$$

что завершает доказательство. □

4. Заключение

Справедливость формулы (2.6) в случае распределения Лапласа подтверждалась в ранних работах (см. [2], [3]) либо на эвристическом уровне, либо с использованием специфической техники асимптотических разложений для мощности асимптотически оптимального критерия. В настоящей работе в доказательстве Теоремы 2.4 содержится общий алгоритм вычисления нормированной разности мощностей критериев, который может быть применен ко всем случаям, когда статистика асимптотически оптимального критерия имеет решетчатый характер. Заметим также, что все доказательства настоящей работы, касающиеся асимптотических разложений, могут быть продолжены до любого порядка. Все это дает предпосылки для формулировки Теоремы 2.4 в общем виде. Задача вычисления нормированной разности мощностей критериев имеет практическое применение в расчете дефекта асимптотически оптимального критерия (см. раздел 1.5.3 работы [1] и литературу там).

Автор выражает благодарность профессору Бенингу Владимиру Евгеньевичу за внимание и рекомендации, используемые при подготовке данной работы.

Список литературы

[1] Bening V. E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses. – VSP, Utrecht, 2000, 277 p.

[2] Королев Р. А., Тестова А. В., Бенинг В. Е. О мощности асимптотически оптимального критерия в случае распределения Лапласа. // Вестник Тверского государственного университета, серия Прикладная математика, 2008, выпуск 8, номер 4(64), стр. 5 – 23.

[3] Королев Р. А., Бенинг В. Е. Асимптотические разложения для мощностей критериев в случае распределения Лапласа. // Вестник Тверского государственного университета, серия Прикладная математика, 2008, выпуск 3(10), номер 26(86), стр. 97 – 107.

[4] Albers W. Asymptotic Expansions and the Deficiency Concept in Statistics.– Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1974, 145 p.

[5] Chibisov D. M., van Zwet W. R. On the Edgeworth Expansion for the Logarithm of the Likelihood Ratio. I. // Теория Вероятностей и ее Применения, 1984, том 29, выпуск 3, стр. 417 – 439.

[6] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.– М.: Наука, 1987, 320 с.

[7] Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. // Acta Math., 1945, volume 77, p. 1 – 125.