УДК 519.214.8

О ПОЛНОЙ СХОДИМОСТИ СУММ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Герасимов М.Ю.
Факультет вычислительной математики и кибернетики,
МГУ им М.В. Ломоносова, Москва

Поступила в редакцию 26.10.2009, после переработки 20.01.2010.

Теоремы Ердеша и Хейди о полной сходимости сумм независимых одинаково распределенных случайных величин обобщены на отрицательно ассоциированные случайные величины. Доказательство основано на новом максимальном неравенстве для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин.

Theorems of Erdös and Heyde on complete convergence for sums of independent identically distributed random variables are generalized for negatively associated random variables. The crucial role in our proving plays a new maximal inequality for sums of negatively associated random variables.

Ключевые слова: отрицательно ассоциированные случайные величины, центральная предельная теорема, полная сходимость.
Keywords: negatively associated random variables, central limit theorem, complete convergence.

1. Введение

Пусть одинаково распределенные независимые случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Ердеш [1] доказал, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n| > \varepsilon n\}$ сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 < \infty$. Хейди [2] дополнил теорему Ердеша утверждением, что $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 EN_\varepsilon = E|X_1 - EX_1|^2$, где $N_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|S_n| > \varepsilon n\}}$. Символ I_A обозначает индикаторную функцию множества A. Теорему Ердеша можно усилить в следующем виде: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\max_{1 \le k \le n} |S_k| > \varepsilon n\}$ сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $EX_1 = 0$ и $E|X_1^2| < \infty$. Усиленная теорема Ердеша является частным случаем общей теоремы [3].

Целью нашей статьи является обобщение теоремы Хейди на отрицательно ассоциированные случайные величины. Мы докажем также аналог теоремы Хейди, который является новым даже для независимых случайных величин. Доказательство наших утверждений основано на оценках вероятностей больших уклонений для максимальных сумм отрицательно ассоциированных случайных величин. Они представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес. С их помощью можно обобщить усиленный вариант теоремы Ердеша в части достаточности. Напомним определение и некоторые свойства отрицательно ассоциированных случайных величин. Здесь и далее предполагается, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются отрицательно ассоциированными, если для любых непустых непересекающихся подмножеств $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $B = \{j_1, \ldots, j_m\}, k + m \leq n$, множества $\{1, \ldots, n\}$ и для любых покоординатно возрастающих вещественных функций $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ и $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty\}$ выполняется неравенство

$$E\big(f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})g(X_{j_1}, \ldots, g(X_{j_m})\big) \leq Ef(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})Eg(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}),$$

если указанные математические ожидания конечны. Случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, называются отрицательно ассоциированными, если для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ отрицательно ассоциированы.

Многие утверждения об асимптотическом поведении сумм независимых случайных величин справедливы для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин. Например, доказательство усиленных законов больших чисел Колмогорова для независимых случайных величин с незначительными изменениями переносится на отрицательно ассоциированные случайные величины. С другой стороны, имеются разительные отличия. Например, центральная предельная теорема для последовательности одинаково распределенных отрицательно ассоциированных случайных величин с конечными дисперсиями может не выполняться. Хорошо известно, что для независимых случайных величин с указанными свойствами центральная теорема имеет место. Нам понадобится один вариант центральной предельной теоремы.

Теорема A. *Если одинаково распределенные отрицательно ассоциированные случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1$ и $E(X_k X_m) = 0$ для любых $k, m \in \mathbb{N}, k \neq m$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n < x\sqrt{n}\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Обратим внимание, что условие ортогональности $E(X_k X_m) = 0$ для $k \neq m$, не следует из отрицательной ассоциированности случайных величин X_k и X_m. Отрицательная ассоциированность влечет только неравенство $E(X_k X_m) \leq 0$. Теорему можно вывести из общей центральной предельной теоремы [4]. В указанной статье можно найти ссылки на обзоры свойств отрицательно ассоциированных случайных величин.

Из теоремы A следует слабая сходимость некоторых функционалов от последовательных сумм $S_n, n \in \mathbb{N}$. Нам понадобится предельная теорема для текущих максимальных сумм.

Теорема B. *Если одинаково распределенные отрицательно ассоциированные случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1$ и $E(X_k X_m) = 0$ для любых $k, m \in \mathbb{N}, k \neq m$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\max_{1\leq k\leq n} S_k < x\sqrt{n}\} = G(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-u^2/2} du$$

для любого $x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Теорему B можно вывести из теоремы A, придерживаясь доказательства этого утверждения для независимых случайных величин. Теорему B можно также вывести в качестве следствия принципа инвариантности для отрицательно ассоциированных случайных величин [5].

2. Основные утверждения

В этом разделе мы будем иметь дело с одинаково распределенными отрицательно ассоциированными случайными величинами $X_n, n \in \mathbb{N}$ с конечными вторыми моментами. Обозначим $S_n = X_1 + \cdots + X_n, N_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|S_n - ES_n| > \varepsilon n\}}, K_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\max_{1\le k\le n}(S_k - ES_k) > \varepsilon n\}}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема. *Если* $EX_1^2 < \infty$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - kEX_1| > n\varepsilon\} < \infty, \forall\varepsilon > 0. \tag{1}$$

Если $EX_1^2 < \infty$ *и* $E(X_k X_m) = EX_k EX_m$ *для любых* $k, m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 EN_\varepsilon = E(X_1 - EX_1)^2, \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 EK_\varepsilon = E(X_1 - EX_1)^2. \tag{3}$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, $EX_n = 0$ и $EX_n^2 = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Сначала мы докажем утверждение (1). Определим случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N}$, положив

$$Y_n = \begin{cases} \varepsilon n/16, & \text{если } X_n > \varepsilon n/16, \\ X_n, & \text{если } |X_n| \le \varepsilon n/16, \\ -\varepsilon n/16, & \text{если } X_n < -\varepsilon n/16. \end{cases}$$

Случайная величина Y_n является функцией $Y_n = f_n(X_n)$ случайной величины X_n, где $f_n(x) = -\varepsilon n/16$, если $x < -\varepsilon n/16$, $f_n(x) = x$, если $|x| < \varepsilon n/16$, $f_n(x) = \varepsilon n/16$, если $x > \varepsilon n/16$. Функция f_n возрастает. Поэтому случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N}$, отрицательно ассоциированы. Обозначим $\widetilde{S_n} = Y_1 + \cdots + Y_n$. Вероятность $P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > n\varepsilon\}$ можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > n\varepsilon\} &= P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - E\widetilde{S_n} + E\widetilde{S_n}| > n\varepsilon\} \\ &\le P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon - \max_{1\le k\le n} |E\widetilde{S_n}|\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{1\le k\le n} |E\widetilde{S_k}|}{n} = 0. \tag{5}$$

Из определения случайной величины Y_n следует, что

$$EY_n = \int_{\{|X_n|\le\varepsilon n/16\}} X_n dP + \frac{\varepsilon n}{16} P\{X_n > \varepsilon n/16\} - \frac{\varepsilon n}{16} P\{X_n < -\varepsilon n/16\}.$$

Так как $E|X_1| < \infty$, то $nP\{|X_n| > \varepsilon n/16\} = nP\{|X_1| > \varepsilon n/16\} \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме об ограниченной сходимости мы получим

$$\int_{\{|X_n| \le \varepsilon n/16\}} X_n dP = \int_{\{|X_1| \le \varepsilon n/16\}} X_1 dP \to \int_{\Omega} X_1 dP = EX_1 = 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} EY_n = 0$. Здесь мы воспользовались тем, что случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены. Для любого $\delta > 0$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что будет выполняться неравенство $|EY_n| < \delta$ для всех $n \ge n_0$. Для любого $n > n_0$ справедлива оценка

$$|E\widetilde{S_n}| \le \sum_{k=1}^{n_0} |EY_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |EY_k| \le \sum_{k=1}^{n_0} |EY_k| + n\delta$$

и, следовательно, $\limsup_{n\to\infty} |E\widetilde{S_n}|/n \le \delta$. Так как число $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, то $\lim_{n\to\infty} |E\widetilde{S_n}|/n = 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что выполняется неравенство $|E\widetilde{S_n}|/n < \delta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ больше некоторого n_0'. Если $n > n_0'$, то $\max_{1\le k\le n} |E\widetilde{S_k}| \le \max_{1\le k\le n_0'} |E\widetilde{S_k}| + n\delta$ и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{1\le k\le n} |E\widetilde{S_k}|}{n} \le \delta.$$

Отсюда следует (5), так как число $\delta > 0$ можно взять произвольно малым.

Из (4) и (5) вытекает неравенство

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > n\varepsilon\} \le P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} \tag{6}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ больше некоторого n_0''. Далее предполагается, что $n > n_0''$. Вероятность справа можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} &= P\{\{\max_{1\le k\le n} |\widetilde{S_k} - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} \cap \cap_{k=1}^{n} \{X_k = Y_k\}\} \\ &+ P\{\{\max_{1\le k\le n} |S_k - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} \cap (\cup_{k=1}^{n} \{X_k \ne Y_k\})\} \\ &\le P\{\max_{1\le k\le n} |\widetilde{S_n} - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} + P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon n/16\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $\sigma_k^2 = E(Y_k - EY_k)^2, k = 1, \ldots, n, \sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Заметим, что $|Y_k - EY_k| \le n\varepsilon/8$ для $k = 1, \ldots, n$. По лемме 1 выполняется неравенство

$$P\{\max_{1\le k\le n} |\widetilde{S_n} - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} \le 2e \exp\{-2Arsh(n^2\varepsilon^2/(32\sigma^2)\}. \tag{8}$$

В лемме 1 следует положить $x = n\varepsilon/2$ и $c = n\varepsilon/8$.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 1. \tag{9}$$

Выше было доказано, что $EY_n \to EX_1 = 0$ при $n \to \infty$. С помощью похожих рассуждений можно доказать, что $\sigma_n^2 = EY_n^2 \to EX_1^2 = 1$ при $n \to \infty$. Отсюда следует (9) и, следовательно, выполняется неравенство $n/\sigma^2 > 1/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ больше некоторого $n_0''' > n_0''$. Отсюда и из (8) следует, что

$$P\{\max_{1\le k\le n} |\widetilde{S_n} - E\widetilde{S_k}| > n\varepsilon/2\} \le 2e\exp\{-2Arsh(n\varepsilon^2/64)\}$$
$$\le 2e\exp\{-2\ln(n\varepsilon^2/64\} = (2e64^2)/(\varepsilon^4 n^2) \quad (10)$$

для всех $n \ge n_0'''$. Вероятность $P\{\max_{1\le k\le n}|X_k| > \varepsilon n/16\}$ можно оценить следующим образом

$$P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon n/16\} \le \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > \varepsilon n/16\} = nP\{|X_1| > \varepsilon n/16\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены. Из этой оценки и из (6),(7),(10) следует, что

$$\sum_{n=n_0'''}^{\infty} P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > n\varepsilon\} \le (2e64^2\varepsilon^{-4}) \sum_{n=n_0'''}^{\infty} 1/n^2 + \sum_{n=n_0'''}^{\infty} nP\{|X_n| > \varepsilon n/16\}. \quad (11)$$

Обозначим через $[x]$ целую часть вещественного числа x. Последний ряд можно оценить следующим образом

$$\sum_{n=n_0'''}^{\infty} nP\{|X_1| \ge \varepsilon n/16\} \le \sum_{n=n_0'''} n \sum_{k=[n/16]}^{\infty} \int_{k\varepsilon\le x<(k+1)\varepsilon} dP\{|X_1| < x\}$$
$$= \sum_{k=[n_0'''/16]} \int_{k\varepsilon\le x<(k+1)\varepsilon} dP\{|X_1| < x\} \sum_{n=1}^{k} n$$
$$\le \sum_{k=[n_0'''/16]} k^2 \int_{k\varepsilon\le x<(k+1)\varepsilon} dP\{|X_1| < x\}$$
$$\le \varepsilon^{-2} \sum_{k=[n_0'''/16]} \int_{k\varepsilon\le x<(k+1)\varepsilon} x^2 dP\{|X_1| < x\}$$
$$= \varepsilon^{-2} \int_{[n_0'''/16]}^{\infty} x^2 dP\{|X_1| < x\}.$$

В результате мы получили следующую оценку

$$\sum_{n=n_0'''} nP\{|X_1| \ge \varepsilon n/16\} \le \varepsilon^{-2} \int_{[n_0'''/16]}^{\infty} x^2 dP\{|X_1| < x\}. \quad (12)$$

Утверждение (1) следует из (11) и (12).

Докажем утверждение (2). Обозначим Φ стандартную нормальную функцию распределения из теоремы A. Запишем $\varepsilon^2 EN_\varepsilon$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 EN_\varepsilon &= \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n| > n\varepsilon\} \\ &= \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})) + 2\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(-\varepsilon\sqrt{n}).\end{aligned}$$

В силу (23) из леммы 2 достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})) = 0. \tag{13}$$

Запишем ряд в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})) &= \sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})) \\ &+ \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})),\end{aligned} \tag{14}$$

где k – произвольное натуральное число. По теореме A $\lim_{n\to\infty} P\{S_n < x\sqrt{n}\} = \Phi(x)$ для любого вещественного числа x. Отсюда следует (см. теорема 11, [6], стр. 26), что $\lim_{n\to\infty} \sup_x |P\{S_n < x\} - \Phi(x)| = 0$. Поэтому $\Delta_n = \sup_\varepsilon |P\{|S_n| > \varepsilon n\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого $\delta > 0$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\Delta_n < \delta/k$ для всех $n \geq n_0$. Из неравенств

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \Big| \sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}))\Big| &\leq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]} \Delta_n \\ &= \varepsilon^2 \Big(\sum_{n=1}^{n_0} \Delta_n + \sum_{n=n_0+1}^{[\varepsilon^{-2}k]} \Delta_n \Big) \leq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{n_0} \Delta_n + \delta\end{aligned}$$

следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \Big| \sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}))\Big| \leq \delta.$$

Так как число $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]} (P\{|S_n| > n\varepsilon\} - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})) = 0. \tag{15}$$

Положив $n_0''' = [\varepsilon^{-2}k]$ в (11) и (12), мы получим

$$\varepsilon^2 \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} P\{|S_n| > \varepsilon n\} \leq (2e64^2\varepsilon^{-2}) \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \int_{[\varepsilon^{-2}k/16]}^{\infty} x^2 dP\{|X_1| < x\}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}P\{|S_n|>n\varepsilon\}=0.$$

Это соотношение вместе с (22) из леммы 2 влекут

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon^2\Big|\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}(P\{|S_n|>n\varepsilon\}-2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}\})\Big|\le$$
$$\le\lim_{k\to\infty}\varepsilon^2\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}P\{|S_n|>n\varepsilon\}+2\lim_{k\to\infty}\varepsilon^2\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}\})=0.$$

Принимая во внимание (14) и (15), мы получим (13).

Докажем утверждение (3). Доказательство похоже на доказательство утверждения (2). Обозначим через G функцию распределения из теоремы B. Запишем $\varepsilon^2 EK_\varepsilon$ в следующем виде

$$\varepsilon^2 EK_\varepsilon=\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}=$$
$$=\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})))+\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}(1-G(\varepsilon\sqrt{n})).$$

Заметим, что $1-G(\varepsilon\sqrt{n}))=2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})$. В силу леммы 2 достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})))=0. \tag{16}$$

Запишем ряд в виде двух слагаемых

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})))=$$
$$=\sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})))+ \tag{17}$$
$$+\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n}))),$$

где k – произвольное натуральное число. По теореме B $\lim_{n\to\infty}P\{\max_{1\le k\le n}S_k<x\sqrt{n}\}=G(x)$ для любого вещественного числа x. Отсюда следует (см. теорема 11, [6], стр. 26), что $\lim_{n\to\infty}\sup_x|P\{\max_{1\le k\le n}S_k<x\sqrt{n}\}-\Phi(x)|=0$. Поэтому $\Delta_n'=\sup_\varepsilon|P\{\max_{1\le k\le n}S_k|>\varepsilon n\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})|\to 0$ при $n\to\infty$. С помощью рассуждений, которые привели нас к (15), можно доказать, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{[\varepsilon^{-2}k]}(P\{\max_{1\le k\le n}S_k>n\varepsilon\}-(1-G(\varepsilon\sqrt{n})))=0. \tag{18}$$

Положив $n_0''' = [\varepsilon^{-2}k]$ в (11) и (12), мы получим, что

$$\varepsilon^2 \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} P\{\max_{1\le k\le n} S_k > \varepsilon n\} \le (2e64^2\varepsilon^{-4}) \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]} \frac{1}{n^2} + \int_{[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} x^2 dP\{|X_1| < x\}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} P\{\max_{1\le k\le n} S_k > n\varepsilon\} = 0.$$

В силу равенства $1 - G(\varepsilon\sqrt{n}) = 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})$ и (22) из леммы 2 мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^2 \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} (1 - G(\varepsilon\sqrt{n})) = 0.$$

Из приведенных соотношений следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty} (P\{\max_{1\le k\le n} S_k > n\varepsilon\} - (1 - G(\varepsilon\sqrt{n}\})) = 0.$$

Принимая во внимание (17) и (18), мы получим (16). Теорема доказана.

3. Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы будем иметь дело с отрицательно ассоциированными случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$. Предположим, что они удовлетворяют условиям $|X_k| \le c$ и $EX_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и для некоторого числа $c > 0$. Обозначим $\sigma^2 = EX_1^2 + \cdots + EX_n^2$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $k = 1, \ldots, n$. $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$, – гиперболический косинус, $Arcsh\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ – гиперболический арксинус. Гиперболический арксинус является функцией, обратной к гиперболическому синусу $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Лемма 1. *Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяют перечисленным условиям, то для любого $x > 0$*

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > x\} \le 2\exp\{-Q(x,c,\sigma)\} \le 2\exp\left\{-\frac{x}{2c} Arcsh(xc/2\sigma^2)\right\}. \tag{19}$$

Доказательство. Для любого $h > 0$ по неравенству Маркова мы получим

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > x\} = P\{\operatorname{ch}(h \max_{1\le k\le n} |S_k|) > \operatorname{ch}(hx)\} \le \frac{E\operatorname{ch}(h\max_{1\le k\le n}|S_k|)}{\operatorname{ch}(hx)}.$$

В статье [7] доказано неравенство $E\operatorname{ch}(h\max_{1\le k\le n}|S_k|) \le E\operatorname{ch}(h\max_{1\le k\le n}|\bar{S}_k|)$, где $\bar{S}_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ – сумма независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$ таких, что для любого $j = 1, \ldots, n$ случайные величины ξ_j и X_j имеют одинаковое распределение. В результате мы получим неравенство

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > x\} \le \frac{E\operatorname{ch}(h\max_{1\le k\le n}|\bar{S}_k|)}{\operatorname{ch}(hx)}. \tag{20}$$

Частичные суммы $\bar{S}_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, k = 1, \dots, n$, образуют мартингал относительно фильтрации $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k), k = 1, \dots, n$. По неравенству Дуба ([8], стр. 285) мы имеем $E(\max_{1\le k\le n} |\bar{S}_k|^r) \le (r/(r-1)^r E|\bar{S}_n|^r$ для любого числа $r > 1$. Заметим, что $\mathrm{ch}(|x|) = \mathrm{ch}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. С учетом этого замечания мы получим

$$E\,\mathrm{ch}(h \max_{1\le k\le n} |\bar{S}_k|) = E\,\mathrm{ch}(h \max_{1\le k\le n} \bar{S}_k) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E \max_{1\le k\le n} |h\bar{S}_k|^{2r}}{(2r)!} \le$$

$$\le 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r/(2r-1))^{2r} E|h\bar{S}_n|^{2r}}{(2r)!} \le$$

$$\le e\bigl(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E|h\bar{S}_n|^{2r}}{(2r)!}\bigr) = eE\,\mathrm{ch}(h\bar{S}_n).$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством $(2r/(2r-1))^{2r} < e$. Отсюда и из (20) следует, что

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > x\} \le e\frac{E\,\mathrm{ch}(h\bar{S}_n)}{\mathrm{ch}(hx)} \le ee^{-hx}\bigl(Ee^{h\bar{S}_n} + Ee^{-h\bar{S}_n}\bigr). \qquad (21)$$

Далее мы будем следовать рассуждениям из статей [9] и [10]. Так как случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, то $Ee^{h\bar{S}_n} = \prod_{k=1}^n Ee^{h\xi_k}$. В силу неравенств $\alpha \le e^{\alpha-1}$ и $e^\alpha - 1 - \alpha \le 2(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ мы получим

$$Ee^{h\bar{S}_n} = \prod_{k=1}^n Ee^{h\xi_k} \le \prod_{k=1}^n \exp\bigl\{E(e^{h\xi_k} - 1\bigr\} = \exp\bigl\{\sum_{k=1}^n E(e^{h\xi_k} - 1 - h\xi_k)\bigr\} \le$$

$$\le \exp\bigl\{2\sum_{k=1}^n E(\mathrm{ch}(h\xi_k) - 1)\bigr\}.$$

Положим $f(\alpha) = (\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\alpha^{-2}$ для $\alpha \ne 0$ и $f(0) = 1/2$. Функция f непрерывна на вещественной прямой и четна. Она возрастает на положительной полупрямой, так ее производная $f'(\alpha) = (\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha - 2(\mathrm{ch}\,\alpha - 1))\alpha^{-3}$ принимает неотрицательные значения для всех $\alpha > 0$. Убедимся в этом. Первые две производные функции $\lambda(\alpha) = \alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha - 2\,\mathrm{ch}\,\alpha + 2$ равны $\lambda'(\alpha) = \alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha - \mathrm{sh}\,\alpha$ и $\lambda''(\alpha) = \alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha$. Так как $\lambda''(\alpha) \ge 0$ и $\lambda'(0) = 0$, то $\lambda'(\alpha) \ge 0$. Поэтому функция $\lambda(\alpha)$ возрастает. Так как $\lambda(0) = 0$, то $\lambda(\alpha) \ge 0$ и, следовательно, $f'(\alpha) \ge 0$ для всех $\alpha > 0$.

Так как $|\xi_k| \le c$ для всех $k = 1, \dots, n$, то

$$\mathrm{ch}(h\xi_k) - 1 = (\mathrm{ch}(h\xi_k - 1)(h\xi_k)^{-2}(h\xi_k)^2 \le (\mathrm{ch}(hc) - 1)c^{-2}\xi_k^2$$

и, следовательно,

$$Ee^{h\bar{S}_n} \le \exp\bigl\{2\sum_{k=1}^n E(\mathrm{ch}(hc) - 1)c^{-2}\xi_k^2\bigr\} = \exp\bigl\{2(\mathrm{ch}(hc) - 1)c^{-2}\sigma^2\bigr\}.$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$Ee^{-h\bar{S}_n} \le \exp\bigl\{2(\mathrm{ch}(hc) - 1)c^{-2}\sigma^2\bigr\}.$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\}\le 2e\exp\big\{-hx+2(\mathrm{ch}(hc)-1)c^{-2}\sigma^2\big\}.$$

Показатель в экспоненте принимает свое минимальное значение $-Q(x,c,\sigma)$ при $h=(x/c)Arcsh(xc/2\sigma^2)$. Тем самым доказано первое неравенство в (19). Второе неравенство доказано в [10]. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* Φ *обозначает стандартную нормальную функцию распределения. Справедливы следующие утверждения*

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n>[\varepsilon^{-2}k]}\Phi\{-\varepsilon\sqrt{n}\}=0, \tag{22}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})=1/2. \tag{23}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение (22). С помощью интегрирования по частям можно доказать равенство

$$\int_x^\infty e^{-u^2/2}du=\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}du, x>0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_x^\infty e^{-u^2/2}du<\frac{1}{x}e^{-x^2/2}, x>0.$$

В силу этой оценки мы получим

$$\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^\infty e^{-u^2/2}du<\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\varepsilon^2/2}<$$

$$<\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi[\varepsilon^{-2}k]}}\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}e^{-n\varepsilon^2/2}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi[\varepsilon^{-2}k]}}\frac{e^{-\varepsilon^2[\varepsilon^{-2}k]/2}}{1-e^{-\varepsilon^{-2}/2}}.$$

Так как $\varepsilon^2[\varepsilon^{-2}k]\to k$ и $(1-e^{-\varepsilon^2/2})\varepsilon^{-2}\to 1/2$ при $\varepsilon\to 0$, то

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})\le\lim_{k\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi[\varepsilon^{-2}k]}}\frac{\varepsilon^2e^{-\varepsilon^2[\varepsilon^{-2}k]/2}}{1-e^{-\varepsilon^{-2}/2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi k}}e^{-k/2}=0.$$

Утверждение (22) доказано.

Утверждение (23) доказано в статье [11]. Ради полноты изложения мы приведем наше собственное доказательство. Обозначим $a_n=\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n+1}}e^{-u^2/2}du$. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^\infty e^{-u^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}na_n.$$

Так как функция $e^{-u^2/2}, u>0$, убывает, то

$$\varepsilon n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})e^{-\varepsilon^2(n+1)/2}<na_n<\varepsilon n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

В силу соотношений

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \le \frac{1}{2\sqrt{n}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

мы получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)e^{-\varepsilon^2(n+1)/2} < na_n < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}e^{-\varepsilon^2 n/2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^2(n+1)/2} - \frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}e^{-\varepsilon^2(n+1)/2} <$$

$$< \varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}) < \frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

С помощью рассуждений из доказательства утверждения (22) можно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}e^{-\varepsilon^2(n+1)/2} = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^2 n/2} < \frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\varepsilon^2/2}\int_n^{n+1}\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2 u/2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\varepsilon^2/2}\int_{\varepsilon^2/2}^{\infty}\sqrt{u}e^{-u}du.$$

Отсюда и из предыдущих соотношений следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}) \le \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\varepsilon^2/2}\int_{\varepsilon^2/2}^{\infty}\sqrt{u}e^{-u}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{u}e^{-u}du = 1/2, \tag{24}$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^2(n+1)/2} \le \liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}). \tag{25}$$

Доказательство последнего равенства в (24) можно найти в ([12], стр. 754 и 747). Производная функции $\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2 u/2}, u > 0$, равна $u^{-1/2}e^{-\varepsilon^2 u/2}(1-\varepsilon^2 u)$. Поэтому функция $\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2 u/2}$ возрастает на отрезке $(0, \varepsilon^{-2}]$ и убывает на полупрямой $(\varepsilon^{-2}, \infty)$ и, следовательно,

$$\int_n^{n+1}\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2 u/2}du \le \begin{cases} \sqrt{n+1}e^{-\varepsilon^2(n+1)/2}, \text{ если } n+1 \le \varepsilon^{-2}, \\ \sqrt{n}e^{-\varepsilon^2 n/2}, \text{ если } n > \varepsilon^{-2}. \end{cases}$$

С помощью этих неравенств мы получим

$$\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^3(n+1)/2}=\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\varepsilon^3 n/2}$$

$$\geq\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}\Big(\sum_{n\leq\varepsilon^{-2}}\int_{n-1}^{n}\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2u/2}du+\sum_{n>\varepsilon^{-2}}\int_{n}^{n+1}\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2u/2}du\Big)$$

$$=\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}\int_{1}^{\infty}\sqrt{u}e^{-\varepsilon^2u/2}du=\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}\int_{\varepsilon^2/2}^{\infty}\sqrt{u}e^{-u}du.$$

Отсюда следует, что нижний предел в (25) больше или равен 1/2. Утверждение (23) является следствием утверждений (24) и (25). Лемма доказана.

Лемма 3. *Мы имеем*

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-2}\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-2}}{n^2}\leq\frac{\varepsilon^{-2}}{[\varepsilon^{-2}k]}+\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\varepsilon^{-2}}{u^2}du=\frac{\varepsilon^{-2}}{[\varepsilon^{-2}k]}+\int_{[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-2}}{u^2}du=\frac{2\varepsilon^{-2}}{[\varepsilon^{-2}k]}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-2}\sum_{n=[\varepsilon^{-2}k]}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{2\varepsilon^{-2}}{[\varepsilon^{-2}k]}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k}=0.$$

Лемма доказана.

4. Заключение

В статье доказаны аналоги теорем Ердеша и Хейди о полной сходимости сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Эти теоремы обобщены на отрицательно ассоциированные случайные величины. Доказательство основано на новом максимальном неравенстве для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин. Это неравенство само по себе представляет интерес, так как может быть применено во многих аналогичных ситуациях.

Список литературы

[1] Erdòs P. On a theorem of Hsu and Robbins. Ann. Math. Statist. 1949. **20**. P.286–291.

[2] Heyde C.C. A Supplement to the Strong Law of Large Numbers. J. Appl. Prob. 1975. **12**. P.173 – 175.

[3] Kruglov V.M., Volodin A.I. Convergence rates in the law of large numbers for arrays. Probab. and Matmem Statist., 2006, v. 1, 63 – 76.

[4] Newmen C.M. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. In Y.L. Tong (ed.), Inequalities in Statistics and Probability, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 127 – 140.

[5] Newmen C.M., Wright A.L. An invariance principle for certain dependent sequences. Ann. Probab. 1981, v. 9, № 4, 671 – 675.

[6] Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. Наука, М.: 1972.

[7] Qi-Man Shao. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables. Theor. Probab. 2000, v. 13, № 2, 343–356.

[8] Дуб Дж. Вероятностные процессы. И.Л. М.: 1956.

[9] Прохоров Ю.В. Одна экстремальная задача теории вероятностей. – Теория вероятн. и ее применен., 1959, т. 4, в. 2., 211–214.

[10] Круглов В.М. Усиление арксинус-неравенства Прохорова. – Теория вероятн. и ее применен., 2005, т. 50, в. 4., 767–774.

[11] Slivka J., Severo N.C. On the strong law of large numbers. Proc. Almer. Math. Soc. 1970. **24**. 729–734.

[12] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. изд. 7. Наука. М.:1970.