

# МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 004.942

## МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МНОГОЦЕЛЕВЫХ ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНОВ

Амирханов И.В.\* , Карамышева Г.А.\* , Киян И.Н.\* , Суликовский Я.\*\*

\*Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

\*\*Институт ядерной физики Польской Академии наук, Краков

---

*Поступила в редакцию 14.01.2010, после переработки 10.02.2010.*

---

В данной статье рассматривается методика математического моделирования режимов работы многоцелевых изохронных циклотронов, которая основывается на расчёте значений токов в главной катушке ( $I_{main}$ ) и в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля ( $I_i$ ,  $i=1, 2, \dots, z$ ). Токи в концентрических катушках рассчитываются для определённого уровня тока в главной катушке на основе разработанной авторами математической модели.

A technique of mathematical modeling of operation modes for multipurpose isochronous cyclotrons is presented. The considered procedure is based on the calculation of currents in the main coil ( $I_{main}$ ) and trim coils of correction of the main magnetic field ( $I_i$ ,  $i=1, 2, \dots, z$ ). The trim coil currents are calculated at a certain level of current in the main coil on the base of mathematical model, which was developed by authors.

**Ключевые слова:** математическая модель, метод Гаусса, число обусловленности, изохронный циклотрон.

**Keywords:** mathematical model, Gauss method, conditionality number, isochronous cyclotron.

### Введение

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений в области развития ускорительной техники является разработка, производство и эксплуатация компактных многоцелевых изохронных циклотронов. Они находят применение как в области научных исследований (производство радиоизотопов для исследований в области ядерной спектроскопии, электроядерная энергетика), так и в области медицины (производство радиоизотопов для различных видов томографии, протонная терапия раковых опухолей). Многоцелевые изохронные циклотроны используются для ускорения частиц разных типов с различными отношениями числа стандартных единиц массы к числу элементарных зарядов. Энергия вывода в таких машинах может плавно варьироваться для каждого типа ускоряемых

частиц. В связи с требованиями, предъявляемыми как физиками, так и медиками, регулярно возникает задача перехода на новые, ещё не рассчитанные режимы работы. При этом в связи с необходимостью экономии времени и ресурсов, требуется осуществить указанный переход без остановки и разборки ускорителя для проведения дополнительных магнитных измерений. В данной статье подробно рассматривается решение поставленной задачи на конкретном примере многоцелевого изохронного циклотрона АИЦ-144, расположенного в Институте Ядерной Физики Польской Академии Наук (ИЯФ ПАН) в Кракове (Польша) [1], [2]. Указанный ускоритель был построен с целью производства радиоизотопов и лечения меланомы (раковой опухоли) глаза у пациентов безоперационным путём.

Основной режим работы АИЦ-144, предназначенный для лечения пациентов, имеет следующие характеристики: ускоряемые частицы – протоны ( $p$ ), частота ВЧ-генератора –  $F_{rf}=26.155$  МГц, напряжение на дуантах –  $U_d=56$  кВ. Исходя из данных условий ускорения частиц, необходимо рассчитать токи в главной и во вложенных друг в друга концентрических катушках многоцелевого изохронного циклотрона. Токи в катушках ускорителя позволяют с определённой точностью сформировать результирующее магнитное поле  $B_{res}(r, \theta)$ , в котором и производится ускорение внутреннего пучка ионов. Это поле формируется в диапазоне рабочих радиусов от системы инжекции до системы вывода частиц. Оно представляет из себя сумму основного магнитного поля  $B_{main}(r, \theta)$  от тока в главной катушке и магнитных полей вкладов в основное магнитное поле  $B_j(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  от токов в концентрических катушках.

В любой точке медианной плоскости между полюсами главного магнита зависимость вклада рассматриваемой концентрической катушки в основное магнитное поле от текущего в ней тока предполагается линейной. Величина тока в главной катушке определяет намагниченность железа главного магнита, которая влияет на амплитуды средних магнитных полей вкладов концентрических катушек в основное магнитное поле. Усреднение магнитных полей производится по азимуту по следующей общей формуле:

$$\bar{B}_{index}(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B_{index}(r, \theta) \cdot d\theta. \quad (1)$$

Таким образом, для каждой концентрической катушки в каждой точке медианной плоскости в зависимости от уровня тока в главной катушке берётся своя линейная зависимость вклада рассматриваемой концентрической катушки от текущего в ней тока, что необходимо учитывать при расчёте новых режимов работы.

Для того, чтобы сформировать требуемое магнитное поле, необходимо решить обратную задачу расчёта токов в главной и в концентрических катушках многоцелевого изохронного циклотрона. При этом используются следующие средние магнитные поля:

$$\bar{B}_{task}(r) = \bar{B}_{is}(r) + \bar{B}_{bump}(r) + \bar{B}_{edge}(r), \quad (2)$$

$$\bar{B}_{start}(r) = \bar{B}_{main}(r) + \sum_{j=1}^m \bar{B}_{j,const}(r), \quad (3)$$

$$\bar{B}_{j,const}(r) = \bar{B}_{j,max}(r) \cdot \frac{I_{j,const}}{I_{j,max}}, \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $r$  – радиус;  $\bar{B}_{task}(r)$  – среднее требуемое магнитное поле;  $\bar{B}_{is}(r)$  – изохронное магнитное поле;  $\bar{B}_{bump}(r)$  – среднее магнитное поле центрального бампа;  $\bar{B}_{edge}(r)$  – среднее краевое магнитное поле;  $\bar{B}_{start}(r)$  – среднее исходное магнитное поле;  $\bar{B}_{main}(r)$  – среднее основное магнитное поле;  $\bar{B}_{j,const}(r)$  – среднее магнитное поле вклада  $j$ -ой концентрической катушки;  $I_{j,const}$ ,  $I_{j,max}$  – фиксированный и максимальный токи в  $j$ -ой концентрической катушке;  $m$  – число концентрических катушек, ток в которых фиксируется пользователем на любом допустимом уровне или программой на одной из границ области допустимых значений. Изохронное магнитное поле в начальном приближении рассчитывается по следующей аналитической формуле (вывод формулы на основе [3]):

$$\bar{B}_{is}(r) = \frac{m_0\omega_0}{q} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{(c/\omega_0)^2}\right)^{-1/2}, \quad (5)$$

$$\omega_0 = 2\pi F_0, \quad F_0 = \frac{F_{rf}}{H}, \quad (6)$$

где  $\omega_0$ ,  $F_0$  – это изохронная круговая и изохронная частоты обращения частиц;  $q$  – заряд частицы;  $m_0$  – масса покоя частицы;  $F_{rf}$  – частота ВЧ-генератора;  $H$  – кратность ускорения частиц.

Для расчёта нового режима работы необходимо задать следующие исходные данные: тип ускоряемых частиц, частоту ВЧ-генератора, радиус рабочей точки (радиус места пересечения среднего основного и среднего требуемого магнитных полей, выбранный в области конечных радиусов ускорения частиц), кратность ускорения, периодичность магнитной структуры (число магнитных секторов), диапазон формирования требуемого магнитного поля, а также средние магнитные поля центрального бампа и краевого магнитного поля. Кроме того, к исходным данным относятся три набора измеренных или рассчитанных для различных уровней тока в главной катушке карт магнитных полей. Каждый набор включает в себя карту основного магнитного поля  $B_{main}(r, \theta)$  от определённого тока в главной катушке и ряд карт суммарных магнитных полей  $B_{j,sum}(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  от указанного тока в главной катушке и от максимального тока в каждой из отдельно взятых концентрических катушек. Измерения карт магнитных полей производятся с определёнными шагами по радиусу  $\Delta R_{ms}$  и азимуту  $\Delta \theta_{ms}$ . Разности между соответствующими суммарными и основным магнитными полями составляют набор максимальных вкладов концентрических катушек  $B_{j,max}(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  в основное магнитное поле  $B_{main}(r, \theta)$ . Для основного режима работы АИС-144 сумма среднего магнитного поля центрального бампа  $\bar{B}_{bump}(r)$  и среднего краевого магнитного поля  $\bar{B}_{edge}(r)$  представлена на Рис. 1.

Здесь  $R_{bump}=0.155$  м – радиус конца центрального бампа;  $R_{work}=0.56$  м – радиус рабочей точки;  $R_{edge}=0.595$  м – радиус начала краевого магнитного поля;  $R_{ext}=0.62$  м – радиус заброса пучка в электростатический дефлектор (радиус экстракции пучка ускоренных ионов);  $R_{septum}=0.635$  м – радиус расположения септума (первого ножа) электростатического дефлектора.

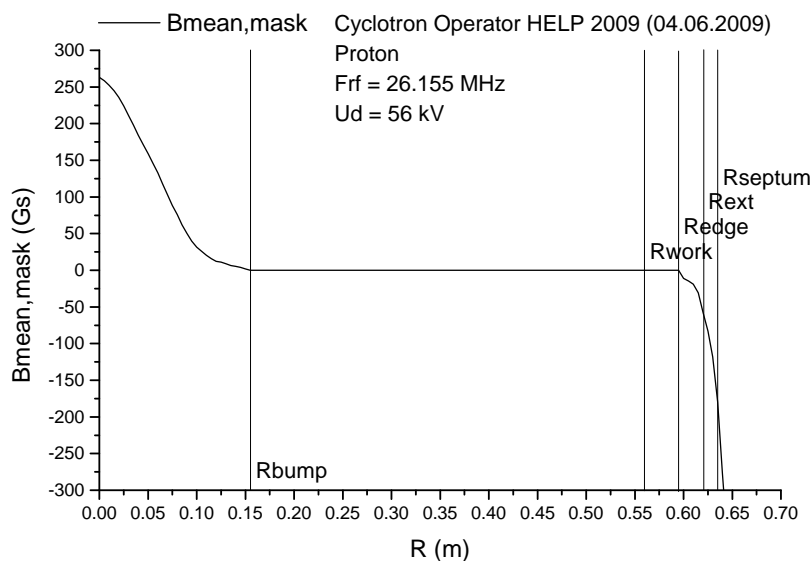


Рис. 1: Сумма средних магнитных полей.

## 1. Расчёт тока в главной катушке

Для решения задачи плавного перехода в определённом диапазоне от одного значения рабочего тока в главной катушке к другому используется интерполяция значений не только внутри, но и между картами соответствующих магнитных полей (между картами основных магнитных полей и между картами максимальных вкладов concentрических катушек). Интерполяция значений внутри использующихся карт магнитных полей выполняется по радиусу для каждого определённого азимутального направления с помощью метода кубических сплайнов [6]. Интерполяция значений между картами соответствующих магнитных полей, измеренными или рассчитанными для трёх уровней тока в главной катушке, выполняется с помощью полинома Лагранжа второй степени [6]. При моделировании новых режимов работы, благодаря интерполяции значений между соответствующими картами магнитных полей, появляется возможность избежать проведения ряда магнитных измерений основного  $B_{main}(r, \theta)$  и суммарных  $B_{j,sum}(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  магнитных полей, а также соответствующих магнитных измерений в центре циклотрона, выполняемых с целью проведения калибровки средних магнитных полей вкладов concentрических катушек. При этом отпадает связанная с этими измерениями необходимость в остановке и разборке циклотрона (для размещения внутри вакуумной камеры измерительного оборудования).

Для расчёта тока в главной катушке  $I_{main,work}$  берутся три карты основных магнитных полей  $B_{main,1}(r, \theta)$ ,  $B_{main,2}(r, \theta)$ ,  $B_{main,3}(r, \theta)$ , измеренные для трёх соответствующих уровней тока в главной катушке  $I_{main,1}$ ,  $I_{main,2}$ ,  $I_{main,3}$  ( $I_{main,1} < I_{main,2} < I_{main,3}$ ). Внутри каждой из карт основных магнитных полей с помощью метода кубических сплайнов производится интерполяция измеренных значений по

радиусу. После этого, каждая из этих карт пересчитывается для определённого шага по радиусу  $\Delta R_{calc}$ , кратного шагу их измерения по радиусу  $\Delta R_{ms}$ . Значение шага  $\Delta R_{calc} < \Delta R_{ms}$  определяется исходя из физических соображений (значений радиуса конца центрального бампа, радиуса рабочей точки, радиуса начала краевого магнитного поля, радиуса заброса пучка в электростатический дефлектор, радиуса расположения септума электростатического дефлектора). Среднее требуемое магнитное поле  $\bar{B}_{task}(r)$  рассчитывается по формуле (2). Исходя из трёх карт основных магнитных полей  $B_{main,1}(r, \theta)$ ,  $B_{main,2}(r, \theta)$ ,  $B_{main,3}(r, \theta)$  рассчитываются соответствующие средние основные магнитные поля  $\bar{B}_{main,1}(r)$ ,  $\bar{B}_{main,2}(r)$ ,  $\bar{B}_{main,3}(r)$ . Затем, в области конечных радиусов ускорения задаётся значение радиуса рабочей точки  $R_{work}$ . Например, для расчёта основного режима работы АИЦ-144 берутся следующие значения тока в главной катушке и радиуса рабочей точки:  $I_{main,1}=535$  А,  $I_{main,2}=570$  А,  $I_{main,3}=600$  А,  $R_{work}=0.56$  м. Таким образом, необходимо рассчитать такой ток в главной катушке  $I_{main,work}$ , который позволил бы сформировать карту основного магнитного поля  $B_{main,work}(r, \theta)$ , при усреднении которого, среднее основное магнитное поле  $\bar{B}_{main,work}(r)$  пересеклось бы со средним требуемым магнитным полем  $\bar{B}_{task}(r)$  в заданной рабочей точке с радиусом  $R_{work}$ . Исходя из трёх зависимостей  $\bar{B}_{main,1}(r)$ ,  $\bar{B}_{main,2}(r)$ ,  $\bar{B}_{main,3}(r)$  для заданного значения радиуса рабочей точки  $R_{work}$  находятся соответствующие значения средних магнитных полей  $\bar{B}_{main,1}(R_{work})$ ,  $\bar{B}_{main,2}(R_{work})$ ,  $\bar{B}_{main,3}(R_{work})$ . При этом полученные значения соответствуют трём определённым значениям тока в главной катушке  $I_{main,1}$ ,  $I_{main,2}$ ,  $I_{main,3}$ . С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа второй степени по трём точкам  $M_1(I_{main,1}, \bar{B}_{main,1}(R_{work}))$ ,  $M_2(I_{main,2}, \bar{B}_{main,2}(R_{work}))$ ,  $M_3(I_{main,3}, \bar{B}_{main,3}(R_{work}))$  строится зависимость  $\bar{B}_{main}(I_{main})$ , взятая для заданного значения радиуса рабочей точки  $R_{work}$ . Исходя из зависимости  $\bar{B}_{task}(r)$ , для заданного значения радиуса рабочей точки  $R_{work}$  находится соответствующее значение среднего магнитного поля  $\bar{B}_{task}(R_{work})$ . Так как выполняются условие  $0 < I_{main,1} \leq I_{main,work} \leq I_{main,3}$  и условие  $0 < \bar{B}_{main,1}(R_{work}) \leq \bar{B}_{main,work}(R_{work}) \leq \bar{B}_{main,3}(R_{work})$ , то для нахождения требуемого значения тока в главной катушке  $I_{main,work}$  необходимо записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{main,work}(R_{work}) = & \frac{(I_{main} - I_{main,2}) \cdot (I_{main} - I_{main,3})}{(I_{main,1} - I_{main,2}) \cdot (I_{main,1} - I_{main,3})} \cdot \bar{B}_{main,1}(R_{work}) + \\ & + \frac{(I_{main} - I_{main,1}) \cdot (I_{main} - I_{main,3})}{(I_{main,2} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,2} - I_{main,3})} \cdot \bar{B}_{main,2}(R_{work}) + \\ & + \frac{(I_{main} - I_{main,1}) \cdot (I_{main} - I_{main,2})}{(I_{main,3} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,3} - I_{main,2})} \cdot \bar{B}_{main,3}(R_{work}). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, в (7) вместо значения  $\bar{B}_{main,work}(R_{work})$ , которое соответствует искомому значению тока в главной катушке  $I_{main,work}$ , подставляется найденное значение  $\bar{B}_{task}(R_{work})$  и решается соответствующее квадратное уравнение относительно  $I_{main}$ . Один из корней квадратного уравнения  $I_{main}^i$ ,  $i=1, 2$  удовлетворяет неравенству  $I_{main,1} \leq I_{main}^i \leq I_{main,3}$  и является искомым значением тока в главной катушке  $I_{main,work} = I_{main}^i$ .

Исходя из трёх карт основных магнитных полей  $B_{main,1}(r, \theta)$ ,  $B_{main,2}(r, \theta)$ ,  $B_{main,3}(r, \theta)$  для конкретных значений радиуса  $R$  и азимута  $\Theta$  находятся соответствующие значения карт основных магнитных полей  $B_{main,1}(R, \Theta)$ ,  $B_{main,2}(R, \Theta)$ ,

$B_{main,3}(R, \Theta)$ . При этом полученные значения соответствуют трём определённым значениям тока в главной катушке  $I_{main,1}$ ,  $I_{main,2}$ ,  $I_{main,3}$ . С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа второй степени по трём точкам  $M_1(I_{main,1}, B_{main,1}(R, \Theta))$ ,  $M_2(I_{main,2}, B_{main,2}(R, \Theta))$ ,  $M_3(I_{main,3}, B_{main,3}(R, \Theta))$  строится зависимость  $B_{main}(I_{main})$ . Для нахождения карты основного магнитного поля  $B_{main,work}(r, \theta)$ , соответствующей рассчитанному значению тока в главной катушке  $I_{main,work}$ , необходимо записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} B_{main,work}(R, \Theta) = & \frac{(I_{main,work} - I_{main,2}) \cdot (I_{main,work} - I_{main,3})}{(I_{main,1} - I_{main,2}) \cdot (I_{main,1} - I_{main,3})} \cdot B_{main,1}(R, \Theta) + \\ & + \frac{(I_{main,work} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,work} - I_{main,3})}{(I_{main,2} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,2} - I_{main,3})} \cdot B_{main,2}(R, \Theta) + \\ & + \frac{(I_{main,work} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,work} - I_{main,2})}{(I_{main,3} - I_{main,1}) \cdot (I_{main,3} - I_{main,2})} \cdot B_{main,3}(R, \Theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, в правую часть (8) подставляются все известные значения, и находится значение  $B_{main,work}(R, \Theta)$ . Расчёт карты основного магнитного поля  $B_{main,work}(r, \theta)$  производится для всех значений радиуса и азимута, определённых диапазонами и шагами по радиусу и азимуту (шаг по радиусу –  $\Delta R_{calc}$ , а шаг по азимуту –  $\Delta \theta_{ms}$ ). Исходя из полученной карты основного магнитного поля  $B_{main,work}(r, \theta)$ , на основе алгоритма М.М. Гордона [4] производится перерасчёт изохронного магнитного поля  $\bar{B}_{is}(r)$  с учётом влияния азимутальной вариации основного магнитного поля на траекторию движения ускоряемых частиц. Далее, производится перерасчёт среднего требуемого магнитного поля  $\bar{B}_{task}(r)$  (2). При этом изохронное магнитное поле складывается с суммой средних магнитных полей центрального бампа и краевого магнитного поля, изображённой на Рис. 1. Затем весь процесс расчёта тока в главной катушке  $I_{main,work}$  повторяется. Он продолжается до тех пор, пока не достигается требуемая точность расчёта тока в главной катушке  $\varepsilon_I = 0.001$  А. Для рассматриваемого основного режима работы АИЦ-144 график пересечения среднего требуемого магнитного поля  $\bar{B}_{task}(r)$  со средним основным магнитным полем  $\bar{B}_{main,work}(r)$  в заданной рабочей точке с радиусом  $R_{work}$  представлен на Рис. 2.

Для найденного значения тока в главной катушке  $I_{main,work}$ , аналогично приведённой выше процедуре, рассчитываются соответствующие карты магнитных полей максимальных вкладов концентрических катушек  $B_{j,max}(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  в основное магнитное поле. После чего рассчитываются соответствующие средние магнитные поля найденных максимальных вкладов концентрических катушек  $\bar{B}_{j,max}(r)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$ .

## 2. Расчёт токов в концентрических катушках

Для получения нового режима работы многоцелевого изохронного циклотрона необходимо определить значения токов во всех концентрических катушках коррекции основного магнитного поля  $I_j$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  для рассчитанного уровня тока в главной катушке  $I_{main,work}$ . Токи в концентрических катушках рассчитываются на основе минимизации следующего функционала, имеющего в своём составе

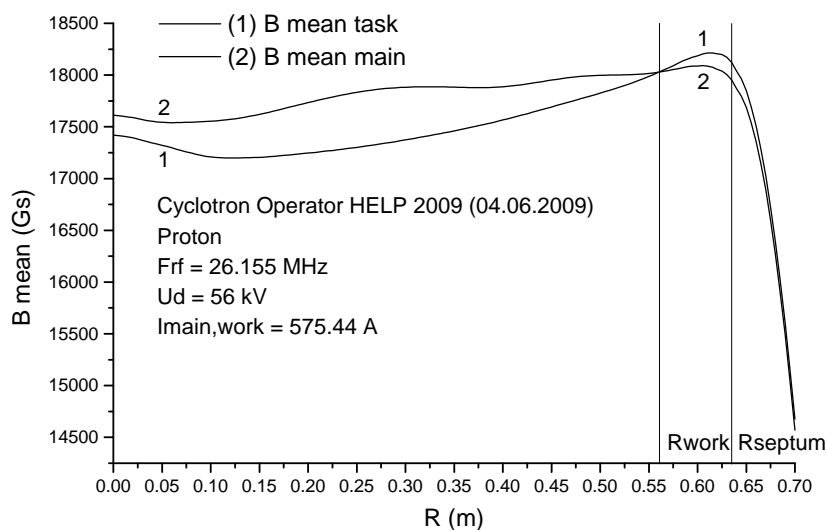


Рис. 2: Среднее требуемое и среднее основное магнитные поля.

штрафную функцию:

$$F(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) = \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \sum_{j=1}^k \left( \bar{B}_{j,max}^*(r^*) \cdot I_j^* \right) - \Delta \bar{B}^*(r^*) \right]^2 \cdot dr^* + \lambda^* \cdot \sum_{j=1}^k (k_{j,lim} \cdot I_j^*)^{2p}, \quad (9)$$

$$\bar{B}_{j,max}^*(r) = \frac{\bar{B}_{j,max}(r)}{B_0}, \quad I_j^* = \frac{I_j}{I_{j,max}}, \quad k_{j,lim} = \frac{I_{j,max}}{I_{j,lim}}, \quad (10)$$

$$\Delta \bar{B}^*(r) = \frac{\Delta \bar{B}(r)}{B_0}, \quad \lambda^* = \left( \frac{\lambda}{B_0} \right)^2, \quad r^* = \frac{r}{r_0},$$

$$j = 1, 2, \dots, k,$$

$$\Delta \bar{B}(r) = \bar{B}_{task}(r) - \bar{B}_{start}(r), \quad (11)$$

где  $r_0, B_0$  – это определённые коэффициенты, имеющие, соответственно, размерности длины и магнитного поля и позволяющие перейти к безразмерным величинам;  $\bar{B}_{j,max}(r)$  – среднее магнитное поле максимального вклада  $j$ -ой концентрической катушки;  $I_j, I_{j,max}, I_{j,lim}$  – расчётный, максимальный и предельный токи в  $j$ -ой концентрической катушке;  $\bar{B}_{task}(r)$  – среднее требуемое магнитное поле (2);  $\bar{B}_{start}(r)$  – среднее исходное магнитное поле (3);  $R_{septum}^*$  – это нормированный радиус расположения септума электростатического дефлектора;  $\lambda$  – переменный параметр штрафной функции;  $p$  – постоянный параметр штрафной функции;  $k$  – число свободных компонент вектора решения. Штрафная функция, входящая

в состав функционала в виде второго слагаемого, позволяет вводить вектор решения в границы области допустимых значений покомпонентно. При этом токи в концентрических катушках рассматриваются последовательно в направлении, определяемом зонами влияния концентрических катушек на основное магнитное поле: от первой концентрической катушки, расположенной в центре циклотрона, к последней, наиболее удалённой от его центра.

Для каждой концентрической катушки задаются нижнее  $I_{j,low}$  и верхнее  $I_{j,high}$  граничные значения тока, которые укладываются в рамки соответствующих минимального и максимального значений. То есть, предельный ток  $I_{j,lim}$  в  $j$ -ой концентрической катушке определяется следующим образом:

$$I_{j,lim} = \left\{ \begin{array}{ll} I_{j,low}, & (-I_{j,max} \leq I_{j,low} < I_j \leq 0) \\ I_{j,high}, & (0 \leq I_j < I_{j,high} \leq I_{j,max}) \end{array} \right\}, \quad I_{j,max} > 0, \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, z, \quad z = m + k,$$

где  $I_{j,max}$  – это максимальный ток в  $j$ -ой концентрической катушке;  $m, k$  – это число фиксированных и свободных компонент вектора решения соответственно.

При минимизации функционала берутся частные производные по каждой из свободных компонент искомого вектора решения, которые затем приравняются к нулю.

$$\frac{\partial F(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)}{\partial I_i^*} = 0, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

После взятия частных производных, выражение (13) переписывается в следующем виде:

$$\int_0^{R_{septum}^*} \left[ \sum_{j=1}^k \left( \overline{B}_{i,max}^*(r^*) \cdot \overline{B}_{j,max}^*(r^*) \cdot I_j^* \right) \right] \cdot dr^* + \lambda^* \cdot p \cdot (k_{i,lim})^{2p} \cdot (I_i^*)^{2p-1} =$$

$$= \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \overline{B}_{i,max}^*(r^*) \cdot \Delta \overline{B}^*(r^*) \right] \cdot dr^*, \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

После преобразования выражение (14) переписывается в виде следующей неоднородной системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \left( \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \overline{B}_{i,max}^*(r^*) \cdot \overline{B}_{j,max}^*(r^*) \right] \cdot dr^* \right) \cdot I_j^* \right\} +$$

$$+ \left\{ \lambda^* \cdot p \cdot (k_{i,lim})^{2p} \cdot (I_i^*)^{2p-2} \right\} \cdot I_i^* =$$



$$= \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \Delta \overline{B}^*(r^*) \right] \cdot dr^*, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Полученная неоднородная система нелинейных алгебраических уравнений (15) решается итерационным путём. На первом шаге итерационного цикла нахождения решения (15) величина переменной  $\lambda^*$  устанавливается равной 0. Для решения полученной неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используется метод Гаусса с выбором главного элемента по матрице [6]. (Указанный метод реализован в виде функции динамически связанной библиотеки GaussDLL.dll [8]). Если полученный вектор решения  $I_j^{*(0)}$  для некоторых своих компонент имеет значения, которые выходят за границы области допустимых значений, величина переменной  $\lambda^*$  рассчитывается для каждой такой компоненты с целью ввода её в рамки соответствующих граничных значений. При вводе выбранной компоненты в рамки заданных граничных значений, произведение  $I_j^{*(0)} \cdot \delta_{ij}$  подставляется в левую часть (15). Таким образом производится линеаризация неоднородной системы нелинейных алгебраических уравнений (15). Полученная в результате линеаризации неоднородная СЛАУ записывается в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^k \{a_{ij} \cdot I_j^*\} = b_i, \quad (16)$$

$$a_{ij} = \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \overline{B}_{j,\max}^*(r^*) \right] \cdot dr^* + \lambda^* \cdot p \cdot (k_{j,lim})^{2p} \cdot \left( I_j^{*(0)} \right)^{2p-2} \cdot \delta_{ij}, \quad (17)$$

$$b_i = \int_0^{R_{septum}^*} \left[ \overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \Delta \overline{B}^*(r^*) \right] \cdot dr^*, \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, k,$$

где  $\delta_{ij}$  – это символ Кронекера. Неоднородная СЛАУ (16) решается с помощью выбранного ранее метода. Полученный вектор решения  $I_j^{*(0)}$  сохраняется неизменным в процессе расчёта значения переменной  $\lambda^*$ . После ввода с определённой точностью рассматриваемой компоненты вектора решения в рамки заданных граничных значений, данная компонента переводится из разряда свободных в разряд фиксированных. При этом находится значение соответствующего вклада рассматриваемой концентрической катушки в основное магнитное поле. Далее, производится перерасчёт среднего исходного магнитного поля  $\overline{B}_{start}(r)$  (3) и разности  $\Delta \overline{B}(r)$  (11). Затем, величина переменной  $\lambda^*$  опять устанавливается равной 0 и весь цикл расчётов по вводу вектора решения в границы области допустимых значений повторяется. При этом производится уплотнение матрицы коэффициентов и вектора свободных членов. После покомпонентного ввода всего вектора решения в границы области допустимых значений, при  $\lambda^*=0$  находится искомое решение (15) и формируется набор токов в концентрических катушках  $I_j$ ,  $j=1, 2, \dots, z$ . Исходя из полученных значений токов в концентрических катушках, рассчитываются

карты магнитных полей вкладов концентрических катушек в основное магнитное поле. В итоге, формируется карта результирующего магнитного поля  $B_{res}(r, \theta)$  как сумма карты основного магнитного поля  $B_{main,work}(r, \theta)$  и карт вкладов концентрических катушек  $B_j(r, \theta)$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  в основное магнитное поле. Исходя из полученной карты результирующего магнитного поля, из-за влияния вкладов концентрических катушек на азимутальную вариацию основного магнитного поля (на траекторию движения ускоряемых частиц) на основе алгоритма М.М. Гордона [4] производится перерасчёт изохронного магнитного поля  $\bar{B}_{is}(r)$ . Далее, производится перерасчёт среднего требуемого магнитного поля  $\bar{B}_{task}(r)$  (2) и разности  $\Delta\bar{B}(r)$  (11). Затем, весь процесс формирования набора токов в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля  $I_j$ ,  $j=1, 2, \dots, z$  для рассчитанного уровня тока в главной катушке  $I_{main,work}$  повторяется. Он продолжается до тех пор, пока не достигается необходимая точность расчёта среднего требуемого магнитного поля  $\varepsilon_{B0}=0.1$  Гс. Интегрирование выражений (1), (17) и (18) производится с помощью квадратурных формул Симпсона [6].

Как правило, с целью минимизации мощности, потребляемой концентрическими катушками, часть из них исключают из конечного решения (зануляют токи в некоторых концентрических катушках). При этом в качестве критерия исключения обычно используется критерий минимального значения функционального минимума  $S$ . Это значение определяется путём поочерёдного перебора рассматриваемых концентрических катушек. Гораздо более важной является задача улучшения устойчивости решения плохо обусловленной неоднородной СЛАУ. Эта задача также может быть решена путём исключения из расчёта части задействованных концентрических катушек. При этом в качестве критерия исключения предлагается использовать критерий минимального значения произведения функционального минимума и числа обусловленности неоднородной СЛАУ  $S \cdot cond(A)$ . Это значение также определяется путём поочерёдного перебора рассматриваемых концентрических катушек. Число концентрических катушек, исключаемых из расчёта с использованием предлагаемого критерия, определяется исходя из минимума полученной зависимости минимальных значений произведений  $S \cdot cond(A)$  от числа исключаемых концентрических катушек  $n=1, 2, \dots, z/2$ . Как показал ряд численных экспериментов, решения, получаемые при использовании предлагаемого критерия исключения, являются более устойчивыми, чем решения, получаемые при использовании обычного критерия исключения. При этом значительное улучшение числа обусловленности неоднородной СЛАУ сопровождается лишь незначительным ухудшением значения функционального минимума. Вопрос оценки устойчивости различных решений, получаемых с использованием обычного и нового критериев исключения из расчёта части задействованных концентрических катушек, подробно исследуется в работе [7].

### 3. Физический эксперимент

С помощью разработанного комплекса программ Cyclotron Operator HELP 2009 в начале июня 2009 года было проведено моделирование основного режима работы многоцелевого изохронного циклотрона АИЦ-144. На рассчитанной карте результирующего магнитного поля, соответствующей полученному режиму работы, был сделан расчёт частот свободных колебаний [3] и фазового движения ускоряемых

частиц [5]. Анализ результатов расчётов показал возможность ускорения протонов во всём диапазоне рабочих радиусов от системы инжекции до системы вывода пучка ионов. 04 июня 2009 года смоделированный режим работы был проверен путём проведения физического эксперимента на АИЦ-144. В итоге, внутренний пучок протонов был успешно ускорен и, затем, выведен из указанного ускорителя. Вывод пучка ускоренных протонов был осуществлён с использованием тех параметров системы вывода (токов в гармонических катушках коррекции первой гармоники результирующего магнитного поля), которые были рассчитаны и экспериментально подстроены для предыдущего аналогичного режима работы [9]. Эти параметры нуждаются в уточнении для рассматриваемого режима работы с целью увеличения коэффициента вывода пучка ускоренных ионов (отношения тока выведенного пучка к току внутреннего пучка на радиусе заброса пучка в электростатический дефлектор  $R_{ext}=0.62$  м).

Измерения тока внутреннего пучка проводились в диапазоне радиусов ускорения от  $R_{start}=0.04$  м до  $R_{finish}=0.64$  м с помощью зонда №3, расположенного за электростатическим дефлектором перед магнитными каналами (с  $R=0.635$  м до  $R=0.64$  м пучок заслоняется электростатическим дефлектором). На Рис. 3 показаны параметры полученного режима работы и ток внутреннего пучка ускоренных протонов, измеренный с помощью указанного зонда после ввода магнитных каналов в область конечных радиусов ускорения.

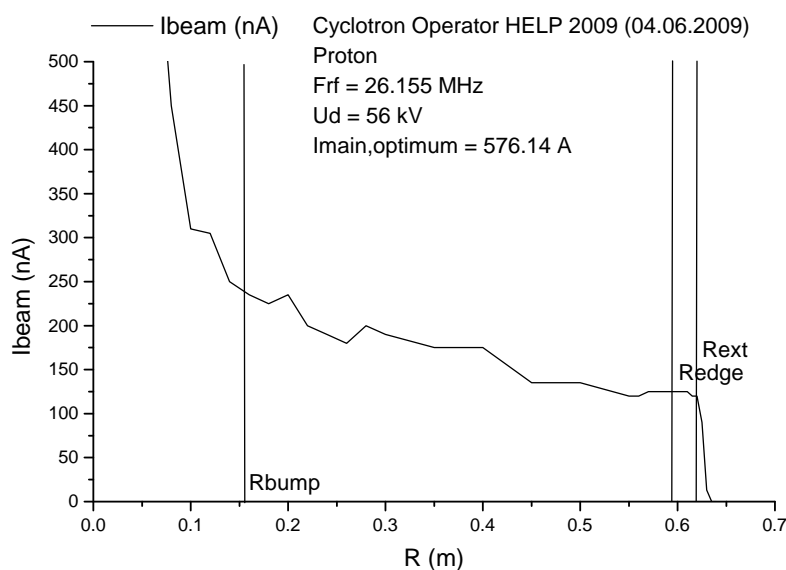


Рис. 3: Измеренный ток внутреннего пучка ускоренных протонов.

Из рисунка видно, что пучок протонов был ускорен в области изохронизации требуемого магнитного поля от радиуса конца центрального бампа  $R_{bump}=0.155$  м до радиуса начала краевого магнитного поля  $R_{edge}=0.595$  м и, что существенно, значительно далее – вплоть до радиуса заброса пучка в электростатический де-

ффлектор  $R_{ext}=0.62$  м, без существенных фазовых потерь протонов (уменьшение тока внутреннего пучка  $\Delta I_{beam}$  меньше 50 % от его значения на  $R_{bump}$ ). Карта результирующего магнитного поля может быть измерена, после чего режим работы может быть пересчитан с внесением соответствующей поправки в среднее требуемое магнитное поле (2). Таким образом, фазовые потери ускоряемых протонов в области изохронизации требуемого магнитного поля могут быть уменьшены после первой расчётно-экспериментальной итерации.

Для заброшенного пучка ускоренных протонов величина тока, измеренного с помощью зонда №0, расположенного прямо на входе в электростатический дефлектор с  $R_{septum}=0.635$  м, составила  $I_{beam}=40$  нА. Расчётный коэффициент прохождения тока пучка через электростатический дефлектор составляет не менее  $K_{def}=75$  % от значения тока пучка на его входе. Таким образом, при правильно подобранных значениях амплитуды и фазы первой гармоники реально сформированного результирующего магнитного поля, значение тока выведенного пучка может составить  $I_{beam,out}\approx 30$  нА, что в три раза больше максимального требуемого значения. При этом коэффициент вывода пучка  $K_{ext}$  будет не менее 25 %.

Фазовое движение ускоряемых протонов было оптимизировано за счёт регулировки амплитуды центрального бампа результирующего магнитного поля по величине тока пучка, выведенного из циклотрона. Оптимизация производилась путём изменения тока во второй концентрической катушке с соответствующей подстройкой тока в главной катушке таким образом, что фазовый сдвиг ускоренных ионов на входе в электростатический дефлектор составил  $\Delta\varphi\approx 0^0$ . С помощью Cyclotron Operator HELP 2009 было проведено моделирование работы оператора АИЦ-144 с целью соответствующего пересчёта среднего магнитного поля центрального бампа и соответствующего режима работы. На Рис. 4 показана зависимость максимального тока пучка ускоренных протонов, выведенных из циклотрона, от тока во второй концентрической катушке, когда выведенный пучок, при соответствующей регулировке тока в главной катушке, наилучшим образом сохраняет форму круга в своём поперечном сечении.

Из рисунка видно, что оптимальное значение тока во второй концентрической катушке, отвечающей за формирование центрального бампа, при сформированном краевом магнитном поле, для рассматриваемого режима работы составляет  $I_2=335$  А.

В итоге, были достигнуты следующие результаты:

- Измеренная кинетическая энергия ускоренных протонов в камере облучения впервые достигла требуемого значения  $E_k\sim 60$  МэВ, необходимого для лечения меланомы глаза у пациентов (по результатам измерений, проведённых подразделением протонной терапии ИЯФ ПАН).
- После пяти месяцев эксплуатации АИЦ-144 в режиме работы, полученном 04 июня 2009 года, уход значения тока выведенного пучка составил  $\Delta I_{beam,out}$  примерно 2.5 % от его исходного значения на выходе из ускорителя, что говорит о хорошей устойчивости, впервые достигнутой для указанного режима работы (по результатам измерений, проведённых Циклотронным Отделом ИЯФ ПАН).

В итоге, расчётно-экспериментальные итерации по формированию требуемого магнитного поля были заменены одними только расчётными. Благодаря этому,

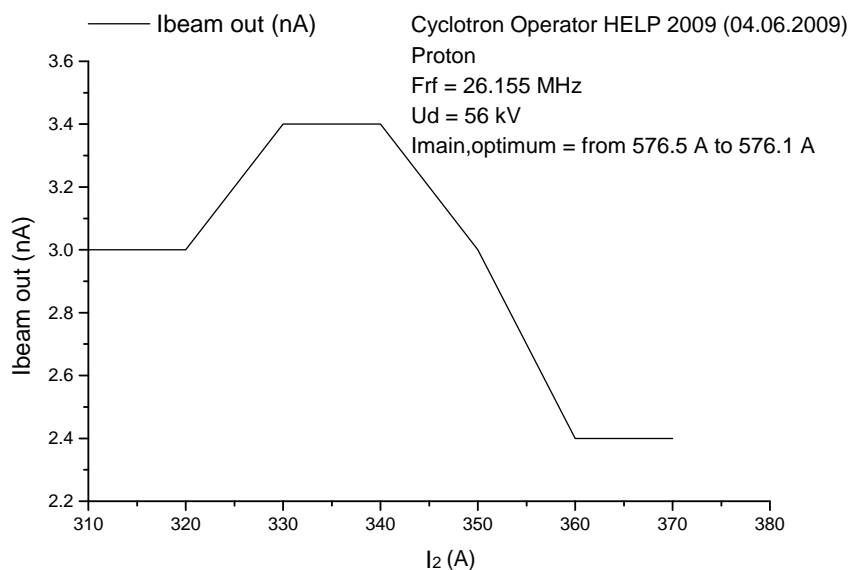


Рис. 4: Максимальный ток выведенного пучка.

основной режим работы был получен без остановки и разборки АИЦ-144 для проведения дополнительных магнитных измерений.

### Заключение

В целом, было сделано следующее:

- Была разработана новая математическая модель расчёта токов в концентрических катушках для определённого уровня тока в главной катушке и улучшена существующая методика математического моделирования требуемых режимов работы многоцелевых изохронных циклотронов.
- С помощью разработанного комплекса программ Cyclotron Operator HELP 2009, установленного на сервере АИЦ-144, было проведено компьютерное моделирование основного режима работы АИЦ-144, результаты которого были подтверждены результатами физического эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00467-а.

### Список литературы

- [1] Bakewicz E., Budzanowski A., Taraszkiewicz R. AIC-144 cyclotron: present status. NUKLEONIKA, 2003. No 48(Supplement 2):S117-S121.

- [2] Схвабэ Е., Габаньска Б., Цемпка Ю., Домбровска И., Стажевски Е. Магнитная система автоматического изохронного циклотрона АИЦ-144. Тр. Международного рабочего совещания по технике изохронных циклотронов, 1978. Краков, Польша. С. 237–256.
- [3] Ливингуд Дж. Принципы работы циклических ускорителей. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
- [4] Gordon M.M. Calculation of Isochronous Fields for Sector-Focused Cyclotrons. Particle Accelerators, 1983. V.13. pp. 67–84.
- [5] Stambach T. Cyclotrons. Joint Universities Accelerator School, 1997. Archamps-France.
- [6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2006.
- [7] Амирханов И.В., Карамышева Г.А., Киян И.Н., Суликовский Я. Моделирование требуемых режимов работы и анализ их устойчивости для многоцелевых изохронных циклотронов. Письма в ЭЧАЯ, 2009. Т.6, № 6(155). С. 805–813.
- [8] Киян И.Н. GaussDLL. Комплекс программ матрично-векторных операций и решения СЛАУ с вещественными коэффициентами. Библиотека готовых программ ОИЯИ JINRLIB:  
<http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/gaussdll/index.html>.
- [9] Morozov N.A., Samsonov E.V. Optimization of AIC-144 operation for 60 MeV protons acceleration and extraction. Internal Report, June-July 2008. Krakow.