

**КОНФИГУРАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ  
НЬУТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП С МАЛЫМ ИНДЕКСОМ**

**Михеев С.А., Пузынин И.В.\* , Цветков В.П.**

Тверской государственной университет, Тверь

\* Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

---

*Поступила в редакцию 27.10.2009, после переработки 20.01.2010.*

---

В работе показана эффективность составленного и реализованного символично-численного алгоритма для решения уравнения равновесных вращающихся ньютоновских политроп с малым индексом  $n$ . Найден аналитический вид нового класса неэллипсоидальных конфигураций ньютоновских политроп - предельные клиновидные фигуры, имеющие вблизи экватора форму кругового клина. Вычислены значения главных кривизн поверхности конфигурации вблизи экватора. Найдено семейство предельных точек  $e_L(n)$ . Для параметра асимметрии  $X$  получено кубическое уравнение и на его основе определено семейство критических точек (точек бифуркации). Доказано существование первой предельной критической точки со значением  $n_m = 0.1161$ .

In this article we was shown and the realized symbol-numerical algorithm for the decision the equations of equilibrium rotating Newtonian polytropics with the small index  $n$ . The analytical kind of a new class is found nonellipsoidal configurations of Newtonian polytropics - the limiting wedge-shaped figures having the form of a circular wedge near to equator. Are calculated values of the principal curvatures of the surface of a configuration near to equator. We found of class of limiting points  $e_L(n)$ . For asymmetry parameter  $X$  the cubic equation and on its basis is received the class of critical points (bifurcations points) is defined. Existence of the first limiting critical point is proved with value  $n_m = 0.1161$ .

**Ключевые слова:** ньютоновская политропа, предельные клиновидные фигуры, главные кривизны.

**Keywords:** Newtonian polytropic, limiting wedge-shaped figures, principal curvatures.

## **Введение**

Классическая задача о вращающихся гравитирующих конфигурациях в связи с ее приложением к описанию пульсаров (вращающихся намагниченных нейтронных звезд) является в настоящее время весьма актуальной.

Точные аналитические решения известны только для эллипсоидальных фигур равновесия, описывающих однородные конфигурации несжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости [1, 2].

При исследовании вращающихся гравитирующих конфигураций одним из основных вопросов является вопрос об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнений, описывающих эти конфигурации.

Наиболее известными из работ по исследованию точек бифуркации ньютоновских политроп являются работы Джинса [3] и Джеймса [4]. В них проведены оценки максимального значения индекса политропы  $n_m$ ,  $n < n_m$ , выше которого точек бифуркации нет. Джинс приводит оценку  $n_m = 0.83$ , а Джеймс  $n_m = 0.808$ . Считается, что физическая природа этого явления - истечение вещества с экватора конфигурации, возникающее при той быстроте вращения (сплюснутости  $e$ ) конфигурации, которое необходимо для достижения точек бифуркации. Ускорение свободного падения на экваторе конфигурации  $g_{eq}$  при  $n = n_m$  и  $e = e_m$  будет равно нулю. Остается открытым вопрос о форме поверхности конфигурации в точке  $(n_m, e_m)$ .

Цель нашей работы - построить аналитическое решение уравнений, описывающих вращающиеся намагниченные политропы с малым индексом  $n \ll 1$ , с помощью разработанного нами комплекса символьно-численных программ в системе символьной математики MAPLE; исследовать эти решения в зависимости от значений индекса политропы  $n$  и сплюснутости конфигурации  $e$ .

В первую очередь нас будут интересовать предельные значения параметров  $n$  и  $e$ , для которых еще существуют стационарно-вращающиеся конфигурации. При этом ускорение свободного падения на экваторе будет равно нулю.

Только использование симбиоза символьных и численных методов вычислений на компьютере дает возможность получить принципиально новые результаты в решении рассматриваемой задачи. При этом возникают конфигурации, существенно отличающиеся от эллипсоидальных, которые мы будем называть неэллипсоидальными. В частности, этот метод позволяет исследовать такие важные геометрические характеристики поверхности конфигураций вблизи экватора, как значения главных кривизн.

Применение символьно-численных методов позволило нам обнаружить новый вид вращающихся гравитирующих конфигураций, которые мы предлагаем называть предельными клиновидными фигурами, так как вблизи экватора они имеют вид кругового клина.

Нами также будет показано, что существует гораздо меньшее, чем приводимое в [4] ( $n_m = 0.808$ ) значение  $n_m = 0.1161$  такое, что при  $n > 0.1161$  точек бифуркации нет. Они снова возникают уже при  $n \geq 0.5791$  [5]. Следовательно, структура точек бифуркации конфигураций вращающихся политроп оказалась гораздо сложнее, чем это предполагалось в [3, 4].

## 1. Основные уравнения и постановка задачи

В астрофизических приложениях большой интерес представляют политропы с малыми значениями индекса, которые соответствуют случаю слабой сжимаемости ядерного вещества пульсаров.

Для описания вращающихся намагниченных политроп имеем следующее уравнение [5]:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \Theta^n(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0(1+n)(\Theta - 1) - \quad (1)$$

$$-\varepsilon \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} - \eta_m(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

где  $\Theta = \tilde{\rho}^{\frac{1}{n}}$ ,  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$  ( $\rho_0$  - плотность в центре конфигурации),  $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$  - параметр быстроты вращения,  $\omega$  - угловая скорость вращения,  $G$  - гравитационная постоянная,  $K_0 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 a_1^2}$  - отношение центрального давления к плотности гравитационной энергии в центре,  $\eta_m$  - отношение плотностей магнитной и гравитационной энергий в центре,  $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $x_1 = \frac{x}{a_1}$ ,  $x_2 = \frac{y}{a_1}$ ,  $x_3 = \frac{z}{a_3}$ ,  $a_1$ ,  $a_3$  - длины большой и малой полуосей эллипсоида вращения, аппроксимирующего реальную поверхность конфигурации.

Значение характерной напряженности магнитных полей пульсаров было оценено из наблюдений за рентгеновскими пульсарами в двойных системах. Имеет место оценка  $B_0 \approx (1.2 - 5) \cdot 10^{12}$  Гс [6]. В нашей модели параметр  $\eta_m = \frac{k B_0^2 \sin^2 \alpha}{16\pi^2 G \rho_0^2 a_1^2}$  ( $k$  - показатель скорости убывания магнитного поля при удалении от магнитной оси,  $\alpha$  - угол наклона магнитной оси к оси вращения). В этом случае  $\eta_m \sim 10^{-12} - 10^{-9}$  при  $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$  Г/см<sup>3</sup>.

Поэтому мы включили в уравнение (1) только антисимметричный относительно оси вращения член из магнитных натяжений. Симметричные же члены чрезвычайно малы по сравнению с остальными членами уравнения (1).

Уравнение (1) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно  $\Theta$  в  $R^3$ . Область интегрирования  $D$  в (1) определяется условием  $\Theta \geq 0$ .

Теоретическим основанием развиваемого нами подхода решения уравнения (1) является теорема Стоуна [7] о возможности аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в  $R^3$  в  $C$  метрике. Этого вполне достаточно, так как уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение, что является несомненным преимуществом его использования. При интегрировании точность приближения интегралов не хуже чем точность приближения подынтегральных функций. Это очевидно вытекает из теоремы о среднем для интегралов по компактной области в  $R^n$ . В других работах [3, 8] решается система дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, и для корректного решения этой системы уже требуется использовать аппроксимацию в  $C^2$  метрике, что является гораздо более сложной задачей и с худшей погрешностью.

При малых значениях  $n$  функцию  $\Theta$  будем искать в виде полинома шестой степени, при этом квадратичные члены не зависят от  $n$ :

$$\Theta(\mathbf{r}) = \Theta_0(\mathbf{r}) + n \sum_{i+j+k=4}^{i+j+k=6} \tilde{Z}_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = \Theta_0(\mathbf{r}) + \sum_{i+j+k=4}^{i+j+k=6} Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k, \quad (2)$$

$$Z_{ijk} = n \tilde{Z}_{ijk}, \quad i + j + k > 2,$$

$$\Theta_0(\mathbf{r}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - X(x_1^2 - x_2^2), \quad X = \frac{1}{2}(Z_{200} - Z_{020})$$

Неэллипсоидальный характер искомой конфигурации очевиден из (2).

В случае малых  $n$  аппроксимируем  $\Theta^n$  полиномом наилучшего приближения в метрике  $L_2$  второй степени:

$$\Theta^n \approx 1 + n \left( (\Theta - 1) - \frac{65}{36}(\Theta - 1)^2 \right),$$

учитывая только линейные по  $n$  члены. Точность аппроксимации в  $L_2$  при  $n = 0.1$  составляет  $3.31 \cdot 10^{-2}$ .

Тогда интеграл в (1) можно представить в виде:

$$\int_D \Theta^n(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \Phi + n\Phi_0,$$

где

$$\Phi = \int_D \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV',$$

$$\Phi_0 = \int_{D_0} \left( (\Theta_0 - 1) - \frac{65}{36}(\Theta_0 - 1)^2 \right) \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV',$$

$D_0$  - область, где  $\Theta_0 \geq 0$ .

В работе [9] с использованием рядов Бурмана-Лагранжа доказана теорема, согласно которой  $\Phi$  и  $\Phi_0$  могут быть разложены по полиномиальному базису декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\Phi \cong \sum_{a+b+c=2}^{a+b+c=N} \Phi_{abc}(e, Z_{ijk}) x_1^a x_2^b x_3^c, \quad \Phi_0 \cong \sum_{a+b+c=2}^{a+b+c=N} \Phi_{0abc}(e, Z_{ijk}) x_1^a x_2^b x_3^c \quad (3)$$

В данной работе мы возьмем  $N = 6$ .

Для произвольных  $N$  нами составлена программа в системе символьной математики MAPLE, позволяющая вычислить коэффициенты разложения  $\Phi_{abc}$  и  $\Phi_{0abc}$  в виде линейной комбинации интегралов:

$$J_{2A,2C} = e^{-2C} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^A x^{2C} dx}{(1 + (\frac{1}{e^2} - 1)x^2)^{A+2C+1}}, \quad e = \frac{a_3}{a_1},$$

которые в системе MAPLE легко вычисляются в виде элементарных функций от параметра сплюснутости  $e$ .

Отметим, что только система символьной математики позволяет вычислить  $\Phi_{abc}$  и  $\Phi_{0abc}$ , так как они содержат 19-ти кратное суммирование по индексам с зацепляющимися пределами суммирования [10]. Время вычисления этих коэффициентов при  $N = 6$  на компьютере AMD ATHLON 3.5GHz, 1GB RAM, WINDOWS XP в системе MAPLE составляет 315 секунд, а для вычислений при  $N = 8$  потребовалось уже 4973 секунды.

Ввиду чрезвычайной громоздкости полученных нами аналитических выражений  $\Phi$  и  $\Phi_0$ , они в явном виде не приводятся.

Здесь и далее индексы  $a, b, c, i, j, k$  являются четными.

С учетом (2) и (3) левую часть уравнения (1) представим в виде полинома декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$  степени  $N$ . Тогда, приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях этих координат, из (1) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $Z_{ijk}, \varepsilon, K_0$ :

$$H_{abc}(Z_{ijk}, \varepsilon, K_0, e, n) = 0, \quad 0 < a + b + c \leq N \quad (4)$$

или

$$H_l(Z_{ijk}, \varepsilon, K_0, e, n) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \tilde{N} \quad (4a)$$

В нашем случае ( $0 < a + b + c \leq N = 6$ )  $\tilde{N} = 19$ .

Коэффициенты  $Z_{ijk}$ , определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные  $Z_{(ij)k}$  и антисимметричные  $Z_{[ij]k}X$  части относительно оси вращения и будем искать их в виде разложения по степеням малого параметра асимметрии  $X$ :

$$Z_{ijk} = \frac{\left(\frac{i+j}{2}\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j}{2}\right)!} Z_{i+j,k} + Z_{[ij]k}X, \quad Z_{20} = Z_{02} = 0 \quad (5)$$

## 2. Решение уравнения (1) для фигур вращения

Решим вначале поставленную задачу в основном приближении  $X = 0$ , соответствующим фигуре вращения.

Тогда система уравнений (4a) будет представлять собой систему из 9-ти независимых нелинейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, e, n) = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_9), \quad (6)$$

$$y_1 = Z_{04}, \quad y_2 = Z_{06}, \quad y_3 = Z_{22}, \quad y_4 = Z_{24}, \\ y_5 = Z_{40}, \quad y_6 = Z_{42}, \quad y_7 = Z_{60}, \quad y_8 = K_0, \quad y_9 = \varepsilon.$$

Левые части уравнений (6)  $f_l(\mathbf{y}, e, n)$ ,  $l = 1, 2, \dots, \tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_1 = \frac{1}{8}(N+2)(N+4) - 1$  представляют собой коэффициенты  $H_{abc}$ ,  $0 < a+b+c \leq N$  полинома, являющегося полученным аналитическим выражением для левой части уравнения (1). При  $X = 0$  система уравнений (4) будет независимой, если взять только коэффициенты  $H_{a0c}$  или только  $H_{0bc}$ .

Для аналитического вычисления величин  $f_l$ , при произвольных значениях  $N$  нами составлен комплекс программ в системе MAPLE.

Результаты работы комплекса программ дают аналитический вид для  $Z_{40} = Z_{40}(e, n) = y_5(e, n)$  и  $Z_{60} = Z_{60}(e, n) = y_7(e, n)$ , и которые будут использованы для исследования структуры конфигурации вблизи экватора, как наиболее интересной области. Ввиду громоздкости явный вид полиномов нами не приводится, а графики этих функций представлены на рисунках 1 и 2.

Зависимости параметров  $\varepsilon = \varepsilon(e, n) = y_9(e, n)$  и  $K_0 = K_0(e, n) = y_8(e, n)$  представим на рисунках 3 и 4 соответственно.

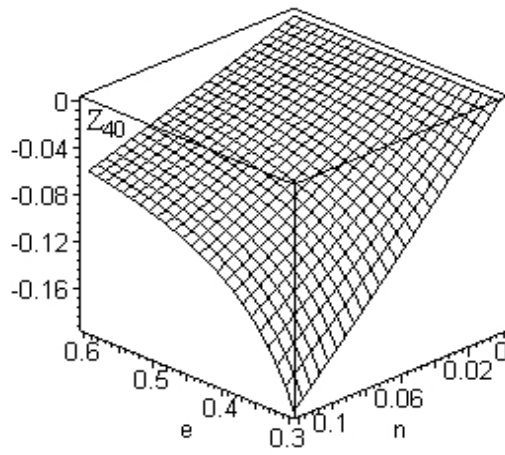


Рис. 1: График функции  $Z_{40}(e, n)$ .

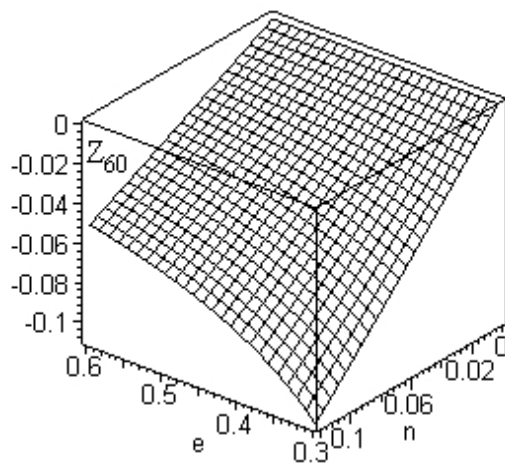


Рис. 2: График функции  $Z_{60}(e, n)$ .

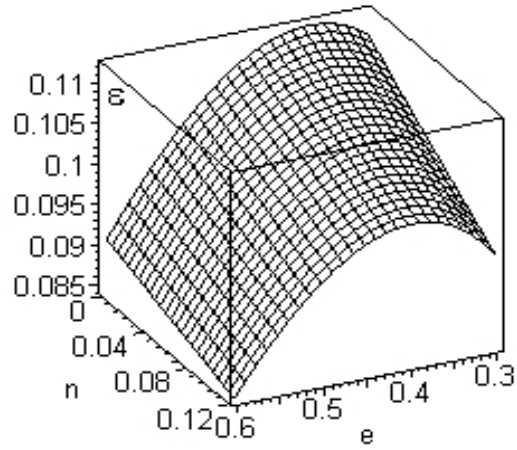


Рис. 3: График функции  $\varepsilon(e, n)$ .

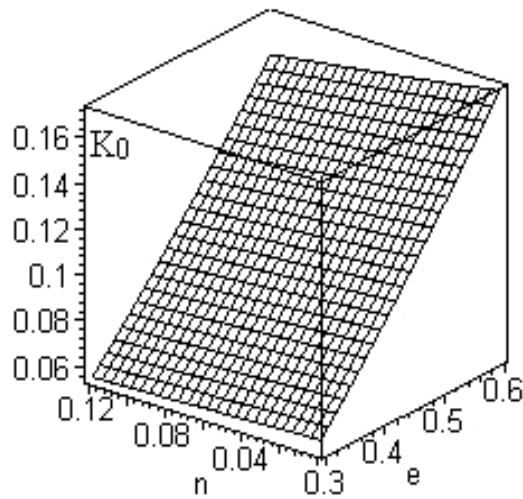


Рис. 4: График функции  $K_0(e, n)$ .

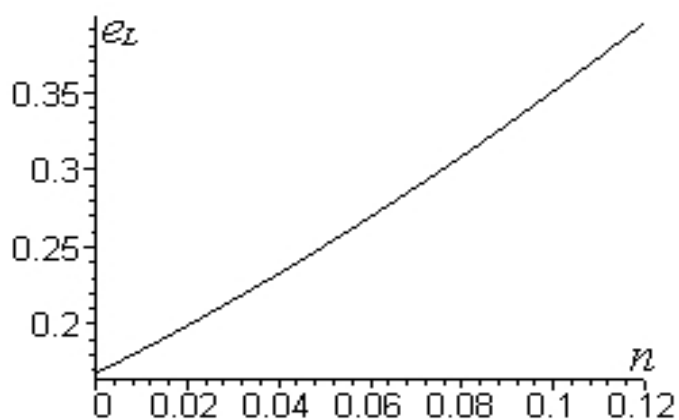


Рис. 5: График функции  $e_L(n)$ .

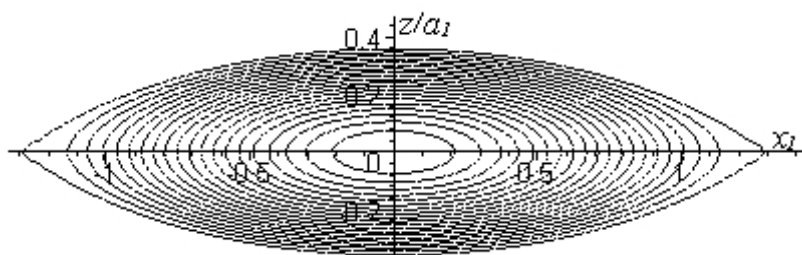


Рис. 6: Распределение относительного давления  $\Theta^{1+n}$  для случая  $n = 0.1$ ,  $e_L = 0.3506$ . На графике изображены линии уровня  $\Theta = 1 - ih$ ,  $h = \frac{1}{15}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 15$ .

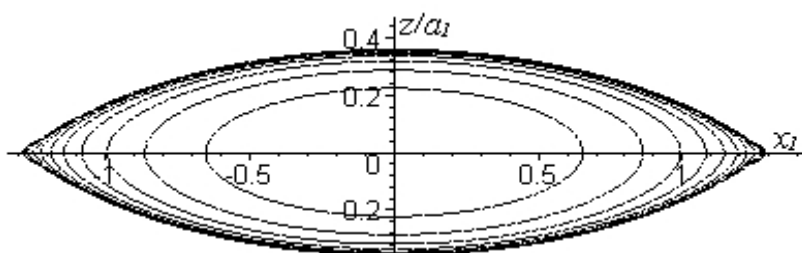


Рис. 7: Распределение относительной плотности  $\tilde{\rho}$  для случая  $n = 0.1$ ,  $e_L = 0.3506$ . На графике изображены линии уровня  $\tilde{\rho} = 1 - ih$ ,  $h = \frac{1}{15}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 15$ .



Детально исследуем структуру найденной конфигурации вблизи экватора, характер поведения которой в этой области и определяет критические значения ее параметров.

Экваториальный радиус  $r_{eq}$  находится из условия

$$1 - r_{eq}^2 - Z_{40}r_{eq}^4 - Z_{60}r_{eq}^6 = 0, \quad (7)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Важными геометрическими характеристиками поверхности конфигурации вблизи экватора являются значения главных кривизн  $\gamma_{min}(eq)$  и  $\gamma_{max}(eq)$ :

$$\gamma_{min}(eq) = \frac{1}{a_1 r_{eq}},$$

$$\gamma_{max}(eq) = \frac{2}{a_1 e^2 r_{eq}} \frac{|1 + Z_{22}r_{eq}^2 + Z_{42}r_{eq}^4|}{\left| \frac{d\Theta(r_{eq})}{dr_{eq}} \right|} = \quad (8)$$

$$= \frac{2}{a_1 e^2 r_{eq}^2} \left| \frac{1 + Z_{22}r_{eq}^2 + Z_{42}r_{eq}^4}{1 + 2Z_{40}r_{eq}^2 + 3Z_{60}r_{eq}^4} \right|.$$

Из (8) следует, что при  $\frac{d\Theta(r_{eq})}{dr_{eq}} = 0$   $\gamma_{max}(eq) \rightarrow \infty$  и экваториальная поверхность имеет вид кругового клина с углом раствора  $\beta$ :

$$\beta = 2 \arctg \left( e \sqrt{\left| \frac{1 + 6Z_{40}r_{eq}^2 + 15Z_{60}r_{eq}^4}{1 + Z_{22}r_{eq}^2 + Z_{42}r_{eq}^4} \right|} \right). \quad (9)$$

Условие  $\frac{d\Theta(r_{eq})}{dr_{eq}} = 0$  означает равенство на экваторе нулю ускорения свободного падения, то есть данная конфигурация является предельной. Соответствующие значения  $e_L(n)$  находятся из решения системы уравнений:

$$1 - r_{eq}^2 - Z_{40}(e_L, n)r_{eq}^4 - Z_{60}(e_L, n)r_{eq}^6 = 0, \quad (10)$$

$$1 + 2Z_{40}(e_L, n)r_{eq}^2 + 3Z_{60}(e_L, n)r_{eq}^4 = 0$$

относительно  $e_L$  и  $r_{eq}$ .

Уравнения (10) и определяют предельные клиновидные конфигурации. Для решения (10) также составлена специальная программа. Зависимость  $e_L(n)$  приводится на рисунке 5.

Распределения относительного давления  $\Theta^{1+n}(r, z)$  и относительной плотности  $\tilde{\rho} = \Theta^n(r, z)$  даны на рисунках 6 и 7 для случая  $n = 0.1$ ,  $e_L = 0.3506$ .

Эти рисунки показывают наглядно клиновидный характер конфигурации при  $e = e_L(n)$ . При  $e < e_L$  стационарных конфигураций уже не существует.

### 3. Кубическое уравнение для параметра асимметрии $X$

Используя разработанный в [5] метод решения уравнения (1) в виде разложения по степеням малого параметра  $X$ , на основе комплекса составленных нами

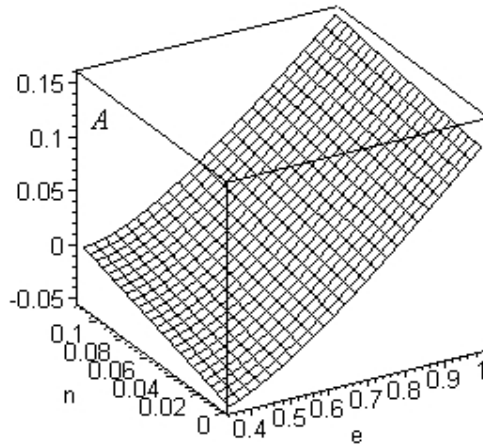


Рис. 8: График функции  $A(e, n)$ .

символьно-численных программ, с удержанием членов порядка  $X^3$  и ниже, получаем кубическое уравнение для параметра  $X$  в случае  $n \ll 1$ :

$$A(e, n)X + B_{0k}X^3 = \eta_m. \quad (11)$$

Подробное аналитическое исследование решений уравнения (11) приведено в [12].

В (11) значение параметра  $B_{0k} = -0.01522$  вычислено нами в приближении  $n = 0$ , с удержанием членов без  $n$  и пренебрежением членами порядка  $n \ll 1$ .

Составленный нами пакет символьно-численных программ позволил найти аналитическое приближение коэффициента  $A(e, n)$ . Зависимость  $A(e, n)$  от  $0.35 \leq e \leq 1$  и  $n < 0.12$  приводится на рисунке 8.

Критические точки  $e_k$  находятся из условия:

$$A(e_k, n) = 0 \quad (12)$$

Решением (12) является функция  $e_k(n)$ , которая определяет зависимость критического значения  $e_k$  от параметра  $n$ . Совместные графики зависимостей  $e_k(n)$  и  $e_L(n)$  даны на рисунке 9.

Кривые 1 и 2 на рисунке 9 пересекаются в точке  $n_m$ , в которой одновременно выполняются уравнения (10) и (12). Эту точку будем называть предельной критической точкой. Для точного вычисления  $n_m$  нами составлена программа численного решения системы уравнений (10), (12), которая с точностью  $\sim 10^{-5}$  дает значение  $n_m = 0.1161$ . Отсюда следует, что для вращающихся ньютоновских политропов первая предельная критическая точка  $n_m = 0.1161$ , выше которой асимметричных решений нет при  $\eta_m = 0$ , достигается задолго до значений  $n_m = 0.83$  и  $0.808$ , указанных в работах Джинса [4] и Джеймса [3].

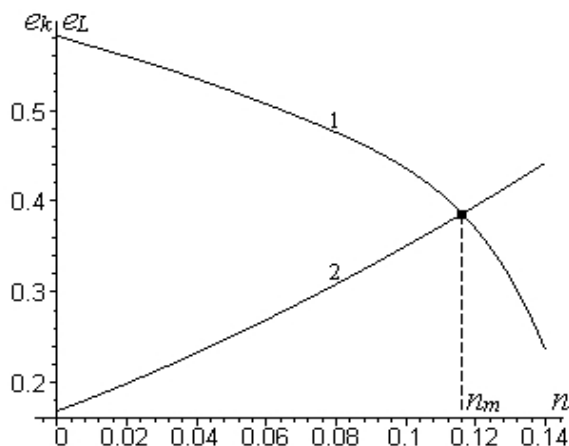


Рис. 9: Зависимости  $e_k$  (кривая 1) и  $e_L$  (кривая 2) от  $n$ .

Как отмечалось нами в [13], при  $0.5791 \leq n \leq 0.8012$  снова возникают асимметричные решения и появляются еще две предельные критические точки: 0.5791 (при  $n < 0.5791$  нет асимметричных решений) и 0.8012 (при  $n > 0.8012$  нет асимметричных решений).

В [12] нами показано, что для намагниченных конфигураций критические точки и точки бифуркации различаются. Величина сдвига по  $\varepsilon$  и  $e$  имеет порядок  $\eta_m^{\frac{2}{3}} \sim 10^{-6} - 10^{-8}$ , то есть достаточно мала и в большинстве случаев им можно пренебрегать.

### Заключение

В данной работе нами показана чрезвычайная эффективность символьно-численных алгоритмов для решения уравнения равновесных вращающихся ньютоновских политроп с малым индексом. Это позволило найти аналитический вид нового класса неэллипсоидальных конфигураций ньютоновских политроп - предельные клиновидные конфигурации. Вблизи экватора они имеют форму кругового клина.

Впервые найдены такие важные характеристики поверхности конфигураций вблизи экватора как значения ее главных кривизн.

Найдено семейство предельных точек  $e_L(n)$ .

Получено кубическое уравнение для параметра асимметрии  $X$  и определено семейство критических точек (точек бифуркации).

Доказано существование первой предельной критической точки со значением  $n_m = 0.1161$  в области  $n \ll 1$ . Этот факт является указанием на более сложную структуру асимметричных конфигураций ньютоновских политроп, чем считалось ранее.

**Список литературы**

- [1] П.Э. Аппель. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с фран. (Л.: Глав. ред. обще-техн. л-ры, 1936), с.376.
- [2] С. Чандрасекар. Эллипсоидальные фигуры равновесия. (М.: Мир, 1982).
- [3] R.A. James. The structure and stability of rotating gas masses. The Astrophysical Journal, v. 140, p. 552 (1964).
- [4] J.H. Jeans. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge: At the Univ. Press (1919).
- [5] Е.В. Беспалько, С.А. Михеев, И.В. Пузынин и др. О бифуркациях в одной астрофизической модели вращающихся намагниченных политроп с малым индексом. Препринт ОИЯИ Р11-2008-51.
- [6] Д.М. Седракян, К.М. Шахабасян. Сверхтекучесть и магнитное поле пульсара. УФН, т. 161, №7, с. 4 (1991).
- [7] Л. Коллатц, В. Крабс. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. (М.:Наука, ГРФМЛ, 1978), с. 219.
- [8] Ж.Л. Тассуль. Теория вращающихся звезд. (М.: Мир, 1982), с. 472.
- [9] В.В. Масюков, В.П. Цветков. Метод рядов Бурмана-Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций. ДАН СССР, Том 313, №5, с. 1099-1102 (1990).
- [10] Е.В. Беспалько, С.А. Михеев, И.В. Пузынин и др. Вычисление ньютоновского потенциала гравитирующей конфигурации с поверхностью, близкой к сферойду, с помощью символьных и численных методов. Вестник РУДН, Серия Математика. Информатика. Физика, №1, с. 28-42 (2008).
- [11] В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона. Журн. вычисл. и мат. физ., т. 21, №2, с. 491-497 (1981).
- [12] С.А. Михеев, В.П. Цветков. Сдвиг точек бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп, вызванный магнитным полем. Астрофизика, т. 51, №2, с. 321-327 (2008).
- [13] С.А. Михеев, В.П. Цветков. Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем близким к единице. Письма в ЭЧАЯ, т. 5, №4(146), с. 675-687 (2008).