КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 519.677, 517.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Боруленкова Е.М., Гусев А.И.
Кафедра математического анализа,
Тверской госуниверситет, Тверь

Поступила в редакцию 14.03.2010, после переработки 25.03.2010.

Известное в экономической динамике понятие равновесной функции используется для изучения динамических свойств голоморфных отображений. Получены условия, связывающие динамику поведения последовательности итераций голоморфной функции со значениями равновесных функций в предельных точках. Указана связь обобщенного рекуррентного множества, порождаемого семейством равновесных функций голоморфного отображения, с множеством Жюлиа этого отображения.

A notion equilibrium function, known in dynamic economics, is used for dynamic properties of holomorphic mappings research. The conditions connecting behavior dynamics of holomorphic function sequence iterations with values of equilibrium functions in limit points are received. The relation between generalized recurrence set of holomorphic mapping, generated by collection of equilibrium functions, and set of Julia of this mapping is specified.

Ключевые слова: голоморфная динамика, равновесная функция, неподвижная точка, множество Жюлиа.
Keywords: dynamic holomorphics, equilibrium function, fixed point, Julia set.

Введение

В работе [12] А.М. Рубинов предложил использовать некоторые понятия, присущие экономической динамике, для изучения топологических аспектов динамических свойств широкого класса отображений метрического пространства в себя. В той же и последующих работах ([12-14]) он получил ряд интересных результатов. Исследования в том же направлении проводились также в работах [2-6], [8-10]. В настоящей работе предлагается попытка использовать упомянутые понятия для изучения динамики голоморфных отображений. В этом направлении используется терминология и обозначения книги [11] и обзоров [1], [7]. Далее мы приводим необходимые определения и свойства определяемых объектов, большинство из которых имеются в [1], [7], [11] и [12].

Пусть X - метрическое пространство, C_X - пространство непрерывных функций $f : X \to X$ и $I : X \to X$ - тождественное отображение. Для функции $f \in C_X$ по определению полагаем, $f^{\circ 0} = I, f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Непрерывная функция $h : X \to \mathbb{R}$ называется *равновесной функцией* для функции $f \in C_X$, если $h(f(x)) \leq h(x)$ для любого элемента $x \in X$. Множество функций, равновесных для функции f, обозначим H_f.

Для функции $h \in H_f$ определим множества

$$W_h = \{x \in X : h(f(x)) = h(x)\}$$

и

$$W_f = \cap\{W_h : h \in H_f\} = \{x \in X : h(f(x)) = h(x), \text{ для всех } h \in H_f\}$$

Последнее множество называют *обобщенным рекуррентным множеством* функции f.

Следующие факты описывают простые свойства введенных понятий.

1) H_f - выпуклый конус, содержащий константы.

2) Если $h \in H_f$, то $h \circ f^{\circ n} \in H_f$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

3) Множества W_h замкнуты для любой функции $h \in H_f$.

4) Множество W_f замкнуто и вполне инвариантно для отображения f.

5) Если X компактное пространство, то $W_h \neq \emptyset$ для любой функции $h \in H_f$, и найдется функция $\bar{h} \in H_f$, для которой $W_f = W_{\bar{h}}$.

Неподвижную точку x функции $f : X \to X$ называют *притягивающей неподвижной точкой* этой функции, если найдется окрестность U_x точки x такая, что функции $f^{\circ n}$ определены на U_x при любом натуральном n, и последовательность $\{f^{\circ n}_{|U_x}\}$ равномерно сходится на U_x к постоянному отображению $a : U_x \to X$, $a(y) = x$ для $y \in U_x$. Множество всех притягивающих неподвижных точек функции f обозначим A_f.

Неподвижную точку x функции $f : X \to X$ называют *отталкивающей неподвижной точкой* этой функции, если существует окрестность U_x точки x такая, что для любой точки $y \in U_x$, $y \neq x$ найдется натуральное n, для которого $f^{\circ n}(y) \notin U_x$. Окрестность U_x называют изолирующей. Множество всех отталкивающих неподвижных точек функции f обозначим R_f.

По определению, $Atr(f) = \cup\{A_{f^{\circ n}} : n \in \mathbb{N}\}$, $Rep(f) = \cup\{R_{f^{\circ n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Неподвижные точки и равновесные функции

Теорема 1. *Всякая притягивающая неподвижная точка x функции $f : X \to X$ является точкой локального минимума любой функции $h \in H_f$.*

Доказательство. Пусть x - притягивающая неподвижная точка функции f и $h \in H_f$. Тогда найдется окрестность U_x точки x такая, что $f^{\circ n}(y) \to x$ при $n \to \infty$ для любой точки $y \in U_x$. Поскольку функция $h \circ f^{\circ n}$ является равновесной для функции f при любом $n \in \mathbb{N}$, то $h(f^{\circ n}(y)) \leq h(y)$. Переходя к пределу, получим, что $h(x) \leq h(y)$ для любой точки $y \in U_x$. Это означает, что x является точкой локального минимума функции $h \in H_f$. □

Теорема 2. *Пусть z_0 - притягивающая неподвижная точка голоморфной функции f. Тогда найдется функция $\bar{h} \in H_f$, для которой точка z_0 будет точкой строгого локального минимума.*

Доказательство. Можно считать, что $z_0 = 0$, и в некотором круге O_{r_0} с центром в точке z_0 функция f представляется рядом

$$f(z) = \lambda z + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z^3 + \dots . \tag{1}$$

Общая ситуация сводится к указанной с помощью локальной замены координат ([11], §8). В этом случае $f'(z_0) = \lambda$ и, поскольку точка z_0 - притягивающая неподвижная точка, то $|\lambda| < 1$ ([11], лемма 8.1). Из представления (1) следует, что $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ при $z \to 0$. Иными словами, существуют постоянные $c > 0$, r_1 такие, что $0 < r_1 \le r_0$ и $|f(z) - \lambda z| \le c\left|z^2\right|$, для $z \in O_{r_1}$. Пусть число p таково, что $|\lambda| < p < 1$. Выберем число r так, что $0 < r \le r_1$ и $|\lambda| + cr < p$. Если $z \in O_r$, то $|f(z)| \le |\lambda z| + c\left|z\right|^2 < |z|(|\lambda| + cr) < p\,|z|$. Тогда $|f^{\circ n}(z)| \le p^n\,|z| < p^n r$.

Рассмотрим функцию

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |f^{\circ(n+1)}(z) - f^{\circ n}(z)|. \tag{2}$$

Используя предыдущую оценку, можем написать

$$|f^{\circ(n+1)}(z) - f^{\circ n}(z)| < p^{n+1} r + p^n r = p^n r(p+1) < 2p^n r.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (2) и непрерывность функции f в круге O_r.

Элементарные преобразования показывают, что

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |f^{\circ(k+1)}(z) - f^{\circ k}(z)| = |f(z) - z| + \sum_{k=1}^{\infty} |f^{\circ(k+1)}(z) - f^{\circ k}(z)| = |f(z) - z| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |f^{\circ k}(f(z)) - f^{\circ(k-1)}(f(z))| = |f(z) - z| + \sum_{k=0}^{\infty} |f^{\circ(k+1)}(f(z)) - f^{\circ k}(f(z))| =$$
$$= |f(z) - z| + h(f(z)) \ge h(f(z)).$$

Поскольку в достаточно малой окрестности неподвижной точки $z_0 = 0$ нет других неподвижных точек функций $f^{\circ n}$, то на самом деле $0 < h(f(z)) < h(z)$, если $z \in O_r, z \neq z_0$.

Продолжим функцию h на все пространство. Положим $d = inf\{h(z) : z \in \partial O_r\}$, $U_0 = \{z : h(z) < d\}$. Здесь ∂O_r - граница круга O_r. Рассмотрим функцию

$$\bar{h} = \begin{cases} h(z), & z \in U_0, \\ d, & z \notin U_0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция непрерывно продолжает функцию $h_{|U_0}$. Непосредственно проверяется, что $\bar{h}(f(z)) \le \bar{h}(z)$ для любой точки z. Таким образом, $\bar{h} \in H_f$. Точка z_0 является точкой строгого локального минимума этой функции. □

Теорема 3. *Всякая отталкивающая неподвижная точка голоморфной функции f является точкой локального максимума любой функции $h \in H_f$.*

Доказательство. Пусть z_0 - отталкивающая неподвижная точка функции f, и U_{z_0} - изолирующая окрестность точки z_0. Как и в доказательстве теоремы 2 будем считать, что $z_0 = 0$ и функция f представима степенным рядом (1). Так как z_0 - отталкивающая неподвижная точка, то $|f'(z_0)| = |\lambda| > 1$ ([11], Теорема 8.8). По теореме об обратной функции, найдется замкнутый круг C_0 с центром в точке z_0, содержащийся в U_{z_0} и такой, что функция f гомеоморфно отображает C_0 на $f(C_0)$.

Рассмотрим последовательность множеств $\{U_k\}$,

$$U_0 = C_0, \qquad U_k = C_0 \cap f^{-1}(C_0) \cap f^{-\circ 2}(C_0) \cap \ldots \cap f^{-\circ k}(C_0).$$

Очевидно, что $U_{k+1} \subset U_k$.

Покажем, что множества $\{U_k\}$ пересекается в единственной точке, т.е., что $\bigcap\limits_k U_k = z_0$. Предположим противное. Пусть $w \in \bigcap\limits_k U_k, w \neq z_0$. Тогда $w \in f^{-\circ k}(C_0)$ для любого натурального k и, следовательно, $f^{\circ k}(w) \in C_0$. Это противоречит тому, что окрестность C_0 изолирующая. Таким образом, допущение неверно, и множества U_k пересекаются в единственной точке. Отсюда вытекает, что $diam U_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из определения множеств U_k и гомеоморфности функции f на C_0 следует, что $f(U_k) = U_{k-1} \cap f(C_0)$. Поскольку $diam U_k \to 0$, то $U_{k-1} \subset f(C_0)$ при достаточно больших k. Поэтому $f(U_k) = U_{k-1}$ для таких k. Не ограничивая общности можно считать, что последне равенство верно для всех натуральных k. Теперь видно, что для любого $w \in U_0$ и для любого натурального k найдется элемент $z_k \in U_k$ такой, что $f^{\circ k}(z_k) = w$ и, следовательно, $h(w) = h(f^{\circ k}(z_k))$. Так как $h \in H_f$, то $h(f^{\circ k}(z_k)) \leq h(z_k)$, т.е. $h(w) \leq h(z_k)$. Поскольку $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$, то $h(w) \leq h(z_0)$. Таким образом, отталкивающая неподвижная точка z_0 функции f является точкой локального максимума функции $h \in H_f$. □

Пример. Покажем, что функция

$$h(z) = \begin{cases} \left|z - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2}, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} - \left|z - \dfrac{1}{2}\right|, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

является равновесной для функции $f(z) = 2z(1-z)$.

Простыми преобразованиями проверяется равенство $\left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| = 2\left|\left(z - \dfrac{1}{2}\right)\right|^2$. Отсюда следует, что неравенства $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ и $\left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ эквивалентны. При этом $\left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$h(f(z)) = \begin{cases} \left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2}, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} - \left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right|, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2\left|z - \dfrac{1}{2}\right|^2 - \dfrac{1}{2}, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} - 2\left|z - \dfrac{1}{2}\right|^2, & \left|z - \dfrac{1}{2}\right| \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь уже легко видеть, что $h(f(z)) \leq h(z)$.

Заметим еще, что функция h имеет строгий минимум в притягивающей неподвижной точке $z = \frac{1}{2}$ и имеет максимум в точках окружности $S_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\}$, в частности, в отталкивающей неподвижной точке $z = 0$. При этом $h(f(z)) < h(z)$ для $z \in \mathbb{C} \backslash S_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, $z \neq \frac{1}{2}$.

2. Множество Жюлиа и обобщенное рекуррентное множество

В этом пункте мы будем рассматривать три класса голоморфных отображений, именно: рациональные функции $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, целые трансцендентные функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, мероморфные функции $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$. В последнем случае итерации $f^{\circ n}$ определены во всех точках плоскости $\mathbb{C}$ за исключением счетного числа полюсов отображений $f, f^{\circ 2}, \ldots, f^{\circ(n-1)}$.

Для функции f любого из этих классов множеством Фату называется совокупность всех точек $z \in \mathbb{C}$ (или $z \in \hat{\mathbb{C}}$), для которых существует окрестность U такая, что сужения функций последовательности итераций $\{f^{\circ n}\}$ образуют нормальное семейство функций, отображающих U в $\mathbb{C}$ (или $\hat{\mathbb{C}}$). Дополнение множества Фату до комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (или $\hat{\mathbb{C}}$), называется множеством Жюлиа функции f, обозначается J_f.

Точка z_0 называется исключительной точкой голоморфного отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ (или $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, или $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$), если множество $\{f^{-\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ конечно (возможно пусто). Множество исключительных точек для отображения f обозначим $\mathcal{E}_f$ ([11], §4).

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит одному из следующих классов*

1. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *- рациональная функция степени не меньше 2;*
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *- целая трансцендентная функция;*
3. $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ *- мероморфная функция.*

Тогда сужение любой функции $h \in H_f$ на множество J_f является константой.

Доказательство. Пусть $z, w \in Rep(f) \backslash \mathcal{E}_f$. Так как $Rep(f) \subset J_f$ и $J_f = cl(\cup\{f^{\circ n}(z) : n \in \mathbb{N}\})$ [1], то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $k \in \mathbb{N}$ и элемент $w_n \in O_{w,\frac{1}{n}} \cap f^{-\circ k}(z)$ (здесь $O_{w,r} = \{z : |z - w| < r\}$). Тогда $f^{\circ k}(w_n) = z$ и, следовательно, $h(z) = h(f^{\circ k}(w_n)) \leq h(w_n)$. Переходя к пределу, получим, что $h(z) \leq h(w)$. Совершенно аналогично $h(w) \leq h(z)$ и, значит, $h(z) = h(w)$ для $z, w \in Rep(f) \backslash \mathcal{E}_f$. Поскольку $J_f = cl(Rep(f))$ (Теорема 14.1, [11], Теорема 4, [1]) и множество $\mathcal{E}_f$, содержит не более двух элементов ([1], [11]), то $h(z) = h(w)$ для любых точек $z, w \in J_f$. □

Следствие 1. *Имеет место включение $J_f \subset W_f \backslash Atr(f)$.*

Замечание 1. Если $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ - рациональная функция степени не меньше 2, то $\mathcal{E}_f \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash J_f$ (Теорема 4.6, [11]).

[1] Символом $cl\,A$ обозначается замыкание множества A.

Замечание 2. Для функции $f(z) = 2z(1-z)$ из примера предыдущего пункта $J_f = W_f \backslash Atr(f)$.

Замечание 3. Поскольку множество J_f не имеет изолированных точек, равновесная функция не может иметь строгого локального максимума в отталкивающей неподвижной точке. Тем не менее для функции примера 2 и отталкивающей неподвижной точки $z = 0$ для всех $w \notin J_f$ верно неравенство $h(w) < h(0)$.

Заключение

Отметим, что формулировки и аналитические доказательства приведенных результатов были получены после значительного числа вычислительных экспериментов, в ходе которых конструировались равновесные функции, а также обобщенные рекуррентные множества и множества Жюлиа для различных голоморфных функций.

Список литературы

[1] Bergweiler Walter. Iteration of meromorphics function. Bulletin of the american mathematical society, 1993, v.29, №2, p. 151 – 188.

[2] Гусев А.И., Донской Д.Е. Об изоморфизме предпорядков, порождаемых динамическими системами. //Сб. «Применение функционального анализа в теории приближений». Калинин:КГУ, 1982, стр. 66 – 81.

[3] Гусев А.И. О структуре аттракторов отображений компактов. //Сб. «Применение функционального анализа в теории приближений». Калинин:КГУ, 1984, стр. 11 – 18.

[4] Гусев А.И., Донской Д.Е. О структуре предпорядков отображений компактов. //Сб. «Применение функционального анализа в теории приближений». Калинин:КГУ, 1986, стр. 32 – 40.

[5] Гусев А.И. Некоторые свойства диссипативных отображений. //Сб. «Ученые записки». Калинин:КГУ, том 1, 1996, стр. 6 – 7.

[6] Гусев А.И., Порошина О.С. О структуре притягивающих множеств отображений компактов. Международная конференция «Колмогоров и современная математика», посвященная 100-летию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. Тезисы докладов.-Москва:МГУ, 2003, стр. 293 – 294.

[7] Еременко А.Э., Любич М.Ю. Динамика аналитических преобразований. Алгебра и анализ, том 1, №3, 1989, стр. 2 – 70.

[8] Заславский А.Я. Магистральные множества непрерывных преобразований метрических компактов. Сибирский математический журнал, том 23, №2, 1982, стр. 76 – 82.

[9] Заславский А.Я. О мерах, инвариантных относительно преобразований метрических компактов. Сибирский математический журнал, том 25, №2, 1984, стр. 121 – 131.

[10] Заславский А.Я. Об одном классе многозначных отображений. Сибирский математический журнал, том 26, №2, 1985, стр. 98 – 101.

[11] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

[12] Рубинов А.М. Магистральные множества в дискретных дисперсных динамических системах. Сибирский математический журнал, том 21, №4, 1980, стр. 136 – 145.

[13] Рубинов А.М. Динамические системы и предпорядки. Доклады Академии Наук СССР, том 256, №2, 1980, стр. 287 – 290.

[14] Рубинов А.М. Обобщенные рекуррентные множества в дисперсных дискретных динамических системах. Сибирский математический журнал, том 24, №3, 1983, стр. 150 – 157.