УДК 533

О НЕКОТОРЫХ ТОЖДЕСТВАХ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.02.2024, после переработки 21.02.2024.

Доказаны три тождества, которым подчиняются макропараметры идеального политропного газа. С их помощью установлена эквивалентность двух различных форм записи нестационарной системы Эйлера на классе непрерывно дифференцируемых функций. Показано, что любое бесконечно дифференцируемое решение стационарной системы Эйлера при некоторых дополнительных условиях является также решением стационарной системы Навье–Стокса и стационарной квазигазодинамической системы.

Ключевые слова: система Эйлера, система Навье–Стокса, квазигазодинамическая система, точные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. С. 18–26.
https://doi.org/10.26456/vtpmk707

Введение

Для описания движений газа широко используются классические системы Эйлера и Навье–Стокса [1, 2]. Аналитические исследования свойств этих систем играют важную роль. В последние три десятилетия в математическом моделировании газодинамических течений применяется также квазигазодинамическая система уравнений [3, 4]. Проблема выявления ее связей с указанными выше классическими моделями является актуальной.

В настоящей статье доказаны некоторые тождества, которым подчиняются макропараметры идеального политропного газа. С помощью одного из этих тождеств установлена эквивалентность двух различных форм записи нестационарной системы Эйлера на классе непрерывно дифференцируемых функций. Еще одно тождество используется при доказательстве утверждения о том, что всякое бесконечно дифференцируемое решение стационарной системы Эйлера при некоторых дополнительных условиях является также решением стационарной системы Навье–Стокса и стационарной квазигазодинамической системы.

1. Системы Эйлера и Навье–Стокса. Квазигазодинамическая система

Классическая система Эйлера в газовой динамике [1, 2] без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ (\rho \vec{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div}\ (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \text{div}\ \Big[\rho \vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big] = 0. \tag{1.3}$$

Дополним ее уравнениями состояния идеального политропного газа

$$p = \rho \mathrm{R} T, \qquad \varepsilon = c_v T, \qquad s = c_v \ln\Big(\frac{\mathrm{R}T}{\rho^{(\gamma-1)}}\Big) + s_0. \tag{1.4}$$

Здесь R – газовая постоянная,

$$c_v = \frac{\mathrm{R}}{\gamma - 1}, \qquad c_p = c_v + \mathrm{R} = \frac{\gamma \mathrm{R}}{\gamma - 1} \tag{1.5}$$

– удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, s_0 – аддитивная постоянная. Неизвестными функциями в (1.1) – (1.4) можно считать плотность $\rho = \rho(\vec{x}, t) > 0$, скорость $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давление $p = p(\vec{x}, t) > 0$.

Система Навье–Стокса отличается от (1.1) – (1.4) присутствием членов, ответственных за вязкость и теплопроводность. Она имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ (\rho \vec{u}) = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div}\ (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \text{div}\ \Pi_{NS}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \text{div}\ \Big[\rho \vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big] + \text{div}\ \vec{q}_{NS} = \text{div}\ \big(\Pi_{NS} \cdot \vec{u}\big). \tag{1.8}$$

Здесь тензор вязких напряжений Π_{NS} и вектор теплового потока $\vec{q}_{NS}$ определяются с помощью выражений

$$\Pi_{NS} = \eta\Big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T - \frac{2}{3} I \text{div}\ \vec{u}\Big), \tag{1.9}$$

$$\vec{q}_{NS} = -æ \nabla T. \tag{1.10}$$

Символом I обозначен единичный тензор-инвариант второго ранга. Присоединим к (1.6) – (1.10) уравнения состояния совершенного газа (1.4). Коэффициенты вязкости η и теплопроводности æ определим с помощью выражений

$$\eta = \eta_1 \Big(\frac{T}{T_1}\Big)^{\omega}, \quad æ = \frac{c_p \eta}{Pr}. \tag{1.11}$$

Здесь η_1 – известное значение коэффициента динамической вязкости при температуре T_1, ω – показатель степенной зависимости из промежутка $[0.5,\ 1]$, Pr – число Прандтля.

Квазигазодинамическая система [3,4] отличается от системы Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами. Она может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho \vec{u}_m\big) = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u}_m \otimes \vec{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \mathrm{div}\ \Big[\rho \vec{u}_m\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big] + \mathrm{div}\ \vec{q} = \mathrm{div}\ \big(\Pi \cdot \vec{u}\big). \tag{1.14}$$

Здесь

$$\vec{u}_m = \vec{u} - \vec{w}, \tag{1.15}$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\mathrm{div}\ (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p\big), \tag{1.16}$$

$$\vec{w}_* = \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big), \tag{1.17}$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho(\vec{u} \otimes \vec{w}_*) + \tau I\big((\vec{u} \cdot \nabla)p + \rho c_s^2 \mathrm{div}\ \vec{u}\big), \tag{1.18}$$

$$\vec{q} = -æ\nabla T - \tau\rho\vec{u}T(\vec{u} \cdot \nabla\big)s. \tag{1.19}$$

Символом c_s обозначена скорость звука в газе. Она вычисляется по формуле Лапласа

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \mathrm{R} T}. \tag{1.20}$$

Величины Π и $\vec{q}$ интерпретируются как тензор вязких напряжений и вектор теплового потока соответственно. Вектор плотности потока массы определяется по формуле

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}_m. \tag{1.21}$$

Дополним систему (1.12) – (1.20) уравнениями состояния идеального политропного газа, а также выражениями для диссипативных коэффициентов (1.11). Параметр τ зададим с помощью выражения

$$\tau = \frac{\eta}{p\ Sc}, \tag{1.22}$$

где Sc – число Шмидта.

2. Некоторые тождества в газовой динамике

Докажем некоторые тождества для макропараметров газа, подчиняющихся уравнениям состояния (1.4).

Теорема 1. *Пусть в области* $V \subset \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *определены непрерывно дифференцируемые функции* $\rho = \rho(\vec{x}) > 0$, $p = p(\vec{x}) > 0$, $T = T(\vec{x}) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}) > 0$ *и* $s = s(\vec{x})$, *подчиняющиеся уравнениям состояния* (1.4). *Кроме того, задано векторное поле* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ *класса гладкости* $\boldsymbol{C}^1(V)$. *Тогда для всех* $\vec{x} \in V$ *справедливо равенство*

$$\frac{p}{\rho^2}\big(div\ (\rho\vec{u})\big)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + p div\ \vec{u}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\big((\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho c_s^2\ div\ \vec{u}\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big((\vec{u}\cdot\nabla)s\big)^2. \tag{2.1}$$

Здесь c_s *– скорость звука в газе, определяемая по формуле Лапласа* (1.20), c_p *– удельная теплоемкость при постоянном давлении.*

Доказательство. Введем дифференциальный оператор

$$D = (\vec{u}\cdot\nabla) \tag{2.2}$$

и запишем (2.1) в виде

$$\frac{p}{\rho^2}\big(D\rho + \rho \mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\big(\rho D\varepsilon + p\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\big(Dp + \rho c_s^2\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big(Ds\big)^2. \tag{2.3}$$

Раскрывая в (2.3) квадраты суммы двух слагаемых, будем иметь

$$\frac{p}{\rho^2}\big(D\rho\big)^2 + 2\frac{p}{\rho}\big(D\rho\big)\mathrm{div}\ \vec{u} + p\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 +$$

$$+\frac{\rho}{\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)^2 + 2\frac{p}{\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)\mathrm{div}\ \vec{u} + \frac{p^2}{\rho\varepsilon}\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\big(Dp\big)^2 + 2\big(Dp\big)\mathrm{div}\ \vec{u} + \rho c_s^2\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big(Ds\big)^2. \tag{2.4}$$

Представим (2.4) в эквивалентной форме

$$\frac{p}{\rho^2}\big(D\rho\big)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}\big(Dp\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big(Ds\big)^2 +$$

$$+2\bigg(Dp - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho\bigg)\mathrm{div}\ \vec{u} + \bigg(\rho c_s^2 - \frac{p^2}{\rho\varepsilon} - p\bigg)\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2. \tag{2.5}$$

Поскольку

$$Dp - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho = (\gamma-1)D\big(\rho\varepsilon\big) - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho =$$

$$= (\gamma-1)\rho D\varepsilon + (\gamma-1)\varepsilon D\rho - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho =$$

$$= \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon + \frac{p}{\rho}D\rho - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho = 0, \tag{2.6}$$

$$\rho c_s^2 - \frac{p^2}{\rho\varepsilon} - p = \rho\Big(\frac{\gamma p}{\rho}\Big) - (\gamma-1)p - p = 0, \tag{2.7}$$

равенство (2.5) можно записать следующим образом:

$$\frac{p}{\rho^2}\big(D\rho\big)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}\big(Dp\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big(Ds\big)^2. \tag{2.8}$$

При проведении выкладок (2.6), (2.7) использовалась формула Лапласа (1.20), а также вытекающая (1.4), (1.5) формула

$$p = (\gamma-1)\rho\varepsilon. \tag{2.9}$$

Справедливость равенства (2.8) будет установлена, если показать, что правая его часть равна левой. Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.8):

$$\frac{1}{\rho c_s^2}\big(Dp\big)^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}\big(D(\rho\varepsilon)\big)^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}\big(\rho D\varepsilon + \varepsilon D\rho\big)^2 =$$

$$= \frac{(\gamma-1)^2\varepsilon^2}{\rho c_s^2}\big(D\rho\big)^2 + \frac{(\gamma-1)^2\rho}{c_s^2}\big(D\varepsilon\big)^2 + 2\frac{(\gamma-1)^2\varepsilon}{c_s^2}(D\rho)D\varepsilon =$$

$$= \frac{p}{\gamma\rho^2}\big(D\rho\big)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho}{\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)^2 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \tag{2.10}$$

Хорошо известно, что уравнения состояния (1.4) подчиняются тождеству Гиббса

$$Tds = d\varepsilon + pd\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что

$$TDs = D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho. \tag{2.12}$$

Принимая во внимание (2.12), преобразуем второе слагаемое в правой части (2.8):

$$\frac{\rho T}{c_p}\big(Ds\big)^2 = \frac{\rho}{c_p T}\big(TDs\big)^2 = \frac{\rho}{c_p T}\bigg(D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho\bigg)^2 =$$

$$= \frac{p^2}{c_p T\rho^3}\big(D\rho\big)^2 + \frac{\rho}{c_p T}\big(D\varepsilon\big)^2 - 2\frac{p}{c_p T\rho}(D\rho)D\varepsilon =$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p}{\rho^2}\big(D\rho\big)^2 + \frac{\rho}{\gamma\varepsilon}\big(D\varepsilon\big)^2 - 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \tag{2.13}$$

Складывая (2.10) и (2.13), выводим (2.8). □

Теорема 2. *Пусть на множестве* $V \times [0,\ T_f] \subset \mathbb{R}^4_{\vec{x},t}$, *где* T_f – *заданное положительное число, определены непрерывно дифференцируемые функции* $\rho = \rho(\vec{x},t) > 0$, $p = p(\vec{x},t) > 0$, $T = T(\vec{x},t) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x},t) > 0$ *и* $s = s(\vec{x},t)$, *подчиняющиеся уравнениям состояния* (1.4). *Кроме того, задано векторное поле*

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ *класса гладкости* $\boldsymbol{C}^1\big(V \times [0,\ T_f]\big)$. *Тогда для всех* $(\vec{x}, t) \in V \times [0,\ T_f]$ *справедливо равенство*

$$\frac{p}{\rho^2}\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ (\rho\vec{u})\Big)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\Big(\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + p div\ \vec{u}\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\Big(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho c_s^2\ div\ \vec{u}\Big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\Big(\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)s\Big)^2. \tag{2.14}$$

Доказательство. Введем дифференциальный оператор

$$D_* = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla) \tag{2.15}$$

и представим (2.14) в виде

$$\frac{p}{\rho^2}\big(D_*\rho + \rho\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\big(\rho D_*\varepsilon + p\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\big(D_* p + \rho c_s^2\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\big(D_* s\big)^2. \tag{2.16}$$

Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных выше. В формулах (2.4) – (2.13) нужно всюду заменить оператор D на оператор D_*. □

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *для всех* $(\vec{x}, t) \in V \times [0,\ T_f]$ *справедливо равенство*

$$\frac{p}{\rho^2}\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t}\Big)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\Big)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\Big(\frac{\partial s}{\partial t}\Big)^2. \tag{2.17}$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны проведенным выше. В формулах (2.8) – (2.13) достаточно всюду заменить дифференциальный оператор D на оператор

$$D_{**} = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.18}$$

□

3. Возможные приложения полученных тождеств

Повторяя рассуждения из [2], представим систему Эйлера в недивергентной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0, \tag{3.2}$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + p\mathrm{div}\ \vec{u} = 0. \tag{3.3}$$

В [2] на с. 33 система Эйлера выписана также в симметрической форме

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\rho c_s^2}\Big(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p\Big) + \mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)s = 0. \tag{3.6}$$

Симметричная форма позволяет установить гиперболический характер этой системы. Обе системы дополним уравнениями состояния идеального политропного газа

$$p = \rho \mathrm{R}T, \qquad \varepsilon = c_v T, \qquad s = c_v \ln\Big(\frac{\mathrm{R}T}{\rho^{(\gamma-1)}}\Big) + s_0. \tag{3.7}$$

Теорема 4. *Всякое непрерывно дифференцируемое на множестве* $V\times[0,\ T_f]$ *решение* $\rho=\rho(\vec{x},t)>0$, $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$ *и* $p=p(\vec{x},t)>0$ *системы* (3.1) – (3.3), (3.7) *является решением системы* (3.4) – (3.6), (3.7)*. Обратное утверждение также справедливо.*

Доказательство. Уравнения (3.2) и (3.4) в обеих системах совпадают. Если справедливы равенства (3.1) и (3.3), то левая часть (2.14) обращается в нуль на множестве $V\times[0,\ T_f]$, т.е.

$$\frac{1}{\rho c_s^2}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)p+\rho c_s^2\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big)^2+\frac{\rho T}{c_p}\Big(\frac{\partial s}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)s\Big)^2=0, \quad (\vec{x},t)\in V\times[0,\ T_f]. \tag{3.8}$$

Но тогда всюду в $V\times[0,\ T_f]$ выполняются равенства (3.5) и (3.6). Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Итак, тождество (2.14) позволяет легко установить известный [2] факт эквивалентности двух рассматриваемых систем на указанном классе функций. Приведем еще один пример использования полученных тождеств. Рассмотрим случай установившихся течений.

Теорема 5. *Пусть* $\rho=\rho(\vec{x})>0$, $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x})$, $p=p(\vec{x})>0$ *– бесконечно дифференцируемое в некоторой области* $V\subset\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *решение стационарной системы Эйлера и выполнены условия*

$$div\ \Pi_{NS}=0, \tag{3.9}$$

$$div\ \vec{q}_{NS} = div\ (\Pi_{NS}\cdot\vec{u}). \tag{3.10}$$

Тогда тройка функций $(\rho,\vec{u},p)$ *является точным решением как стационарной системы Навье–Стокса, так и стационарной квазигазодинамической системы.*

Доказательство. Пусть $(\rho,\vec{u},p)$ есть решение системы Эйлера в случае установившихся течений. Тогда

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\rho+\rho\mathrm{div}\ \vec{u}=0, \tag{3.11}$$

$$\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=0, \tag{3.12}$$

$$\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p\mathrm{div}\ \vec{u}=0. \tag{3.13}$$

Из (3.11) – (3.13) следует, что

$$\mathrm{div}\ (\rho\vec{u})=0, \tag{3.14}$$

$$\mathrm{div}\ (\rho\vec{u}\otimes\vec{u})+\nabla p=0, \tag{3.15}$$

$$\operatorname{div}\left[\rho\vec{u}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\right]=0. \tag{3.16}$$

В силу (3.9), (3.10), (3.14) – (3.16), тройка $(\rho, \vec{u}, p)$ удовлетворяет стационарной системе Навье–Стокса. Воспользовавшись тождеством (2.1), а также равенствами (3.13) и (3.14), получаем

$$(\vec{u}\cdot\nabla)p+\rho c_s^2 \operatorname{div}\vec{u}=0, \tag{3.17}$$

$$(\vec{u}\cdot\nabla)s=0. \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что все зависящие от τ члены в стационарной квазигазодинамической системе обращаются в нуль в области V. Таким образом, тройка $(\rho, \vec{u}, p)$ является также точным решением этой системы. □

Теорема 5 может использоваться для построения общих точных решений стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и квазигазодинамической системы. Соответствующий пример приведен в [4] на с. 91 – 93.

Заключение

Итак, полученные тождества позволяют просто доказать некоторые известные утверждения. Представляют интерес другие возможные применения этих тождеств. Не изучен вопрос об их обобщении на случай движения несовершенного газа.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 336 с.

[3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[4] Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О некоторых тождествах в газовой динамике // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. С. 18–26. https://doi.org/10.26456/vtpmk707

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
профессор кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON SOME IDENTITIES IN GAS DYNAMICS

Sheretov Yu.V.
Tver State University, Tver

Received 10.02.2024, revised 21.02.2024.

Three identities that govern the macroparameters of an ideal polytropic gas are proven. With their help the equivalence of two different forms of writing the non-stationary Euler system on class of continuously differentiable functions is established. It is shown that any infinitely differentiable solution of a stationary Euler system under some additional conditions is also a solution of stationary Navier–Stokes system and stationary quasi-gas-dynamic system.

Keywords: Euler system, Navier–Stokes system, quasi-gas-dynamic system, exact solutions.

Citation

Sheretov Yu.V., “On some identities in gas dynamics”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 2, 18–26 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk707

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Ovsyannikov L.V., *Lektsii po osnovam gazovoj dinamiki*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2003 (in Russian), 336 pp.

[3] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[4] Sheretov Yu.V., *Kineticheski soglasovannye uravneniya gazovoj dinamiki [Kinetically consistent equations of gas dynamics]*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 129 pp.

Author Info

1. **Sheretov Yurii Vladimirovich**
Professor of the Department of Fundamental Mathematics and Digital Technologies, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru