МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.6

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВОЗМОЖНОСТНО-ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Новикова В.Н.
Кафедра информационных технологий,
Тверской госуниверситет, Тверь

Поступила в редакцию 25.03.2010, после переработки 30.03.2010.

В статье продолжается исследование задач возможностно-вероятностной оптимизации, начатое в [19, 20, 21]. Получен метод решения еще одной задачи возможностно-вероятностного программирования — задачи максимизации нечеткой случайной цели при построчных ограничениях по возможности / вероятности. Возможности метода демонстрируются на модельном примере.

Research of problems of the possibility-probability optimization started in [19, 20, 21] continues in the article. Solution method for the problem of fuzzy random goal optimization under fuzzy constraints is obtained. The results are demonstrated on an example.

Ключевые слова: нечеткая величина, нечеткая случайная величина, возможностно-вероятностная оптимизация, эквивалентный детерминируемый аналог.
Keywords: fuzzy variable, fuzzy random variable, possibility-probability optimization, equivalent deterministic analogue.

Введение

В статье исследуется задача максимизации достижения нечеткой случайной цели при построчных ограничениях по возможности/вероятности. Строится эквивалентный детерминированный аналог задачи в том случае, когда параметры модели содержат в себе элементы неопределенности возможностного и вероятностного типов в предположении, что распределения возможностей полностью известны, а случайные факторы имеют нормальные функции распределения. Достоинства метода демонстрируются на модельном примере.

1. Базовые понятия

Пусть Γ есть обычное (четкое) множество элементов, обозначаемых далее через $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ.

Определение 1. Мерой возможности называется функция множества

$$\pi : P(\Gamma) \to [0,1],$$

обладающая свойствами

$$1)\pi\{\varnothing\} = 0,\ \pi\{\Gamma\} = 1,$$

$$2)\pi\{\bigcup_{i\in I} A_i\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Определение 2. Возможностной величиной называется отображение $Z : \Gamma \to E^1$, значения которого характеризуются функцией $\mu_Z : E^1 \to [0,1]$, называемой распределением возможностей величины Z:

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma | Z(\gamma) = z\}\ \forall z \in E^1.$$

$\mu_Z(z)$ есть возможность того, что величина Z может принять значение z. Здесь и далее E^1, E^n есть евклидовы пространства соответствующей размерности.

Определение 3. Действительное число m называется модальным значением возможностной величины Z, если $\mu_Z(m) = 1$.

Определение 4. Носителем возможностной величины Z называется множество

$$supp(Z) = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) > 0\}.$$

Определение 5. Множеством $\alpha-$уровня возможностной величины Z называется множество

$$Z_\alpha = [Z_\alpha^-, Z_\alpha^+] = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) \geq \alpha\},\ \alpha \in (0,1].$$

Определение 6. Возможностная величина Z называется нечетко выпуклой, если ее функция распределения является квазивогнутой:

$$\mu_Z(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \geq min\{\mu_Z(z_1), \mu_Z(z_2)\},$$

$$\forall z_1, z_2 \in E^1, \forall \lambda \in [0,1].$$

Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ — возможностные величины. Функция распределения совокупности возможностных величин определяется следующим образом:

$$\mu_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = \pi\{\gamma \in \Gamma | Z_1(\gamma) = z_1, \ldots, Z_n(\gamma) = z_n\}, (z_1,\ldots,z_n) \in E^n.$$

Определение 7. Возможностные величины $Z_1, \ldots, Z_n$ называются взаимно минисвязанными, если для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$

$$\mu_{Z_{i_1},\ldots,Z_{i_k}}(z_{i_1},\ldots,z_{i_k}) = min\{\mu_{Z_{i_1}}(z_{i_1}), \ldots, \mu_{Z_{i_k}}(z_{i_k})\},\ \forall (z_{i_1},\ldots,z_{i_k}) \in E^k.$$

Здесь $\mu_{Z_{i_s}}$ есть одномерные функции распределения возможностей.

Пусть $\mathfrak{F}(E^1)$ — множество всех нечетких величин, чьи функции распределения удовлетворяют условиям квазивогнутости и полунепрерывности сверху.

Если $f \in \mathfrak{F}(E^1)$, то $\forall \alpha \in (0,1]$, $f_\alpha = [f_\alpha^-, f_\alpha^+]$ — замкнутый интервал E^1.

Впервые определение нечеткой случайной величины было дано в работах [14, 15, 16]. Дадим определение, следуя [13].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство .

Определение 8. Нечеткая случайная величина $\tilde{a}$ есть вещественная функция $\tilde{a} : \Omega \times \Gamma \to E^1$, такая, что при любом фиксированном $\gamma \in \Gamma$, $a_\gamma(\omega)$ является случайной величиной, определенной на $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Распределение нечеткой случайной величины можно рассматривать также, как и в случае нечеткой переменной, т.е. следующим образом:

$$\mu_{\tilde{a}}(x,\omega) = \pi\{\gamma \in \Gamma |\ \tilde{a}(\omega,\gamma) = x\},\ \forall x \in E^1, \forall \omega \in \Omega.$$

Определение 9. $\alpha-$уровневым множеством нечеткой случайной величины называется множество $a_\alpha(\omega) = \{t \in E^1\ |\mu_{\tilde{a}(\omega,\gamma)}(t) \geq \alpha\},\ 0 < \alpha \leq 1.$

В работе [10] введено сдвиг-масштабное представление случайной нечеткой величины.

Определение 10. Нечеткая случайная величина $X(\omega,\gamma)$ имеет сдвиг-масштабное представление, если:

$$X(\omega,\gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega)X_0(\gamma),$$

где $a(\omega), \sigma(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, а $X_0(\gamma)$ — нечеткая (возможностная) величина, определенная на возможностном пространстве $(\Gamma, P(\Gamma), \Pi)$.

2. Принцип принятия решений

В качестве нечетких случайных функций, которые формируют модель критерия и модель ограничения используются отображения $f_i(\cdot,\cdot,\cdot) : X \times \Omega \times \Gamma \to E^1, i = 0,\ldots,m$, где X есть множество допустимых решений, $X \subset E^n$. Следовательно, множество допустимых решений может быть получено комбинированием элементов множества решений с элементами множеств случайных и нечетких параметров. Поэтому любое конкретное решение не может быть напрямую связано ни со степенью достижения цели, ни со степенью выполнения системы ограничений [11].

Существование двух различных типов неопределенности в параметрах функций $f_i(x,\omega,\gamma)$ усложняет формализацию принципов принятия решения. Тем не менее процедура принятия решения может быть естественным образом основана на принципах принятия решений, используемых в стохастической [6] и возможностной оптимизации [11] или путем комбинирования их:

- усреднение нечеткой и/или случайной величин, которое позволяет решать задачи с нечеткими случайными данными;

- выбор оптимального решения с наиболее возможными/вероятными значениями нечетких/случайных параметров или с возможностью/вероятностью не ниже заданного уровня.

Другие подходы к оптимизации в условиях нечетких данных описаны в [3, 17, 18].

3. Модель целевого функционала

Использование принципов принятия решений, представленных в разделе 2, приводит нас к следующей модели критерия:

$$k \to max,$$

$$P\{\pi\{f_0(x,\omega,\gamma) \geq k\} \geq \alpha_0\} \geq p_0, \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in (0;1], p_0 \in (0;1]$.

Мы ограничимся рассмотрением случая линейных функций:

$$f_0(x,\omega,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\omega,\gamma)x_j.$$

Предположим также, что коэффициенты линейных функций имеют сдвиг-масштабное представление, то есть:

$$a_{0j}(\omega,\gamma) = \widetilde{a}_{0j}(\omega) + \widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)\widehat{X}_{0j}(\gamma),$$

а нечеткие компоненты моделируются симметричными триангулярными функциями распределения.

$$\widehat{X}_{0j}(\gamma) \in Tr(\widehat{a}_{0j}, \widehat{d}_{0j}).$$

Тогда очевидно, что при фиксированных $\omega \in \Omega, x \in X$

$$a_{0j}(\omega,\gamma) \in Tr(\widehat{a}_{0j}\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega) + \widetilde{a}_{0j}(\omega), \widehat{d}_{0j}\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$f_0(x,\omega,\gamma) \in Tr\left(\sum_{j=1}^{n}(\widehat{a}_{0j}\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega) + \widetilde{a}_{0j}(\omega))x_j, \sum_{j=1}^{n}\widehat{d}_{0j}\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)x_j\right).$$

Рассмотрим α_0-уровневое множество возможностной функции $f_0(x,\omega,\gamma)$.

$$f_0^{\alpha_0}(x,\omega) = [f_{0L}^{\alpha_0}(x,\omega), f_{0R}^{\alpha_0}(x,\omega)] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{0jL}^{\alpha_0}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{0jR}^{\alpha_0}(\omega)x_j\right].$$

Принимая во внимание [11, 12], построим для (1) эквивалентную модель критерия:

$$k \to max,$$

$$P\{k \leq \sum_{j=1}^{n} a_{0jR}^{\alpha_0}(\omega)x_j\} \geq p_0. \tag{2}$$

Так как коэффициенты $a_{0jR}^{\alpha_i}(\omega)$ имеют нормальные функции распределения и независимы, то:

$$a_{0jR}^{\alpha_0}(\omega) \in N(m_{0jR}^{\alpha_0}, d_{0jR}^{\alpha_0}).$$

Введем обозначения:

$$f_0^R(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ojR}^{\alpha_o}(\omega) x_j,$$

$$m_0^R(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{0jR}^{\alpha_0} x_j,$$

$$d_0^R(x) = \sum_{j,l=1}^{n} c_{0jlR}^{\alpha_i} x_j x_l,$$

где $c_{0jlR}^{\alpha_i}$ — ковариации случайных величин $a_{0jR}^{\alpha_0}(\omega), a_{0lR}^{\alpha_i}(\omega), j,l = \overline{1,n}$.

Тогда $f_0^R(x,\omega) \in N(m_0^R(x), d_0^R(x))$.

С использованием введенных обозначений (2) имеет вид

$$P\{f_0^R(x,\omega) \geq k\} \geq p_0.$$

Для полученного ограничения по вероятности построим его эквивалентный четкий аналог.

Имеем:

$$P\{f_0^R(x,\omega) \geq k\} = 1 - P\{f_0^R(x,\omega) < k\} =$$

$$= 1 - P\left\{\frac{f_0^R(x,\omega) - m_0^R(x)}{\sqrt{d_0^R(x)}} < \frac{k - m_0^R(x)}{\sqrt{d_0^R(x)}}\right\} =$$

$$= 1 - \Phi\left\{\frac{k - m_0^R(x)}{\sqrt{d_0^R(x)}}\right\} \geq p_0,$$

где Φ есть функция стандартного нормального распределения.

В результате модель критерия, эквивалентная (2), имеет вид:

$$k \to max,$$

$$\Phi\left\{\frac{k - m_0^R(x)}{\sqrt{d_0^R(x)}}\right\} \leq 1 - p_0. \tag{3}$$

Пусть δ_0 есть решение уравнения $\Phi(t) = 1 - p_0$. Тогда (3) может быть записана в виде

$$k \to max,$$

$$k \leq m_0^R(x) + \delta_0 \sqrt{d_0^R(x)}, \tag{4}$$

или:

$$m_0^R(x) + \delta_0 \sqrt{d_0^R(x)} \to \max_{x \in X}. \tag{5}$$

4. Модель ограничений

Рассмотрим модель ограничения в нечетко-случайной постановке.

$$P\{\pi\{f_i(x,\omega,\gamma)=0\}\geq\alpha_i\}\geq p_i, \tag{6}$$

где $i=\overline{1,m},\alpha_i\in(0;1],p_i\in(0;1]$.

Мы также ограничимся случаем рассмотрения линейных функций:

$$f_i(x,\omega,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega,\gamma)x_j-b_i(\omega,\gamma).$$

Предположим также, что коэффициенты линейных функций имеют сдвиг-масштабное представление, то есть:

$$a_{ij}(\omega,\gamma)=\widetilde{a}_{ij}(\omega)+\widetilde{\sigma}_{ij}(\omega)\widehat{X}_{ij}(\gamma),$$
$$b_i(\omega,\gamma)=\widetilde{b}_i(\omega)+\widetilde{\sigma}_i(\omega)\widehat{X}_i(\gamma),$$

а нечеткие компоненты имеют триангулярные функции распределения.

$$\widehat{X}_{ij}(\gamma)\in Tr(\widehat{a}_{ij},\widehat{d}_{ij});\widehat{X}_i(\gamma)\in Tr(\widehat{b}_i,\widehat{d}_i).$$

Тогда, очевидно, что при фиксированных $\omega\in\Omega,x\in X$

$$a_{ij}(\omega,\gamma)\in Tr(\widehat{a}_{ij}\widetilde{\sigma}_{ij}(\omega)+\widetilde{a}_{ij}(\omega),\widehat{d}_{ij}\widetilde{\sigma}_{ij}(\omega));$$

$$b_i(\omega,\gamma)\in Tr(\widehat{b}_i\widetilde{\sigma}_i(\omega)+\widetilde{b}_i(\omega),\widehat{d}_i\widetilde{\sigma}_i(\omega));$$

$$f_j(x,\omega,\gamma)\in Tr(\sum_{j=1}^{n}(\widehat{a}_{ij}\widetilde{\sigma}_{ij}(\omega)+\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j-\widehat{b}_i\widetilde{\sigma}_i(\omega)-\widetilde{b}_i(\omega),\sum_{j=1}^{n}\widehat{d}_{ij}\widetilde{\sigma}_{ij}(\omega)x_j+\widehat{d}_i\widetilde{\sigma}_i(\omega)).$$

Рассмотрим α_i-уровневые множества возможностных функций $f_i(x,\omega,\gamma)$.

$$f_i^{\alpha_i}(x,\omega)=[f_{iL}^{\alpha_i}(x,\omega),f_{iR}^{\alpha_i}(x,\omega)]=$$
$$=[\sum_{j=1}^{n}a_{ijL}^{\alpha_i}(\omega,\gamma)x_j-b_{iL}^{\alpha_i}(\omega,\gamma),\sum_{j=1}^{n}a_{ijR}^{\alpha_i}(\omega,\gamma)x_j-b_{iR}^{\alpha_i}(\omega,\gamma)].$$

Принимая во внимание [11], построим для (6) эквивалентную систему ограничений:

$$\begin{cases} P\{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ijL}^{\alpha_i}(\omega)x_j-b_{iR}^{\alpha_i}(\omega)\leq 0\}\geq p_i, \\ P\{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ijR}^{\alpha_i}(\omega)x_j-b_{iL}^{\alpha_i}(\omega)\geq 0\}\geq p_i,\ i=1,\ldots,m, \end{cases} \tag{7}$$

Так как коэффициенты $a_{ijL}^{\alpha_i}(\omega),a_{ijR}^{\alpha_i}(\omega),b_{iR}^{\alpha_i}(\omega),b_{iL}^{\alpha_i}(\omega)$ имеют нормальные функции распределения, то:

$$a_{ijL}^{\alpha_i}(\omega) \in N(m_{ijL}^{\alpha_i}, d_{ijL}^{\alpha_i}); a_{ijR}^{\alpha_i}(\omega) \in N(m_{ijR}^{\alpha_i}, d_{ijR}^{\alpha_i});$$

$$b_{iL}^{\alpha_i}(\omega) \in N(m_{iL}^{\alpha_i}, d_{iL}^{\alpha_i}); b_{iR}^{\alpha_i}(\omega) \in N(m_{iR}^{\alpha_i}, d_{iR}^{\alpha_i}).$$

Введем обозначения:

$$f_i^{LR}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ijL}^{\alpha_i}(\omega)x_j - b_{iR}^{\alpha_i}(\omega),$$

$$m_i^{LR}(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ijL}^{\alpha_i}x_j - m_{iR}^{\alpha_i},$$

$$d_i^{LR}(x) = \sum_{j,l=1}^{n} c_{ijlL}^{\alpha_i}x_jx_l + \sum_{j=1}^{n} c_{ijR}^{\alpha_i}x_j,$$

где $c_{ijR}^{\alpha_i}, c_{ijlL}^{\alpha_i}$ — ковариации случайных величин.

Тогда $f_i^{LR}(x,\omega) \in N(m_i^{LR}(x), d_i^{LR}(x))$.

С использованием введенных обозначений первое ограничение системы (7) имеет вид $P\{f_i^{LR}(x,\omega) \le 0\} \le p_i$. Для полученного ограничения по вероятности построим его эквивалентный четкий аналог.

Имеем:

$$P\{f_i^{LR}(x,\omega) \le 0\} = P\left\{\frac{f_i^{LR}(x,\omega) - m_i^{LR}(x)}{\sqrt{d_i^{LR}(x)}} \le \frac{-m_i^{LR}(x)}{\sqrt{d_i^{LR}(x)}}\right\} = 1 - \Phi\left\{\frac{m_i^{LR}(x)}{\sqrt{d_i^{LR}(x)}}\right\} \ge p_i,$$

где Φ есть функция стандартного нормального распределения.

Аналогичным образом при сделанных обозначениях:

$$f_i^{RL}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ijR}^{\alpha_i}(\omega)x_j - b_{iL}^{\alpha_i}(\omega),$$

$$m_i^{RL}(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ijR}^{\alpha_i}x_j - m_{iL}^{\alpha_i},$$

$$d_i^{RL}(x) = \sum_{j,l=1}^{n} c_{ijlR}^{\alpha_i}x_jx_l - \sum_{j=1}^{n} c_{ijL}^{\alpha_i}x_j,$$

где $c_{ijL}^{\alpha_i}, c_{ijlR}^{\alpha_i}$ — ковариации случайных величин.

Получаем, что $f_i^{RL}(x,\omega) \in N(m_i^{RL}(x), d_i^{RL}(x))$.

Поэтому второе ограничение системы (7) может быть преобразовано к эквивалентному следующим образом:

$$P\{f_i^{RL}(x,\omega) \ge 0\} = 1 - P\{f_i^{RL}(x,\omega) \le 0\} = 1 - P\left\{\frac{f_i^{RL}(x,\omega) - m_i^{RL}(x)}{\sqrt{d_i^{RL}(x)}} \le \frac{-m_i^{RL}(x)}{\sqrt{d_i^{RL}(x)}}\right\} =$$

$$= \Phi \left\{ \frac{m_i^{RL}(x)}{\sqrt{d_i^{RL}(x)}} \right\} \geq p_i.$$

В результате система ограничений, эквивалентная системе (7), имеет вид:

$$\begin{cases} \Phi \left\{ \frac{m_i^{LR}(x)}{\sqrt{d_i^{LR}(x)}} \right\} \leq 1 - p_i, \\ \Phi \left\{ \frac{m_i^{RL}(x)}{\sqrt{d_i^{RL}(x)}} \right\} \geq p_i, \; i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть β_i и δ_i есть решения уравнений $\Phi(t) = 1 - p_i$ и $\Phi(t) = p_i$ соответственно. Тогда система (3) может быть записана в виде

$$\begin{cases} m_i^{LR}(x) - \beta_i \sqrt{d_i^{LR}(x)} \leq 0, \\ m_i^{RL}(x) - \delta_i \sqrt{d_i^{RL}(x)} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{9}$$

Логично предположить, что гарантировать выполнение первого неравенства возможно при $\beta_i \geq 0$. Аналогично гарантировать выполнение второго неравенства возможно при $\delta_i \leq 0$. Так как β_i и δ_i есть решения уравнений $\Phi(t) = 1 - p_i$ и $\Phi(t) = p_i$ соответственно, то полученная система ограничений определяет непустое множество допустимых решений при $p \leq 0.5$. При $p > 0.5$ система также может определять непустое множество, но это зависит от конкретных рассматриваемых распределений для случайных параметров и индивидуально для каждой задачи.

5. Модельный пример

Рассмотрим задачу:

$$k \to max,$$

$$\begin{cases} P\{\pi\{a_{01}(\omega,\gamma)x_1 + a_{02}(\omega,\gamma)x_2 = k\} \geq 0.8\} \geq 0.3, \\ P\{\pi\{a_{11}(\omega,\gamma)x_1 + a_{12}(\omega,\gamma)x_2 - b_1(\omega,\gamma) = 0\} \geq 0.7\} \geq 0.2, \\ P\{\pi\{a_{21}(\omega,\gamma)x_1 + a_{22}(\omega,\gamma)x_2 - b_2(\omega,\gamma) = 0\} \geq 0.9\} \geq 0.25, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Предположим, что линейные коэффициенты имеют сдвиг-масштабное представление, то есть:

$$a_{ij}(\omega,\gamma) = \widetilde{a}_{ij}(\omega) + \widetilde{\sigma}_{ij}(\omega)\widehat{X}_{ij}(\gamma),$$

$$b_i(\omega,\gamma) = \widetilde{b}_i(\omega) + \widetilde{\sigma}_i(\omega)\widehat{X}_0(\gamma),$$

где допускаем, что нечеткие компоненты представления имеют триангулярные функции распределения:

$$\widehat{X}_{01}(\gamma) \in Tr(3,1); \widehat{X}_{02}(\gamma) \in Tr(2,1);$$

$$\widehat{X}_{11}(\gamma) \in Tr(4,1); \widehat{X}_{12}(\gamma) \in Tr(3,1); \widehat{X}_1(\gamma) \in Tr(12,1);$$

$$\widehat{X}_{21}(\gamma) \in Tr(1,1); \widehat{X}_{22}(\gamma) \in Tr(2,1); \widehat{X}_2(\gamma) \in Tr(4,1).$$

Тогда, очевидно, что при фиксированных $\omega \in \Omega, x \in X$

$$a_{01}(\omega,\gamma) \in Tr(3\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega) + \widetilde{a}_{0j}(\omega), \widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$a_{02}(\omega,\gamma) \in Tr(2\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)+\widetilde{a}_{0j}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$a_{11}(\omega,\gamma) \in Tr(4\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)+\widetilde{a}_{0j}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$a_{12}(\omega,\gamma) \in Tr(3\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)+\widetilde{a}_{0j}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$b_{1}(\omega,\gamma) \in Tr(12\widetilde{\sigma}_{0}(\omega)+\widetilde{b}_{0}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0}(\omega));$$

$$a_{21}(\omega,\gamma) \in Tr(\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)+\widetilde{a}_{0j}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$a_{22}(\omega,\gamma) \in Tr(2\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega)+\widetilde{a}_{0j}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0j}(\omega));$$

$$b_{2}(\omega,\gamma) \in Tr(4\widetilde{\sigma}_{0}(\omega)+\widetilde{b}_{0}(\omega),\widetilde{\sigma}_{0}(\omega));$$

$$f_0(x,\omega,\gamma) \in Tr((3\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)+\widetilde{a}_{01}(\omega))x_1+(2\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)+\widetilde{a}_{02}(\omega))x_2,$$
$$\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)x_1+\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)x_2),$$
$$f_1(x,\omega,\gamma) \in Tr((4\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)+\widetilde{a}_{01}(\omega))x_1+(3\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)+\widetilde{a}_{02}(\omega))x_2-12\widetilde{\sigma}_0(\omega)-\widetilde{b}_0(\omega),$$
$$\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)x_1+\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)x_2+\widetilde{\sigma}_0(\omega)),$$
$$f_2(x,\omega,\gamma) \in Tr((\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)+\widetilde{a}_{01}(\omega))x_1+(2\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)+\widetilde{a}_{02}(\omega))x_2-4\widetilde{\sigma}_0(\omega)-\widetilde{b}_0(\omega),$$
$$\widetilde{\sigma}_{01}(\omega)x_1+\widetilde{\sigma}_{02}(\omega)x_2+\widetilde{\sigma}_0(\omega)),$$

с определенной вероятностью.

Рассмотрим α_i-уровневые множества возможностных функций $f_i(x,\omega,\gamma), i = 0,1,2$.

$$f_0^{0.8}(x,\omega)=[f_{0L}^{0.8}(x,\omega),f_{0R}^{0.8}(x,\omega)]=$$
$$=[\sum_{j=1}^{n}a_{0jL}^{0.8}(\omega)x_j-b_{0L}^{0.8}(\omega),\sum_{j=1}^{n}a_{0jR}^{0.8}(\omega)x_j-b_{0R}^{0.8}(\omega)],$$
$$f_1^{0.7}(x,\omega)=[f_{1L}^{0.7}(x,\omega),f_{1R}^{0.7}(x,\omega)]=$$
$$=[\sum_{j=1}^{n}a_{1jL}^{0.7}(\omega)x_j-b_{1L}^{0.7}(\omega),\sum_{j=1}^{n}a_{1jR}^{0.7}(\omega)x_j-b_{1R}^{0.7}(\omega)],$$
$$f_2^{0.9}(x,\omega)=[f_{2L}^{0.9}(x,\omega),f_{2R}^{0.9}(x,\omega)]=$$
$$=[\sum_{j=1}^{n}a_{2jL}^{0.9}(\omega)x_j-b_{2L}^{0.9}(\omega),\sum_{j=1}^{n}a_{2jR}^{0.9}(\omega)x_j-b_{2R}^{0.9}(\omega)].$$

Построим эквивалентную систему ограничений:

$$k \to max,$$
$$P\{k \le \sum_{j=1}^{n}a_{0jR}^{0.8}(\omega)x_j\} \ge 0.3,$$

$$\begin{cases} P\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1jL}^{0.7}(\omega)x_j - b_{1R}^{0.7}(\omega) \le 0\} \ge 0.2, \\ P\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1jR}^{0.7}(\omega)x_j - b_{1L}^{0.7}(\omega) \ge 0\} \ge 0.2, \\ P\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2jL}^{0.9}(\omega)x_j - b_{2R}^{0.9}(\omega) \le 0\} \ge 0.25, \\ P\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2jR}^{0.9}(\omega)x_j - b_{2L}^{0.9}(\omega) \ge 0\} \ge 0.25. \end{cases}$$

Так как коэффициенты

$$a_{0jL}^{0.8}(\omega), a_{0jR}^{0.8}(\omega), a_{1jL}^{0.7}(\omega), a_{1jR}^{0.7}(\omega), a_{2jL}^{0.9}(\omega), a_{2jR}^{0.9}(\omega), b_{1L}^{0.7}(\omega), b_{1R}^{0.7}(\omega), a_{2L}^{0.9}(\omega), a_{2R}^{0.9}(\omega)$$

имеют нормальные функции распределения, а также учитывая их независимость, имеем:

$$a_{01L}^{0.8}(\omega) \in N(2.9, 1); a_{01R}^{0.8}(\omega) \in N(3.1, 1);$$
$$a_{02L}^{0.8}(\omega) \in N(1.9, 1); a_{02R}^{0.8}(\omega) \in N(2.1, 1);$$
$$a_{11L}^{0.7}(\omega) \in N(3.85, 1); a_{11R}^{0.7}(\omega) \in N(4.15, 1);$$
$$a_{12L}^{0.7}(\omega) \in N(2.85, 1); a_{12R}^{0.7}(\omega) \in N(3.15, 1);$$
$$a_{21L}^{0.9}(\omega) \in N(0.95, 1); a_{21R}^{0.9}(\omega) \in N(1.05, 1);$$
$$a_{22L}^{0.9}(\omega) \in N(1.95, 1); a_{22R}^{0.9}(\omega) \in N(2.05, 1);$$
$$b_{1L}^{0.7}(\omega) \in N(11.85, 1); b_{1R}^{0.7}(\omega) \in N(12.15, 1);$$
$$b_{2L}^{0.9}(\omega) \in N(3.95, 1); b_{2R}^{0.9}(\omega) \in N(4.05, 1).$$

При принятых обозначениях:

$$f_0^R(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ojR}^{0,8}(\omega)x_j,$$

$$m_0^R(x) = 3.1x_1 + 2.1x_2,$$
$$d_0^R(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

Получаем, что $f_0^R(x, \omega) \in N(3.1x_1 + 2.1x_2, x_1^2 + x_2^2)$.
Справедливо преобразование:

$$P\{f_0^R(x, \omega) \ge k\} = 1 - P\{f_0^R(x, \omega) \le k\} = 1 - \Phi\left\{\frac{k - 3.1x_1 - 2.1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right\} \ge 0.3.$$

Аналогично:

$$f_1^{LR}(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{1jL}^{0,7}(\omega)x_j - b_{1R}^{0,7}(\omega),$$

$$m_1^{LR}(x) = 3.85x_1 + 2.85x_2 - 12.15,$$

$$d_1^{LR}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1.$$

Тогда $f_1^{LR}(x,\omega) \in N(3.85x_1 + 2.85x_2 - 12.15, x_1^2 + x_2^2 + 1)$.
Имеем:

$$P\{f_1^{LR}(x,\omega) \le 0\} = \Phi\left\{\frac{3.85x_1 + 2.85x_2 - 12.15}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}\right\} \le 0.8.$$

Аналогичным образом:

$$f_1^{RL}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{1jR}^{0.7}(\omega)x_j - b_{1L}^{0.7}(\omega),$$

$$m_i^{RL}(x) = 4.15x_1 + 3.15x_2 - 11.85,$$

$$d_1^{RL}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1.$$

Получаем, что $f_1^{RL}(x,\omega) \in N(4.15x_1 + 3.15x_2 - 11.85, x_1^2 + x_2^2 + 1)$.
Поэтому:

$$P\{f_1^{RL}(x,\omega) \ge 0\} = \Phi\left\{\frac{4.15x_1 + 3.15x_2 - 11.85}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}\right\} \ge 0.2.$$

Для второго ограничения исходной системы имеем:

$$f_2^{LR}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{2jL}^{0,9}(\omega)x_j - b_{2R}^{0,9}(\omega),$$

$$m_2^{LR}(x) = 0.95x_1 + 1.95x_2 - 4.05,$$

$$d_2^{LR}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1.$$

Тогда $f_2^{LR}(x,\omega) \in N(0.95x_1 + 1.95x_2 - 4.05, x_1^2 + x_2^2 + 1)$.
Имеем:

$$P\{f_2^{LR}(x,\omega) \le 0\} = \Phi\left\{\frac{0.95x_1 + 1.95x_2 - 4.05}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}\right\} \le 0.75.$$

Аналогичным образом:

$$f_2^{RL}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{2jR}^{0.9}(\omega)x_j - b_{2L}^{0.9}(\omega),$$

$$m_2^{RL}(x) = 1.05x_1 + 2.05x_2 - 3.95,$$

$$d_2^{RL}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1.$$

Получаем, что $f_2^{RL}(x,\omega) \in N(1.05x_1 + 2.05x_2 - 3.95, x_1^2 + x_2^2 + 1)$.
Поэтому:

$$P\{f_2^{RL}(x,\omega) \ge 0\} = \Phi\left\{\frac{1.05x_1 + 2.05x_2 - 3.95}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}\right\} \ge 0.25.$$

По таблицам стандартного нормального распределения находим: $\delta_0 = 0.52$, $\beta_1 = 0.84$, $\delta_1 = -0.84$, $\beta_2 = 1,28$, $\delta_2 = -1,28$.

Тогда исходная задача имеет следующий эквивалентный аналог:

$$3.15x_1 + 2.15x_2 - 0.52\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to max, \tag{11}$$

$$\begin{cases} 3.85x_1 + 2.85x_2 - 0.84\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} \leq 12.15, \\ 4.15x_1 + 3.15x_2 + 0.84\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} \geq 11.85, \\ 0.95x_1 + 1.95x_2 - 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} \leq 4.05, \\ 1.05x_1 + 2.05x_2 + 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} \geq 3.95, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Полученная задача (11), (12) является задачей невыпуклого программирования. Это обусловлено тем, что вероятность $p_i < 0.5, \forall i = 1,2$. Невыпуклая область допустимых решений, определяемая (12), представлена на рис. 1. Целевая функция задачи является вогнутой.

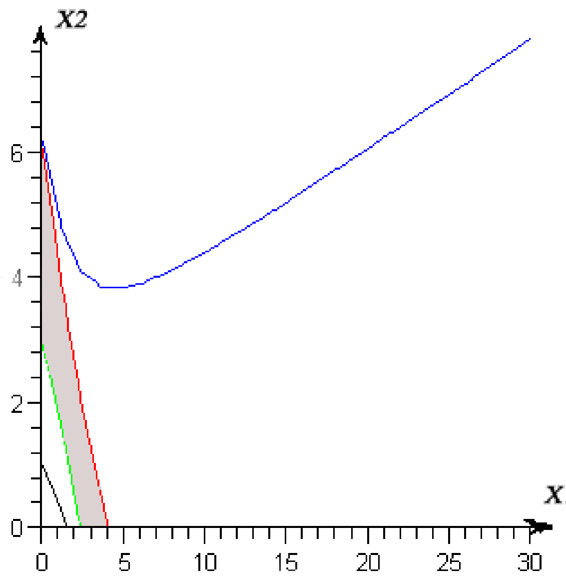

Рис. 1: Область допустимых решений.

Полученная задача решалась с использованием решателя пакета MS Excel, методом сопряженных градиентов. Получено следующее оптимальное решение: $x_1^* = 4.07$, $x_2^* = 0$, значение целевого функционала равно 10.7.

Рассмотрим случай, когда уровни вероятности $p_i \geq 0.5 : p_1 = 0.52, p_2 = 0.53$. Область допустимых решений задачи в этом случае представлена на рис.2.

Задача при уровнях вероятности $p_1 = 0.52, p_2 = 0.53$ так же решалась с использованием решателя пакета MS Excel, методом сопряженных градиентов. Получено следующее оптимальное решение: $x_1^* = 2.52$, $x_2^* = 0.71$, значение целевого функционала равно 8.3.

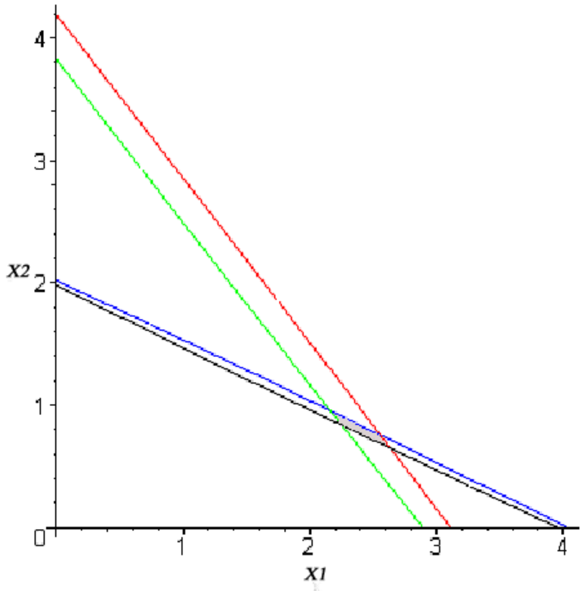

Рис. 2: Область допустимых решений.

Замечание. Нетрудно видеть, что при $p_i = 0.5, i = 1, 2$ система (12) трансформируется в систему линейных ограничений.

Заключение

В статье исследована задача максимизации нечеткой случайной цели при построчных ограничениях по возможности / вероятности. Для модели критерия и модели ограничений были построены их эквивалентные четкие аналоги. Исследуемая задача была сведена к задаче квадратичного программирования. Полученные методы решения позволяют расширить класс решаемых практических задач возможностно-вероятностной оптимизации. Проведено исследование метода решения задачи на модельном примере.

Список литературы

[1] Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. V. 1.

[2] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. V. 1.

[3] Qiao Zhong, Wang Guang-yuan. On solutions and distribution problems of the linear programming with fuzzy random variable coefficients // Fuzzy Sets and Systems. 1993. V. 58

[4] Вазан М. Стохастическая аппроксимация, «Мир», 1972.

[5] Гришина Е.Н. Об обном подходе к определению и расчету числовых характеристик нечетких случайных величин // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь. 2004. С. 39-45.

[6] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования, «Наука», 1976.

[7] Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание, «Наука», 1972.

[8] Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической аппроксимации и теории игр, «Наука», 1990.

[9] Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования, М. «Советское радио», 1974.

[10] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. №2. Серия «Прикладная математика». Выпуск №1. 2003. С. 39-43.

[11] Язенин А.В. Нечеткое математическое программирование. Калинин. 1986.

[12] Язенин А.В. Линейное программирование со случайными нечеткими данными // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика — 1991 — №3 — с.52-58.

[13] Yazenin A.V., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A measure-based approach. Aktuelle Reihe 6/96. 140 p. Brandenburgische Tecnische Universitat, Cotbus, Germany, 1996.

[14] M.L. Puri, D.A. Ralescu. Fuzzy random variables, // J. Math. Anal. Appl. 14 (1986)

[15] Kwakernaak H. Fuzzy random variables - Definitions and theorems, Inf. Sci. 15 (1978) 1-29

[16] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment. In: M. M. Gupta et. al. (eds.), Advances in Fuzzy Sets Theory. NHPC, Amsterdam, 1979.

[17] Luhandjula M.K. Linear programming problems under randomness and fuzziness // Fuzzy Sets and Systems — 1983 — no. 10 — pp.45-55

[18] Luhandjula M.K. Optimisation under hybrid uncertainty// Fuzzy Sets and Systems — 2004 — no. 146 — pp.187-203

[19] Новикова В.Н., Язенин А.В. Прямой метод решения одной задачи возможностно-вероятностного программирования // Сборник трудов Всероссийской научной конференции «Нечеткие системы и мягкие вычисления - 2006». Тверь. 2006. С. 132-139

[20] Новикова В.Н. О методе решения одной задачи возможностно-вероятностного программирования // Нечеткие системы и мягкие вычисления. Том 2. №1. 2007. С. 73-82

[21] Новикова В.Н. Стохастические квазиградиентные методы решения задач возможностно-вероятностного программирования // Труды Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте», Коломна — М.: Физматлит, 2009 — с. 200-209.

[22] Новикова В.Н., Турлаков А.П. Задача максимизации возможности достижения нечеткой случайной цели // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика — 2009 — №17 — с. 79-95.