УДК 519.214.8

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Герасимов М.Ю.
Факультет ВМиК МГУ, Москва

Поступила в редакцию 27.03.2010, после переработки 10.04.2010.

В статье доказаны новые экспоненциальные неравенства для максимальных сумм отрицательно ассоциированных случайных величин, в основе которых лежат неравенства Нагаева–Фука. Большинство из доказанных неравенств являются новыми даже для независимых случайных величин.

New exponential inequalities for maximal sums of negatively associated random variables are proved.

Ключевые слова: отрицательно ассоциированные случайные величины, максимальные суммы, полная сходимость.
Keywords: negatively associated random variables, maximal sums, complete convergence.

1. Введение

Предполагается, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Напомним определение отрицательно ассоциированных случайных величин.

Определение. *Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются отрицательно ассоциированными, если для любых непустых непересекающихся подмножеств $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $B = \{j_1, \ldots, j_m\}, k + m \leq n$, множества $\{1, \ldots, n\}$ и для любых покоординатно возрастающих измеримых ограниченных вещественных функций $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ и $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty\}$ выполняется неравенство*

$$E\big(f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m})\big) \leq Ef(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})Eg(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}).$$

Случайные величины $X_n, n = 1, 2, \ldots$, называются отрицательно ассоциированными, если для любого натурального n случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ отрицательно ассоциированы.

Понятие отрицательно зависимых или, что то же самое, отрицательно ассоциированных случайных величин впервые было введено в статьях [1] и [2]. Описание основных свойств отрицательно ассоциированных случайных величин можно найти в этих же статьях, книге [3], а также работах многих других авторов.

Идея доказательства наших неравенств заимствована из статьи Д.Х. Фука и С.В. Нагаева [4]. Мы привлекаем некоторые новые идеи, благодаря которым удается в ряде случаев доказать более сильные экспоненциальные неравенства по сравнению с известными неравенствами для независимых случайных величин. Неравенство (1) является аналогом неравенства Нагаева–Фука для независимых случайных величин. Неравенства (2) и (5) – (10) являются новыми, а для независимых случайных величин они несколько усиливают соответствующие неравенства Нагаева–Фука.

2. Основные утверждения

Пусть даны отрицательно ассоциированные случайные величины $X_1, \dots, X_n$. Обозначим

$$\begin{aligned} S_k &= X_1 + \dots + X_k,\ k = 1, \dots, n, \\ A_{n,\gamma} &= \sum_{k=1}^n E|X_k|^\gamma, \\ B_{n,\gamma} &= \sum_{k=1}^n E|X_k - EX_k|^\gamma, \end{aligned}$$

где γ — произвольное положительное число, которое будет уточнено в формулировках теорем.

Теорема 1. *Если отрицательно ассоциированные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ ограничены числом $c > 0$, то*

$$P\{|S_n| > x\} \le \exp\left\{\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{A_{n,\gamma}} + 1\right)\right\} \tag{1}$$

для любых $\gamma \in (0, 1]$ и $x > 0$,

$$P\{|S_n - ES_n| > x\} \le \frac{2}{1 + (1 + xc^{\gamma-1}/B_{n,\gamma})^{-2x/c}} \exp\left\{\frac{x}{2^{\gamma-1}c} - \frac{x}{2c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{B_{n,\gamma}} + 1\right)\right\} \tag{2}$$

любых $x > 0$ и $\gamma \in [1, 2]$.

Доказательство. Докажем неравенство (1). Обозначим $X_1', \dots, X_n'$ независимые случайные величины такие, что для любого $k = 1, \dots, n$ случайные величины X_k и X_k' одинаково распределены. По неравенству Маркова мы получим

$$P\{|S_n| > x\} \le e^{-hx} E e^{h|S_n|}$$

для любого $h > 0$. Заметим, что функция $e^{h|x|}, x \in \mathbb{R}$, является выпуклой. По теореме Шао (см. [5]) выполняется неравенство $Ee^{h|S_n|} \le Ee^{h|S_n'|}$ и, следовательно,

$$P\{|S_n| > x\} \le e^{-hx} E e^{h|S_n'|} \le e^{-hx} \prod_{k=1}^n E e^{h|X_k'|}. \tag{3}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $|S'_n| \le |X'_1| + \dots + |X'_n|$ и свойством независимости случайных величин $X'_1, \dots, X'_n$. Для любого $\gamma \in (0,1]$ функция $(e^{hx}-1)/x^\gamma, 0 < x \le c$, возрастает и, следовательно, $(e^{hx}-1)/x^\gamma \le (e^{hc}-1)/c^\gamma$. Принимая во внимание, что случайные величины X_k и X'_k одинаково распределены, мы получим

$$\begin{aligned} P\{|S_n| > x\} &\le \prod_{k=1}^n E e^{h|X'_k|} = \prod_{k=1}^n E e^{h|X_k|} \\ &= \prod_{k=1}^n E\big(1 + |X_k|^{-\gamma}(e^{h|X_k|}-1)|X_k|^\gamma\big) \\ &\le \prod_{k=1}^n \big(1 + c^{-\gamma}(e^{hc}-1)E|X_k|^\gamma\big) = e^{c^{-\gamma}(e^{hc}-1)A_{n,\gamma}}. \end{aligned}$$

Положим $h = c^{-1}\ln(xc^{\gamma-1}/A_{n,\gamma}+1)$. В результате мы получим неравенство (1).

Докажем неравенство (2). Обозначим $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что для гиперболического косинуса выполняется равенство $\cosh(|x|) = \cosh(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. С учетом этого замечания по неравенству Маркова мы получим

$$P\{|S_n - ES_n| > x\} \le \frac{E\cosh(h|S_n - ES_n|)}{\cosh(hx)} = \frac{E\cosh(h(S_n - ES_n))}{\cosh(hx)}$$

для любого $h > 0$. Функция $\cosh(hx), x \in \mathbb{R}$, выпукла. По теореме Шао (см. [5]) выполняется неравенство $E\cosh(h(S_n - ES_n)) \le E\cosh(h(S'_n - ES'_n))$ и, следовательно,

$$P\{|S_n - ES_n| > x\} \le \frac{E\cosh(h(S'_n - ES'_n)}{\cosh(hx)} =$$

$$= \frac{1}{2\cosh(hx)}\big(Ee^{h(S'_n - ES'_n)} + Ee^{-h(S'_n - ES'_n)}\big).$$

Так как случайные величины $X'_1, \dots, X'_n$ независимы, то справедливо равенство $Ee^{hS'_n} = \prod\limits_{k=1}^n Ee^{hX'_k}$. С помощью легко проверяемых неравенств $\alpha \le e^{\alpha-1}$и $e^\alpha - 1 - \alpha \le 2(\cosh\alpha - 1)$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ мы получим

$$\begin{aligned} Ee^{h(S'_n - ES'_n)} &= \prod_{k=1}^n Ee^{h(X'_k - EX'_k)} = \prod_{k=1}^n Ee^{h(X_k - EX_k)} \\ &\le \prod_{k=1}^n \exp\big\{E(e^{h(X_k - EX_k)} - 1\big\} \\ &= \exp\Big\{\sum_{k=1}^n E(e^{h(X_k - EX_k)} - 1 - h(X_k - EX_k))\Big\} \\ &\le \exp\Big\{2\sum_{k=1}^n E(\cosh(h(X_k - EX_k)) - 1)\Big\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Определим функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, положив $f(\alpha)=(\cosh\alpha-1)|\alpha|^{-\gamma}$, если $\alpha\neq 0$, и $f(0)=1/2$, если $\gamma=2$, и $f(0)=0$, если $0<\gamma<2$. Нетрудно проверить, что функция f непрерывна, четна и возрастает на положительной полуоси. Заметим, что $|X_k-EX_k|\le 2c$ для всех $k=1,\dots,n$. С учетом этих замечаний мы получим

$$\begin{aligned}&\cosh(h(X_k-EX_k))-1\\&\qquad=(\cosh(h(X_k-EX_k))-1)|h(X_k-EX_k)|^{-\gamma}|h(X_k-EX_k)|^{\gamma}\\&\qquad\le(\cosh(2hc)-1)(2c)^{-\gamma}E|X_k-EX_k|^{\gamma}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$Ee^{h(S'_n-ES'_n)}\le\exp\bigl\{2(\cosh(2hc)-1)(2c)^{-\gamma}B_{n,\gamma}\bigr\}.$$

Аналогично можно доказать похожее неравенство

$$Ee^{-h(S'_n-ES'_n)}\le\exp\bigl\{2(\cosh(2hc)-1)(2c)^{-\gamma}B_{n,\gamma}\bigr\}.$$

Из этих неравенств и из (4) следует, что

$$\begin{aligned}P\{|S_n-ES_n|>x\}&\le\frac{1}{\cosh(hx)}\exp\bigl\{2(\cosh(2hc)-1)(2c)^{-\gamma}B_{\gamma}\bigr\}\\&=\frac{2}{1+e^{-2hx}}\exp\bigl\{-hx+2(e^{2hc}-1)(2c)^{-\gamma}B_{\gamma}\bigr\}.\end{aligned}$$

Положим $h=(2c)^{-1}\ln(xc^{\gamma-1}/B_{n,\gamma}+1)$. В результате мы получим неравенство (2). Теорема доказана.

Неравенства, похожие на неравенства (1) и (2), можно доказать и для максимальных сумм.

Теорема 2. *Если отрицательно ассоциированные случайные величины* $X_1,\dots,X_n$ *ограничены числом* $c>0$, *то*

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\}\le 2\exp\left\{\frac{x}{c}-\frac{x}{c}\ln\bigl(\frac{xc^{\gamma-1}}{A_{n,\gamma}}+1\bigr)\right\}\tag{5}$$

для любых $\gamma\in(0,1]$ *и* $x>0$,

$$\begin{aligned}&P\{\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|>x\}\\&\qquad\le\frac{2}{1+(1+xc^{\gamma-1}/B_{n,\gamma})^{-2x/c}}\exp\left\{\frac{x}{2^{\gamma-1}c}-\frac{x}{2c}\ln\bigl(\frac{xc^{\gamma-1}}{B_{n,\gamma}}+1\bigr)\right\}\end{aligned}\tag{6}$$

для любых $\gamma\in[1,2]$ *и* $x>0$.

Доказательство. Докажем неравенство (5). Мы воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$\bigl\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\bigr\}\subseteq\bigl\{\sum_{k=1}^{n}X_k^{+}>x\bigr\}\cup\bigl\{\sum_{k=1}^{n}X_k^{-}>x\bigr\}.$$

С помощью неравенства Маркова мы получим

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\}\le P\{\sum_{k=1}^n X_k^+>x\}+P\{\sum_{k=1}^n X_k^->x\}$$
$$\le e^{-hx}E\exp\{h\sum_{k=1}^n X_k^+\}+e^{-hx}E\exp\{h\sum_{k=1}^n X_k^-\}$$

для любого $h>0$. По критерию Лемана (см. [6]) случайные величины $X_k^+, k=1,\dots,n$, равно как и $X_k^-, k=1,\dots,n$, отрицательно ассоциированы. Снова привлекая теорему 2.1 [5] и неравенства $X_k^\pm\le|X_k|$ для всех $k=1,\dots,n$ мы получим

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\}\le 2e^{-hx}\prod_{k=1}^n Ee^{h|X_k|}.$$

Это неравенство похоже на неравенство (3). Заметим, что выполняется равенство $e^{h|X_k|}=Ee^{h|X_k'|}$ для всех $k=1,\dots,n$. Далее можно рассуждать как при доказательстве неравенства (1). В результате мы придем к неравенству (5).

Докажем неравенство (6). По неравенству Маркова мы получим

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|>x\}\le\frac{E\cosh(h\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|)}{\cosh(hx)}$$

для любого $h>0$. По теореме 2 выполняется неравенство

$$E(\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|^r)\le 2E|S_n'-ES_n|^r$$

для любого натурального числа r. В силу этой оценки мы получим

$$E\cosh(h\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|)=1+\sum_{r=1}^\infty\frac{E\max_{1\le k\le n}|h\bar S_k-ES_k|^{2r}}{(2r)!}$$
$$\le 1+2\sum_{r=1}^\infty\frac{E|hS_n'-ES_n'|^{2r}}{(2r)!}$$
$$\le 2E\cosh(h|S_n'-ES_n'|)=2E\cosh(h(S_n'-ES_n')),$$

и, следовательно,

$$P\{\max_{1\le k\le n}|S_k-ES_k|>x\}\le 2\frac{E\cosh(h(S_n'-ES_n'))}{\cosh(hx)}.$$

Это неравенство отличается только множителем 2 от неравенства (4). Далее можно рассуждать как при доказательстве неравенства (2). В результате мы придем к неравенству (6). Теорема доказана.

Пусть даны отрицательно ассоциированные случайные величины $X_1,\dots,X_n$ и произвольные числа $c > 0$ и $\gamma > 0$. Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} &Y_k = -cI_{(-\infty,c)}(X_k) + X_k I_{[-c,c]}(X_k) + cI_{(c,\infty)}(X_k), k = 1,\dots,n, \\ &A'_{n,\gamma} = \sum_{k=1}^{n} E|Y_k|^\gamma, \\ &B'_{n,\gamma} = \sum_{k=1}^{n} E|Y_k - EY_k I|^\gamma. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть даны отрицательно ассоциированные случайные величины* $X_1,\dots,X_n$. *Для любых* $x > 0$ *и* $c > 0$ *справедливы следующие неравенства*

$$P\{|S_n| > x\} \le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} + \exp\left\{\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\ln\big(\frac{xc^{\gamma-1}}{A'_{n,\gamma}} + 1\big)\right\} \tag{7}$$

для $\gamma \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} P\{|S_n - ET_n| > x\} &\le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} \\ &+ \frac{2}{1 + (1 + xc^{\gamma-1}/B'_{n,\gamma})^{-2x/c}} \exp\left\{\frac{x}{2^{\gamma-1}c} - \frac{x}{2c}\ln\big(\frac{xc^{\gamma-1}}{B'_{n,\gamma}} + 1\big)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

для $\gamma \in [1,2]$,

$$P\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > x\} \le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} \le 2\exp\left\{\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\ln\big(\frac{xc^{\gamma-1}}{A_{n,\gamma}} + 1\big)\right\} \tag{9}$$

для $\gamma \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} P\{\max_{1\le k\le n} |S_k - ET_k| > x\} &\le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} \\ &\le \frac{2}{1 + (1 + xc^{\gamma-1}/B_{n,\gamma})^{-2x/c}} \exp\left\{\frac{x}{2^{\gamma-1}c} - \frac{x}{2c}\ln\big(\frac{xc^{\gamma-1}}{B_{n,\gamma}} + 1\big)\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

для $\gamma \in [1,2]$.

Доказательство. Доказательство всех неравенств осуществляется по одной схеме. Обозначим $T_n = Y_1 + \dots + Y_k, A_k = \{X_k = Y_k\}, k = 1,\dots,n$. Воспользуемся следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \{|S_n| > x\} &= (\{|S_n| > x\} \cap \cap_{k=1}^n A_k^c) \cup (\{|S_n| > x\} \cap \cup_{k=1}^n A_k^c) \\ &\subseteq \{|T_n| > x\} \cap \{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$P\{|S_n| > x\} \le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} + P\{|T_n| > x\}.$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$P\{|S_n - ET_n| > x\} \le P\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > c\} + P\{|T_n - ET_n| > x\}.$$

Заметим, что сумма T_n состоит из отрицательно ассоциированных случайных величин, ограниченных числом c. Из этих неравенств и из неравенств (1) и (2) следуют неравенства (7) и (8). По аналогии с предыдущим нетрудно доказать, что

$$\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>x\}\subseteq\{\max_{1\le k\le n}|T_k|>x\}\cap\{\max_{1\le k\le n}|X_k|>c\},$$
$$\{\max_{1\le k\le n}|S_k-ET_k|>x\}\subseteq\{\max_{1\le k\le n}|T_k-ET_k|>x\}\cap\{\max_{1\le k\le n}|X_k|>c\}.$$

Из этих соотношений и из неравенств (5) и (6) следуют неравенства (9) и (10). Теорема доказана.

Список литературы

[1] Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables with applications// Ann. Math. Statist. 1967. 11. P.1466–1474.

[2] Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables with applications// Ann. Math. Statist. 1983. 11. N 1. P.286–295.

[3] Булинский А.В., Шашкин А.П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[4] Фук Д.Х., Нагаев С.В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин// Теория вероятносте и ее применения. 1971. XVI. N 4. P.660–675.

[5] Shao Q.M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables// Journal of Theoretical Probability. 2000. 13. N 2. P.343–356.

[6] Lehmann E.L. Some concepts of dependence// Ann. Math. Statist. 1966. 37. P.1137–1153.