МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 532, 517.958

ОБ ОБЩИХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА, ЭЙЛЕРА И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 20.05.2010, после переработки 27.05.2010.

Для квазигидродинамических уравнений, описывающих динамику вязкой слабосжимаемой жидкости, доказано монотонное стремление к нулю полной кинетической энергии в ограниченном объеме. Найдены априорные оценки решений. Построены точные физически адекватные решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических и сферических координатах, совпадающие с соответствующими точными решениями уравнений Навье–Стокса и Эйлера.

For quasi–hydrodynamic equations, describing dynamics of viscous slightly compressible fluid, the monotonic approaching to zero of total kinetic energy in bounded volume is proved. A priori estimates of solutions are found. Exact solutions of stationary quasi-hydrodynamic equations in cylindrical and spherical coordinates, coinciding with appropriate solutions of Navier–Stokes and Euler equations, are constructed.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, диссипация энергии, точные решения.
Keywords: Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, energy dissipation, exact solutions.

Введение

Классическая система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости является диссипативной и обладает семейством точных физически адекватных решений [1], [2]. Иногда решение уравнений Навье–Стокса удовлетворяет также системе Эйлера [3].

В 1994 г. автором была предложена другая система, получившая название квазигидродинамической [4]. Квазигидродинамические (КГД) уравнения отличались от уравнений Навье–Стокса дивергентными членами с малым положительными параметром τ, имеющем размерность времени. Теоретическое обоснование подхода дано в [5], [6]. КГД уравнения широко применялись для построения численных методов, в том числе и при решении на ЭВМ краевых задач для уравнений Навье–Стокса [6]–[19]. Их обобщение на случай сжимаемой вязкой теплопроводной среды выведено в [5]. Полная система КГД при определенных ограничениях является равномерно параболической по Петровскому, что позволяет сформулировать для нее локальную по времени теорему о существовании и единственности решения задачи Коши. Доказана также теорема о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для КГД системы в акустическом приближении [20]. Актуальной является проблема получения априорных энергетических оценок решений полных и упрощенных КГД уравнений [21], [23].

В только что вышедшей статье А.А. Злотника [22] выведено уравнение баланса энтропии для родственных квазигазодинамических уравнений в случае более общих уравнений состояния. Это обобщает результат автора [5], [6], полученный ранее для идеального политропного газа.

В настоящей работе впервые приводится подробный вывод уравнения баланса кинетической энергии для КГД системы в случае слабосжимаемой жидкости. Доказаны теорема о диссипации полной кинетической энергии и ее стремление к нулю с течением времени. Получены априорные оценки. Построены точные физически адекватные решения стационарных КГД уравнений в цилиндрических и сферических координатах, совпадающие с известными решениями уравнений Навье–Стокса и Эйлера.

1. Постановка начально–краевой задачи

Квазигидродинамическая система, описывающая движения слабосжимаемой вязкой жидкости в однородном внешнем гравитационном поле, может быть записана в следующем дивергентном виде:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \vec{g} + 2\eta\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \mathrm{div}\ \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big]. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big]$$

– тензор скоростей деформаций. Вектор $\vec{w}$, связанный с вектором плотности потока массы $\vec{j}_m$ соотношением $\vec{j}_m = \vec{u} - \vec{w}$, вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p - \vec{g}\Big).$$

Коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Параметр τ может быть определен с помощью выражения

$$\tau = \frac{\eta}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука, которая может быть измерена экспериментально. Вектор $\vec{g}$, по модулю равный $9.8 \cdot 10^2$ см$/c^2$, есть ускорение свободного падения на поверхности Земли. Без ограничения общности постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u}\otimes\vec{w})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный в результате прямого тензорного произведения векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$. В пределе при $c_s \to +\infty$ КГД система переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть V – ограниченная односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T]$ – его замыкание, T – заданное положительное число или символ $+\infty$ соответственно. Параметр $t \in [0,\ T]$ будем интерпретировать как время. Присоединим к системе (1.1) – (1.2) начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{1.3}$$

граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\vec{w}\cdot\vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{1.4}$$

а также условие нормировки для давления

$$\int\limits_V p\ dV = 0, \qquad t \in [0,\ T]. \tag{1.5}$$

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, α_3 и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), f_3(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Символом $C^{\alpha,0}_{\vec{x},t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим множество всех непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, у которых существуют непрерывные в Q производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных α_1, α_2, α_3, таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant \alpha$.

Определение. *Решением начально–краевой задачи* (1.1)$-$(1.5)*, назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^{2,0}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^{1,0}_{\vec{x},t}(\overline{Q})$*, удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in Q$ *уравнениям* (1.1) $-$ (1.2)*, а также условиям* (1.3) $-$ (1.5).

Изучим свойства решения поставленной начально-краевой задачи, исходя из предположения о том, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Сами решения будем интерпретировать как течения слабосжимаемой вязкой жидкости в ограниченном объеме V. Скорость жидкости $\vec{u}_0(\vec{x})$ в момент времени $t = 0$ задана.

Краевые условия (1.4) обеспечивают отсутствие потока массы через границу ∂V. Неоднозначность при нахождении давления p, играющего роль некоторого потенциала, исключается условием нормировки (1.5).

2. Диссипативные свойства квазигидродинамической системы. Априорные оценки решений

Покажем, что казигидродинамическая система является диссипативной и для нее может быть выведено уравнение баланса кинетической энергии с неотрицательной диссипативной функцией. Запишем систему в недивергентной форме

$$\text{div } (\vec{u}-\vec{w})=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}+\nabla(p+\Psi)=2\eta \text{ div } \widehat{\sigma}+\text{ div } (\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2.2}$$

Здесь $\Psi=-(\vec{g}\cdot\vec{x})$ – потенциал постоянного гравитационного поля $\vec{g}$. Умножим скалярно обе части равенства (2.2) на $\vec{u}$. Будем иметь

$$\vec{u}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}+(\vec{u}\cdot\nabla)(p+\Psi)=2\eta\ \vec{u}\cdot\text{ div } \widehat{\sigma}+\vec{u}\cdot\text{ div } (\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2.3}$$

Преобразуем последовательно все члены, входящие в (2.3):

$$\vec{u}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\cdot\vec{u})=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}&=\sum_{i=1}^{3}\ u_i\ \sum_{j=1}^{3}(u_j-w_j)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\\
&=\sum_{j=1}^{3}(u_j-w_j)\sum_{i=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{u_i^2}{2}\Big)=\\
&=\sum_{j=1}^{3}(u_j-w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{u_i^2}{2}\Big)=\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)=\\
&=\text{div }\Big((\vec{u}-\vec{w})\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)-\frac{\vec{u}^2}{2}\text{ div } (\vec{u}-\vec{w})=\text{div }\Big((\vec{u}-\vec{w})\frac{\vec{u}^2}{2}\Big),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{u}\cdot\nabla)(p+\Psi)&=\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)(p+\Psi)+(\vec{w}\cdot\nabla)(p+\Psi)=\\
&=\text{div }\big((\vec{u}-\vec{w})(p+\Psi)\big)-(p+\Psi)\text{ div } (\vec{u}-\vec{w})+(\vec{w}\cdot\nabla)(p+\Psi)=\\
&=\text{div }\big((\vec{u}-\vec{w})(p+\Psi)\big)+(\vec{w}\cdot\nabla)(p+\Psi),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\vec{u}\cdot\text{ div } \widehat{\sigma}=\sum_{i=1}^{3}\ u_i\ \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=\sum_{i,j=1}^{3}\ u_i\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u_i) - \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} u_i\Big) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) =$$

$$= \text{ div } \big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) - \big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big), \tag{2.7}$$

$$\vec{u} \cdot \text{ div } (\vec{u} \otimes \vec{w}) = \sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (u_j w_i)}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j w_i u_i) - \sum_{i,j=1}^{3} w_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(u_j \sum_{i=1}^{3}(w_i u_i)\Big) - \sum_{i=1}^{3} w_i \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \text{ div } \big(\vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})\big) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}. \tag{2.8}$$

При проведении формальных выкладок учтено равенство (2.1), а также свойство симметричности матрицы σ_{ij}. Подстановка (2.4) – (2.8) в (2.3) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \text{div } \Big[(\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p + \Psi\Big) - 2\eta\big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})\Big] =$$

$$-2\eta\big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big) - \vec{w} \cdot \big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla(p + \Psi)\big). \tag{2.9}$$

Вспоминая, что

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p - \vec{g}\Big) = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla(p + \Psi)\big),$$

из (2.9) выводим уравнение баланса кинетической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \text{div } \Big[(\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p + \Psi\Big) - 2\eta\big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})\Big] = -\varPhi \tag{2.10}$$

с неотрицательной диссипативной функцией

$$\varPhi = 2\eta\big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big) + \frac{\vec{w}^2}{\tau}. \tag{2.11}$$

Для любого $t \in [0,\ T]$ на решении поставленной начально–краевой задачи определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{u}^2 \ dV. \tag{2.12}$$

Чтобы установить факт диссипации $E(t)$, нам потребуются два известных [24] – [26] утверждения из курсов математической физики.

Теорема 1 (правило Лейбница). *Пусть заданная в* $Q = V \times [0, T]$ *функция* $f = f(\vec{x}, t)$ *имеет непрерывную по* t *на отрезке* $[0, T]$ *производную* $\partial f(\vec{x}, t)/\partial t$ *для почти всех* $\vec{x} \in V$, *и существует интегрируемая по Лебегу в* V *функция* $q(\vec{x})$, *такая, что при каждом* $t \in [0, T]$ *почти всюду в* V *выполняется неравенство* $|\partial f(\vec{x}, t)/\partial t| \leqslant q(\vec{x})$. *Пусть, далее, при некотором* $t_0 \in [0, T]$ *существует интеграл* $\int_V f(\vec{x}, t_0) dV$. *Тогда* $\int_V f(\vec{x}, t) dV \in C^1([0, T])$ *и на промежутке* $[0, T]$ *справедливо тождество*

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V f(\vec{x}, t)\, dV = \int\limits_V \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}\, dV. \tag{2.13}$$

Теорема 2 (формула Гаусса–Остроградского). *Пусть в ограниченной односвязной области* V *с кусочно–гладкой границей* ∂V *задано векторное поле* $\vec{A}(\vec{x}) = (A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3))$, *каждая компонента* A_i *которого принадлежит классу гладкости* $C^1(V) \cap C(\overline{V})$. *Функция*

$$\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

интегрируема по Лебегу на V. *Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV = \iint\limits_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS. \tag{2.14}$$

Здесь и далее все интегралы понимаются в лебеговом смысле. Символом dS обозначен элемент площади поверхности ∂V около вектора внешней единичной нормали $\vec{n}$.

Теорема 3 (о диссипации энергии). *Пусть* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – *решение поставленной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений. Тогда полная кинетическая энергия жидкости* $E(t)$ *является функцией класса* $C^1([0, T])$ *и при каждом* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant 0. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение поставленной начально–краевой задачи. Подставив его в (2.10), проинтегрируем полученное равенство по области V. Принимая во внимание (2.12) – (2.14), будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS = -\int\limits_V \varPhi\, dV. \tag{2.16}$$

Векторное поле

$$\vec{A} = (\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p + \Psi\Big) - 2\eta\big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})$$

при фиксированном t непрерывно дифференцируемо в V и непрерывно в $\overline{V}$. Из (2.10) и свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ следует, что $\operatorname{div} \vec{A} \in C(\overline{V})$. Поэтому $\operatorname{div} \vec{A} \in L_1(V)$. В силу граничных условий (1.4) поверхностный интеграл второго рода в левой части (2.16) обращается в нуль и справедливо соотношение

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int\limits_V \varPhi \, dV. \tag{2.17}$$

Неравенство (2.15) является следствием (2.17), если принять во внимание неотрицательность диссипативной функции $\varPhi$. ■

Приступим к получению энергетических оценок решения поставленной задачи. Для этого потребуются неравенство А. Корна

$$\frac{1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \, dV \leqslant \int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\vec{u})\big) \, dV \tag{2.18}$$

и неравенство К.О. Фридрихса

$$\int\limits_V \vec{u}^2 \, dV \leqslant c_F \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 \, dV, \tag{2.19}$$

справедливые для вектор функций $\vec{u}$ класса $\mathbf{C}^2(V) \cap \mathbf{C}^1(\overline{V})$, обращающихся в нуль на ∂V. Здесь c_F – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V.

Докажем неравенство Корна. Имеем

$$\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\vec{u})\big) \, dV = \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\sigma_{ij} \, dV = \frac{1}{4}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 \, dV =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 + \frac{1}{4}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, dV. \tag{2.20}$$

Оценка (2.18) следует из (2.20), поскольку последнее слагаемое в (2.20) неотрицательно. Истинность последнего высказывания вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, dV = \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) \, dV - \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \, dV =$$

$$= \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) \, dV - \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \, dV =$$

$$= \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\, dV - \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)\, dV +$$

$$+ \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, dV = \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\, dV +$$

$$+ \int\limits_V \big(\operatorname{div}\, \vec{u}\big)^2\, dV = \iint\limits_{\partial V} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\, n_i\, dS +$$

$$+ \int\limits_V \big(\operatorname{div}\, \vec{u}\big)^2\, dV = \int\limits_V \big(\operatorname{div}\, \vec{u}\big)^2\, dV.$$

Здесь использованы стандартные правила дифференцирования, теорема Г. Шварца о равенстве смешанных производных, формула Гаусса–Остроградского, а также свойства гладкости векторного поля $\vec{u}$ и обращение его в нуль на границе ∂V. Доказательство неравенства Фридрихса можно найти в [26].

Теорема 4. *На решении поставленной начально-краевой задачи при любом* $t \in [0, T]$ *выполняются неравенства*

$$\frac{dE(t)}{dt} + ME(t) \leqslant 0 \tag{2.21}$$

и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leqslant 0, \tag{2.22}$$

где $\varphi(t) = E(t)e^{Mt}$, $M = (2\eta)/c_F$ *– положительная константа.*

Доказательство. Принимая во внимание (2.17) и (2.11), а также неравенства Корна и Фридрихса, будем иметь

$$-\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_V \varPhi\, dV = 2\eta \int\limits_V (\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma})\, dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V \vec{w}^2\, dV \geqslant$$

$$\geqslant 2\eta \int\limits_V (\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma})\, dV \geqslant \eta \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\, dV \geqslant \frac{\eta}{c_F}\int\limits_V \vec{u}^2\, dV = \frac{2\eta}{c_F}E(t). \tag{2.23}$$

Полагая $M = (2\eta)/c_F$, из (2.23) выводим (2.21).

Запишем теперь (2.21) в эквивалентном виде

$$e^{-Mt}\frac{d}{dt}\Big(E(t)e^{Mt}\Big) \leqslant 0. \tag{2.24}$$

На промежутке $[0,\ T]$ введем новую функцию $\varphi(t)$, связанную с $E(t)$ соотношением

$$\varphi(t) = E(t)e^{Mt} \tag{2.25}$$

Поскольку экспонента принимает только положительные значения, из (2.24), (2.25) получим (2.22). ■

Следствие 1. *На промежутке* $[0, T]$ *функция* $\varphi(t)$ *является невозрастающей.*

Следствие 2. *При любом* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$E(t) \leqslant E(0)e^{-Mt}. \tag{2.26}$$

Принимая во внимание (2.15), (2.26) и неотрицательность функции $E(t)$, получаем следующий результат.

Теорема 5. *При* $T = +\infty$ *полная кинетическая энергия* $E(t)$ *убывает на промежутке* $[0,\ +\infty)$ *и стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Интегрируя (2.26) на множестве $[0,\ T]$, получим неравенство

$$\int\limits_0^T E(t)\ dt \leqslant \frac{E(0)}{M}\Big(1 - e^{-MT}\Big), \tag{2.27}$$

которое можно записать в эквивалентной форме

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\ dV dt \leqslant \frac{1}{M}\Big(1 - e^{-MT}\Big)\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV. \tag{2.28}$$

В частности,

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\ dV dt \leqslant \frac{1}{M}\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV \tag{2.29}$$

при любом конечном или бесконечном T. Таким образом, найдены априорные оценки для скорости $\vec{u}$.

Проинтегрируем теперь (2.17) по промежутку $[0,\ T]$:

$$E(0) - E(T) = \int\limits_0^T dt \int\limits_V \Phi\ dV = \int\limits_Q \Phi\ dV\ dt =$$

$$= \int\limits_Q \Big(2\eta\big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big) + \frac{\vec{w}^2}{\tau}\Big)\ dV\ dt \geqslant \frac{1}{\tau}\int\limits_Q \vec{w}^2\ dV\ dt.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\int\limits_Q \vec{w}^2\ dV\ dt \leqslant \tau\big(E(0) - E(T)\big) \leqslant \tau E(0), \tag{2.30}$$

$$\int\limits_Q \big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla(p + \Psi)\big)^2\ dV\ dt \leqslant \frac{1}{2\tau}\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV. \tag{2.31}$$

Заметим, что формулы (2.15), (2.21), (2.22), (2.26), (2.27) – (2.29) справедливы и на решениях аналогично поставленной задачи для системы Навье–Стокса в динамике несжимаемой жидкости. Энергетические оценки (2.30), (2.31) специфичны для квазигидродинамических уравнений и являются следствием более сложной структуры диссипативного функционала Φ по сравнению с классическим случаем. Полученые неравенства могут использоваться для нахождения других априорных оценок, а также в доказательствах теорем о существовании решений.

3. Течение жидкости со свободной границей во вращающейся цилиндрической полости

Рассмотрим задачу о стационарном течении жидкости (например, воды) во вращающейся цилиндрической полости радиуса R с твердым нижним плоским дном, перпендикулярным внутренней боковой поверхности. Верхняя граница объема, занимаемого жидкостью, предполагается свободной. Над ней находится воздух с атмосферным давлением p_0. В состоянии покоя высота столба жидкости равна H, занимаемый ею объем $V = \pi R^2 H$. Поместим начало правой декартовой системы координат $oxyz$ в центр дна полости, ось oz направим вертикально вверх по отношению к поверхности Земли. В качестве основной математической модели будем рассматривать КГД систему (1.1) – (1.2). Запишем ее в цилиндрических координатах для случая установившихся течений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \\
&= 2\eta\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}\Big) + \\
&\quad + \frac{2}{r}\frac{\partial(rw_r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_r)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(w_z u_r)}{\partial z} + \\
&\quad\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi w_r)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z w_r)}{\partial z} - 2\frac{u_\varphi w_\varphi}{r},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \\
&= 2\eta\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r}\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(w_z u_\varphi)}{\partial z} + \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r w_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z w_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r w_\varphi + u_\varphi w_r}{r},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(u_z^2)}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=\\
=-g+2\eta\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\Big)+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r u_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_z)}{\partial\varphi}+2\frac{\partial(w_z u_z)}{\partial z}+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r w_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi w_z)}{\partial\varphi},
\end{gathered}\tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered}
w_r=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\varphi^2}{r}+\frac{\partial p}{\partial r}\Big),\\
w_\varphi=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\Big),\\
w_z=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}+g\Big).
\end{gathered}\tag{3.5}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются с помощью соотношений

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\quad \sigma_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
\sigma_{r\varphi}=\sigma_{\varphi r}=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{u_\varphi}{r}\Big)\Big],\\
\sigma_{\varphi z}=\sigma_{z\varphi}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\Big),\\
\sigma_{zr}=\sigma_{rz}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\Big).
\end{gathered}\tag{3.6}$$

Связь декартовых координат $(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$ с цилиндрическими координатами (r,φ,z) дается равенствами

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Коэффициент динамической вязкости η, характерное время релаксации τ и ускорение свободного падения g считаются заданными положительными константами. Неизвестными величинами являются компоненты $u_r=u_r(r,\varphi,z)$, $u_\varphi=u_\varphi(r,\varphi,z)$, $u_z=u_z(r,\varphi,z)$ вектора скорости $\vec{u}$ в ортонормированном локальном базисе ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$) и давление $p=p(r,\varphi,z)$.

Пусть Ω – постоянная угловая скорость вращения цилиндра вокруг оси oz. Будем искать частное решение системы (3.1) – (3.6) в виде

$$u_r=0,\quad u_\varphi=\Omega r,\quad u_z=0,\quad p=-gz+A(r),\tag{3.7}$$

где $A(r)$ – подлежащая определению функция. Подстановка (3.7) в (3.5) приводит к соотношениям

$$w_r = \tau\Big(\frac{dA}{dr} - \Omega^2 r\Big), \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0. \tag{3.8}$$

Для зависимостей вида (3.7) все компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю. Поэтому система (3.1) – (3.6) принимает вид

$$\frac{d}{dr}\Big[r\Big(\frac{dA}{dr} - \Omega^2 r\Big)\Big] = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{dA}{dr} = \Omega^2 r, \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dr}\Big[\Omega r^2\Big(\frac{dA}{dr} - \Omega^2 r\Big)\Big] + \Big(\frac{dA}{dr} - \Omega^2 r\Big)\Omega r = 0. \tag{3.11}$$

Равенства (3.9), (3.11) являются следствием (3.10). Интегрирование (3.10) по переменной r дает

$$A(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2} + c_1, \tag{3.12}$$

где c_1 – постоянная.

Определим теперь форму свободной поверхности S жидкости, считая что давление на ней постоянно и равно атмосферному давлению p_0. Пусть уравнение этой поверхности имеет вид

$$z = \alpha(r),\ 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{3.13}$$

С помощью (3.7), (3.12), (3.13) находим

$$p_0 = -g\alpha(r) + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + c_1. \tag{3.14}$$

Отсюда

$$z = \alpha(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \frac{1}{g}\big(c_1 - p_0\big),\ 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{3.15}$$

Таким образом, S есть параболоид вращения.

Для вычисления константы c_1 воспользуемся законом сохранения объема. Запишем (3.15) в эквивалентном виде

$$z = \beta(x,y) = \frac{\Omega^2}{2g}\big(x^2+y^2\big) + \frac{1}{g}\big(c_1 - p_0\big),\ x^2+y^2 \leqslant R^2.$$

Занимаемый жидкостью объем

$$V = \pi R^2 H = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \beta(x,y)\ dxdy = 2\pi\int\limits_0^R r\alpha(r)\ dr =$$

$$= \frac{\pi\Omega^2}{4g}R^4 + \frac{\pi R^2}{g}\big(c_1 - p_0\big). \tag{3.16}$$

Из (3.16) находим

$$c_1 = p_0 + gH - \frac{\Omega^2 R^2}{4}. \tag{3.17}$$

Подстановка (3.17) в (3.15) дает форму свободной поверхности S:

$$z = \alpha(r) = H + \frac{\Omega^2}{4g}\big(2r^2 - R^2\big),\ 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{3.18}$$

Поскольку $\alpha(r) > 0$, должна выполняться оценка

$$\Omega^2 < \frac{4gH}{R^2}. \tag{3.19}$$

Таким образом, решения рассматриваемого вида существуют только для угловых скоростей Ω, удовлетворяющих неравенству (3.19). Как следует из (3.7), (3.12), (3.17), само решение выглядит следующим образом:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = \Omega r, \quad u_z = 0,$$

$$p = p_0 + g(H - z) + \frac{\Omega^2}{4}\big(2r^2 - R^2\big), \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant z \leqslant \alpha(r). \tag{3.20}$$

Заметим, что зависимости (3.20) удовлетворяют также классическим стационарным уравнениям Навье–Стокса и Эйлера, выписанным в цилиндрических координатах. Например, форма свободной поверхности в виде параболоида получается из модели Эйлера (см. [1], с. 42). Как и в [1], при постановке задачи не учитывались эффекты поверхностного натяжения. Изменение атмосферного давления на высоте порядка $\Omega^2 R^2/(2g)$ также не принималось во внимание.

4. Течение жидкости во вращающейся сферической полости

Рассмотрим задачу о стационарном течении в условиях невесомости жидкости, заполняющей сферическую полость радиуса $R > 0$. Ограничивающая полость сфера вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси oz. Начало декартовой системы координат $oxyz$ находится в центре полости. Выпишем квазигидродинамическую систему (1.1) – (1.2) без учета внешних сил в сферической системе координат для установившихся течений:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 u_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(u_\theta \sin\theta\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 w_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(w_\theta \sin\theta\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 u_r^2\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(u_\theta u_r \sin\theta\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial\varphi} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} =$$

$$= 2\eta\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\sigma_{rr}\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\ \sigma_{\theta r}\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial\varphi} - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r}\Big] +$$

$$+ 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 w_r u_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(w_\theta u_r \sin\theta\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(w_\varphi u_r)}{\partial\varphi} +$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(u_\theta w_r\sin\theta\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi w_r)}{\partial\varphi}-2\frac{u_\theta w_\theta+u_\varphi w_\varphi}{r}, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2u_ru_\theta\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(u_\theta^2\sin\theta\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi u_\theta)}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta u_r}{r}-\frac{u_\varphi^2\text{ctg }\theta}{r}+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=2\eta\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\sigma_{r\theta}\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\ \sigma_{\theta\theta}\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+$$
$$+\frac{\sigma_{\theta r}-\sigma_{\varphi\varphi}\text{ctg }\theta}{r}\Big]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2w_ru_\theta\big)+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(w_\theta u_\theta\sin\theta\big)+$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(w_\varphi u_\theta)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2u_rw_\theta\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi w_\theta)}{\partial\varphi}+$$
$$+\frac{w_\theta u_r+w_ru_\theta}{r}-2\frac{u_\varphi w_\varphi\text{ctg }\theta}{r}, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2u_ru_\varphi\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(u_\theta u_\varphi\sin\theta\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\big(u_\varphi^2\big)}{\partial\varphi}+\frac{u_ru_\varphi}{r}+$$
$$+\frac{u_\theta u_\varphi\text{ctg }\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=2\eta\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\sigma_{r\varphi}\big)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\ \sigma_{\theta\varphi}\big)+$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_{\varphi r}+\sigma_{\varphi\theta}\text{ctg }\theta}{r}\Big]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2w_ru_\varphi\big)+$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(w_\theta u_\varphi\sin\theta\big)+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial(w_\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2u_rw_\varphi\big)+$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi w_\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{w_\varphi u_r+w_ru_\varphi}{r}+\frac{w_\theta u_\varphi+w_\varphi u_\theta}{r}\ \text{ctg }\theta. \tag{4.4}$$

Здесь

$$w_r=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r}+\frac{\partial p}{\partial r}\Big), \tag{4.5}$$

$$w_\theta=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{u_ru_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\text{ctg }\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\Big), \tag{4.6}$$

$$w_\varphi=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_ru_\varphi}{r}+\frac{u_\theta u_\varphi\text{ctg }\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\Big). \tag{4.7}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций $\widehat{\sigma}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\text{ctg }\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\varphi}=\sigma_{\varphi\theta}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi\text{ctg }\theta}{r}\Big),$$

$$\sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\Big). \tag{4.8}$$

Связь сферических координат (r, θ, φ) с декартовыми (x, y, z) дается соотношениями $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Система (4.1) – (4.8) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_r = u_r(r, \theta, \varphi)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta, \varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \theta, \varphi)$ в ортонормированном локальном базисе $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ и давления $p = p(r, \theta, \varphi)$.

Будем искать частное решение (4.1) – (4.8) в виде

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = A\ r\sin\theta, \tag{4.9}$$

$$p = p(r, \theta), \tag{4.10}$$

где $A = const$. Подставив (4.9) в (4.8), убеждаемся в том, что все компоненты тензора скоростей деформаций обращаются в нуль. Из (4.7), (4.9), (4.10) следует, что $w_\varphi = 0$. Найдем функцию (4.10) с помощью (4.5), (4.6), (4.9) из условий $w_r = 0$, $w_\theta = 0$. Это приводит к соотношениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = A^2\ r\sin^2\theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = A^2\ r^2\sin\theta\cos\theta. \tag{4.11}$$

Отсюда

$$p = \frac{A^2 r^2}{2}\sin^2\theta + p_0. \tag{4.12}$$

Здесь p_0 – произвольная постоянная.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что зависимости (4.9), (4.12) образуют точное решение системы (4.1) – (4.8) при произвольном значении константы A. Из краевого условия

$$u_\varphi\Big|_{r=R} = \Omega R\sin\theta$$

находим $A = \Omega$. Таким образом, точное решение КГД системы в поставленной задаче имеет вид

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = \Omega\ r\sin\theta, \quad p = \frac{\Omega^2 r^2}{2}\sin^2\theta + p_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{4.13}$$

Оно является также точным решением стационарных систем Навье–Стокса и Эйлера в сферических координатах.

Заметим, что в данной работе не исследуются проблемы устойчивости и единственности построенных решений. Например, решение КГД системы (4.13) может быть устойчиво лишь при малых числах Рейнольдса $Re = \Omega R^2/\eta$. С увеличением Re не исключено возникновение вторичных режимов течения.

5. Точечный источник массы

Будем искать точное решение системы (4.1) – (4.8) в виде

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = 0, \tag{5.1}$$

$$p = p(r). \tag{5.2}$$

Его следует интерпретировать как течение, вызванное точечным источником (стоком) массы интенсивности Q, находящимся в начале координат. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что на этом решении $w_\theta = 0$, $w_\varphi = 0$. Найдем распределение давления из условия $w_r = 0$. Подстановка (5.2) в (4.5) приводит к соотношению

$$\frac{dp}{dr} = -u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^5}. \tag{5.3}$$

Отсюда

$$p = p_\infty - \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}, \quad r > 0. \tag{5.4}$$

Для компонент тензора скоростей деформаций имеем

$$\sigma_{rr} = -\frac{Q}{2\pi r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{Q}{4\pi r^3}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Q}{4\pi r^3}. \tag{5.5}$$

Остальные составляющие $\widehat{\sigma}$ равны нулю. Принимая во внимание (5.5), нетрудно убедиться в том, что зависимости (5.1), (5.4) образуют точное решение стационарных уравнений Эйлера, Навье–Стокса и КГД в сферических координатах.

Заключение

Полученные в данной работе, а также в [4]–[6] результаты неоспоримо свидетельствуют о наличии глубоких и разветвленных связей, предложенных автором квазигидродинамических уравнений, с классическими уравнениями Навье–Стокса. В отличие от системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, КГД уравнения содержат еще один важный физический параметр – скорость звука c_s. Преимущества КГД подхода следует искать для таких течений жидкостей в микроканалах и тонких пленках с характерным линейным размером L, при которых звуковое число Рейнольдса $Re_s = (\rho c_s L)/\eta$ не слишком велико. При этом на твердых границах необходимо задавать условия проскальзывания для скорости.

Актуальными являются проблемы существования классических или обобщенных решений задач Коши и начально–краевых задач для КГД уравнений в случае двух или трех пространственных переменных, выяснение условий единственности решений (см. [4]–[6], [27]). Не исключено, что доказательство существования решения трехмерной нестационарной КГД системы может оказаться проще, чем для соответствующей системы Навье–Стокса (см. [28]), вследствие более богатой структуры диссипативного функционала Φ. Еще один вопрос связан с выяснением условий, при которых решение КГД уравнений поточечно стремиться к решению уравнений Навье–Стокса при $\tau \to +0$. Заметим, что для всех построенных к настоящему времени точных решений системы КГД указанное свойство выполняется.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М., 1986. — 736 с.

[2] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. — 2006. — № 1. — С. 6–76.

[3] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. — М., 1999. – 232 с.

[4] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Мат. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 10. — С. 35–45.

[5] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун–т, 1997. — С. 127–155.

[6] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — М.– Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 400 с.

[7] Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Мат. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 7. — С. 33–44.

[8] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 10. — С. 1732–1742.

[9] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2003. — Т. 43, № 3. — С. 453–466.

[10] Семенов М.В., Шеретов Ю.В. Новый численный алгоритм расчета осесимметричных течений жидкости в окрестности шара при умеренных числах Рейнольдса // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2005. — № 2. — С. 51–60.

[11] Семенов М.В., Шеретов Ю.В. Численное моделирование дозвуковых осесимметричных течений газа вблизи шара // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2006. — № 4. — С. 78–97.

[12] Калачинская И.С., Широков И.А. Численное моделирование двухслойной термокапиллярной конвекции в цилиндре // Дифференц. ур-я. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 938–942.

[13] Елизарова Т.Г., Жериков А.В., Калачинская И.С. Численное решение квазигидродинамических уравнений в области сложной формы // Дифференц. ур-я. — 2007. — Т. 43, № 9. — С. 1255–1262.

[14] Каминский В.А., Обвинцева Н.Ю., Калачинская И.С., Дильман В.В. Моделирование конвекции Рэлея в нестационарном процессе испарения // Мат. моделирование. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 3–10.

[15] Елизарова Т.Г., Афанасьева М.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестник МГУ им. М.В.Ломоносова. Физика. — 2010. — № 1. — С. 15–18.

[16] Ключникова А.В. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости на основе квазигидродинамических уравнений: дис. ... канд. физ.–мат. наук. — М., 1999. — 90 с.

[17] Семенов М.В. Математическое моделирование отрывных течений жидкости и газа в окрестности шара: дис. ... канд. физ.–мат. наук. — Тверь, 2006. — 103 с.

[18] Обвинцева Н.Ю. Моделирование межфазного массопереноса в условиях естественной конвекции: дис. ... канд. физ.–мат. наук. — М., 2009. — 128 с.

[19] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений для математического моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости: дис. ... канд. физ.–мат. наук. — М., 2009. — 87 с.

[20] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, Вып. 5. — С. 667–682.

[21] Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо– и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 325–337.

[22] Злотник А.А. Квазигазодинамическая система уравнений с более общими уравнениями состояния // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 5. — С. 605–609.

[23] Шеретов Ю.В. О свойствах решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2009. — № 3. — С. 5–19.

[24] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.

[25] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1976. — 391 с.

[26] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.

[27] Зейтунян Р.Х. Корректность задач динамики жидкостей (гидродинамическая точка зрения) // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, Вып 3. — С. 3–92.

[28] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, Вып 2. — С. 45–78.