УДК 517.956.225:519.632.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Могилевский И.Ш., Эйалло К.О.
Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 01.06.2010, после переработки 03.06.2010.

Доказано существование обобщенного решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в пространстве функций ортогональных единице. Проведено обоснование метода Галеркина для нахождения обобщенного решения задачи Неймана. Приводятся результаты численной реализации метода Галеркина для плоской криволинейной трапеции.

The existence to the weak solution of the Neumann problem to the Laplace equation is proved in a space of functions ortogonal to unity. The Galerkin method to this problem is based. The results of a numeric realization of the Galerkin method for the curvilinear trapezoid are discussed.

Ключевые слова: задача Неймана, уравнение Лапласа, метод Галеркина.
Keywords: Neumann problem, Laplace equation, Galerkin method.

1. Введение

Задача Неймана – одна из наиболее часто встречающихся задач математической физики. Постановка этой задачи хорошо известна из университетского курса уравнений в частных производных. Пусть Ω – область из пространства R^n, $n \geq 2$ с гладкой границей S, ν – единичный вектор внешней нормали к поверхности S. Задача Неймана состоит в нахождении функции $u(x)$, удовлетворяющей в Ω дифференциальному уравнению

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

а на границе S краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi \quad x \in \partial\Omega = S. \tag{2}$$

Областью мы называем связное, открытое, непустое множество. Хорошо известно (из [1] например), что необходимым условием разрешимости задачи (1), (2) является соотношение между функциями f и ψ

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \int\limits_{S} \psi(x)\,dS, \tag{3}$$

а два решения задачи (1), (2) могут отличаться только на постоянное слагаемое.

В настоящей статье мы излагаем доказательство разрешимости задачи (1), (2) в пространстве функций, ортогональных единице, приводим обоснование метода Галеркина построения решения задачи и обсуждаем численную реализацию этого метода для плоской прямоугольной области. Для полноты изложения мы приводим новое и сравнительно элементарное доказательство теоремы о слабой компактности для сепарабельного гильбертова пространства.

2. Необходимые сведения из функционального анализа и теории функций

Мы будем искать решение задачи (1), (2) в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$. Это пространство состоит из функций, принадлежащих пространству $L_2(\Omega)$ и имеющих обобщенные производные первого порядка, также принадлежащие $L_2(\Omega)$. Норма в $W_2^1(\Omega)$ задается равенством

$$\|u\| = \left[\int\limits_{\Omega} u^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Пространство $W_2^1(\Omega)$ – гильбертово, со скалярным произведением

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx.$$

Если область Ω – звездная относительно некоторого шара, то для функций из пространства $W_2^1(\Omega)$ выполняется неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x)\,dx \le c\left[\left(\int\limits_{\Omega} u(x)dx\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right]. \tag{5}$$

Напомним, что область называется звездной относительно некоторой точки, если любой исходящий из этой точки луч имеет одну и только одну общую точку с границей данной области. Область называется звездной относительно некоторого точечного множества, если она звездная относительно каждой точки этого множества. Все области, рассматриваемые в настоящей статье, предполагаются звездными относительно некоторого шара.

Для следа функции $u \in W_2^1(\Omega)$ на поверхности S имеет место неравенство (теорема вложения)

$$\|u\|_{L_2(S)} \le c\|u\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Буквой c в неравенствах обозначаются разные, вообще говоря, константы. Все эти константы не зависят от функции u, а зависят только от области Ω.

Более подробные сведения о пространствах Соболева и необходимые доказательства можно найти в [1] и [2].

Мы будем использовать подпространство $V(\Omega)$ пространства $W_2^1(\Omega)$, состоящее из функций, ортогональных единице.

$$V(\Omega) = \{u \in W_2^1(\Omega) :\ (u,1) = 0\}.$$

Из определения скалярного произведения в $W_2^1(\Omega)$ следует, что функции из $V(\Omega)$ характеризуются условием

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\,d\,x = 0. \tag{7}$$

В пространстве $V(\Omega)$ можно ввести отличное от $(\cdot\,,\cdot)_{W_2^1(\Omega)}$ скалярное произведение. Именно, положим

$$[u,v] = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,d\,x.$$

Проверим выполнение аксиом скалярного произведения для $[\cdot\,,\cdot]$. Пусть $[u,u]=0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k=1,2,...n, \quad \Rightarrow \quad u = const.$$

Т.к. пространство $V(\Omega)$ не содержит констант, отличных от нуля, то $u=0$. Проверка остальных аксиом скалярного произведения не вызывает никаких затруднений.

Скалярное произведение $[\cdot\,,\cdot]$ порождает норму в пространстве $V(\Omega)$

$$|||u||| = \left[\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Из неравенства Пуанкаре (5) и условия (7) следует, что нормы (4) и (8) эквивалентны на пространстве $V(\Omega)$.

$$|||u|||^2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x \le \int\limits_{\Omega} u^2(x)\,d\,x + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le$$
$$\le c\left[\left(\int\limits_{\Omega} u(x)d\,x\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x\right] + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x =$$
$$= (1+c)\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\,x = (1+c)|||u|||^2.$$

3. Разрешимость задачи Неймана в пространстве функций, ортогональных единице

Пусть $u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ есть классическое решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию ортогональности (7), а функции $f \in C(\Omega)$ и $\psi \in C(S)$ удовлетворяют условию разрешимости (3). Умножим обе части уравнения (1) на произвольную функцию $\eta \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$, также удовлетворяющую условию ортогональности (7), и проведем интегрирование по частям.

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\,\eta(x)\,dx =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\,dx + \int\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\eta(x)\,dS =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\,dx + \int\limits_{S}\psi(x)\eta(x)\,dS.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx + \int\limits_{S}\psi(x)\eta(x)\,dS. \tag{9}$$

Следуя [2], дадим следующее

Определение 1. *Функция $u \in V(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если для всякой функции $\eta \in V(\Omega)$ выполняется интегральное тождество (9).*

Так как пространство $V(\Omega)$ не содержит отличных от нуля констант, то существует не более одного обобщенного решения задачи (1), (2) из $V(\Omega)$.

Установим теперь разрешимость задачи (1), (2) в $V(\Omega)$.

Теорема 11. *Пусть $\Omega \subset R^n$ – область, звездная относительно некоторого шара, $S \in C^1$ — граница области Ω. Пусть, далее, функции $f \in L_2(\Omega)$ и $\psi \in L_2(S)$ удовлетворяют условию (3). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение из пространства $V(\Omega)$.*

Доказательство. Интегральное тождество (9) запишем, используя скалярное произведение $[\cdot\,,\cdot]$,

$$[u,\eta] = -\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx + \int\limits_{S}\psi(x)\eta(x)\,dS \tag{10}$$

и покажем, что правая часть (10)

$$l(\eta) = -\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx + \int\limits_{S}\psi(x)\eta(x)\,dS$$

определяет линейный ограниченный функционал от η над пространством $V(\Omega)$. Линейность $l(\eta)$ очевидна. Установим ограниченность функционала, используя неравенства Коши-Буняковского, (5) и (6).

$$|\,l(\eta)| \le \left|\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{S} \psi(x)\eta(x)\,dS\right| \le$$
$$\left(\int\limits_{\Omega} f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} \eta^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{S} \psi^2(x)\,dS\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{S} \eta^2(x)\,dS\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le c\left[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right] \left(\int\limits_{\Omega} \eta^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)^2 d\,x\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le c\left[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right] \left(\left[\int\limits_{\Omega} \eta(x)\,dx\right]^2 + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)^2 d\,x\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= c\left[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right] |||\eta|||.$$

Отметим, что в этой выкладке буквой c обозначены разные константы. Итак, мы установили, что $l(\eta)$ есть линейный ограниченный функционал над гильбертовым пространством $V(\Omega)$. По теореме Ф.Рисса о представлении линейного ограниченного функционала над гильбертовым пространством существует функция $F \in V(\Omega)$ такая, что

$$l(\eta) = [F, \eta] \quad \forall \eta \in V(\Omega).$$

Тогда равенство (10) примет вид

$$[u, \eta] = [F, \eta] \quad \forall \eta \in V(\Omega),$$

а это означает, что $u = F$ есть обобщенное решение задачи (1), (2). Единственность обобщенного решения из пространства $V(\Omega)$ уже установлена. Теорема доказана.

4. О слабой компактности ограниченного множества в сепарабельном гильбертовом пространстве

В многочисленных приложениях функционального анализа часто используется теорема о слабой компактности в гильбертовом пространстве, т.е. теорема о том, что всякое бесконечное ограниченное множество в гильбертовом пространстве содержит слабо сходящуюся последовательность. Имеющиеся доказательства этой теоремы, например в [3, 4], опираются на достаточно развитую теорию топологических свойств банаховых пространств. Доказательство, приведенное в [5], использует элементы теории сопряженных пространств. В этом параграфе излагается сравнительно элементарное доказательство теоремы о слабой компактности для сепарабельного гильбертова пространства. Это доказательство опирается на самые основные сведения из теории гильбертовых пространств, которые можно найти в [5].

Напомним, что в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует счетный ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Последовательность

$\{x_n\} \subset H$ слабо сходится к элементу $x_0 \in H$, если для всякого $g \in H$ $(x_n, g) \to (x_0, g)$.

Докажем сначала вспомогательное утверждение, относящееся к числовым последовательностям.

Лемма 1. *Пусть последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ сходится к числу a. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такую, что последовательность $\{b_k = |a_{n_k} - a|\}$ является невозрастающей.*

Доказательство. Если последовательность $\{a_n\}$ содержит счетное количество элементов, равных a, то искомой является подпоследовательность $\{a_{n_k} = a\}$. В этом случае $b_k = 0$.

Предположим теперь, что последовательность $\{a_n\}$ содержит только конечное количество элементов, равных a. Исключим все эти элементы из $\{a_n\}$. Получившуюся последовательность обозначим $\{a'_n\}$. Положим $a_{n_1} = a'_1$. Так как $b_1 = |a_{n_1} - a| > 0$ и $a'_n \to a$, то найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что $a_{n_2} \in \{a'_n\}$ и $0 < b_2 = |a_{n_2} - a| < b_1$. Точно также найдем номер $n_3 > n_2$ такой, что $a_{n_3} \in \{a'_n\}$ и $0 < b_3 = |a_{n_3} - a| < b_2$. Повторяя такой выбор счетное число раз, получим искомую последовательность $\{a_{n_k}\}$. Отметим, что последовательность $\{b_k = |a_{n_k} - a|\}$, монотонно убывая, стремится к нулю. Лемма доказана.

Теорема 12. *Пусть M – бесконечное ограниченное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда в множестве M имеется слабо сходящаяся последовательность $\{y_n\}$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, ...$ некоторый счетный ортонормированный базис в пространстве H. Так как множество M ограничено, то существует такое положительное число T, что $\|x\| \leq T$ для всех $x \in M$. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|(x, \varphi_k)| \leq \|x\| \, \|\varphi_k\| \leq T, k = 1, ...$$

Рассмотрим множество вещественных чисел $\{|(x, \varphi_1)|, \ x \in M\}$. Это множество ограничено. Основываясь на теореме Больцано-Вейерштрасса выделим из M последовательность x_{n_1} такую, что (x_{n_1}, φ_1) сходится к некоторому пределу a_1. Из леммы следует, что последовательность x_{n_1} можно выбрать так, чтобы последовательность $\{b_1^n = |(x_{n_1}, \varphi_1) - a_1|\}$, убывая, стремилась к нулю. Рассмотрим теперь числовую последовательность $\{(x_{n_1}, \varphi_2)\}$. Эта последовательность ограничена числом T. Из последовательности x_{n_1} выделим подпоследовательность $x_{n_{1,2}}$ так, чтобы

$$(x_{n_{1,2}}, \varphi_2) \to a_2, \quad b_2^n = |(x_{n_{1,2}}, \varphi_2) - a_2| \to 0, \quad b_2^n \text{ убывает.}$$

Повторяя описанную процедуру последовательного выделения подпоследовательностей счетное число раз, мы выделим из множества M последовательность $\{y_m\}$, обладающую следующими свойствами

$$(y_m, \varphi_k) \to a_k \text{ при } m \to \infty, \quad b_k^m = |(y_m, \varphi_k) - a_k| \to 0, \quad k = 1, ..., \tag{11}$$

$$b_k^m \text{ убывает с ростом m}, \quad k = 1, ... \ . \tag{12}$$

Покажем теперь, что вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, ...)$ принадлежит пространству l_2. Из неравенства Бесселя следует, что для любого натурального N

$$\sum_{k=1}^{N} (y_m, \varphi_k)^2 \le \|y_m\|^2 \le T^2. \tag{13}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу по $m \to \infty$, учитывая (11). Получим

$$\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \le T^2. \tag{14}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по $N \to \infty$, заключаем, что

$$\bar{a} \in l_2, \quad \|\bar{a}\| \le T.$$

Так как $\bar{a} \in l_2$, то

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \in H$$

и

$$\bar{b}^m = (b_1^m, ...) = (|(y_m, \varphi_1) - a_1|, |(y_m, \varphi_2) - a_2|, ...) \in l_2, \quad m = 1, 2, ...$$

Покажем, что f есть слабый предел последовательности $\{y_m\}$. Пусть g – произвольный элемент пространства H. Разложим g в ряд Фурье по базису $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, ...$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k, \quad g_k = (g, \varphi_k).$$

На основании неравенства Коши-Буняковского и равенства Парсеваля получим

$$|(y_m, g) - (f, g)| = \left| \left(y_m, \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k \right) - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} g_k (y_m, \varphi_k) - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i g_k (\varphi_i, \varphi_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} g_k [(y_m, \varphi_k) - a_k] \right| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k^m\right)^2 \right)^{1/2} = \|g\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k^m\right)^2 \right)^{1/2}, \tag{15}$$

где числа b_k^m определены в (11). Покажем теперь, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k^m\right)^2 \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{16}$$

Так как $\bar{b}^m \in l_2$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число p, что

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \left(b_k^1\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

В силу условия убывания (12)

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \left(b_k^m\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m = 1, 2, ... \tag{18}$$

Из предельных соотношений

$$b_k^m \to 0, \quad \text{при } m \to \infty \quad k = 1, 2, ...$$

следует существование такого натурального числа q, что для всех $m > q$

$$\sum_{k=1}^{p} \left(b_k^m\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k^m\right)^2 < \varepsilon$$

для достаточно больших m. Тем самым установлено предельное соотношение (16), что вместе с (15) доказывает слабую сходимость последовательности $\{y_m\}$ к f. Теорема доказана.

5. Метод Галеркина для задачи (1), (2)

Выберем в сепарабельном гильбертовом пространстве $V(\Omega)$ счетный базис $\{\varphi_k\}$ $k = 1, 2...$, ортонормированный относительно скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$

$$[\varphi_i, \varphi_j] = \delta_{ij}. \tag{20}$$

Обозначим через V^m конечномерное подпространство пространства $V(\Omega)$, натянутое на систему функций $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$. Спроецируем интегральное тождество (10) на подпространство V^m.

$$[u^m, \varphi_k] = -\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_k(x)\, dx + \int\limits_{S} \psi(x)\varphi_k(x)\, dS, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{21}$$

где

$$u^m(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x), \quad \alpha_i \in R \tag{22}$$

приближение к решению задачи (1), (2).

Подставим представление (22) в равенства (21) и воспользуемся условием ортонормированности (20). Получим представление для коэффициентов линейной комбинации (22)

$$\alpha_k = -\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_k(x)\, dx + \int\limits_{S} \psi(x)\varphi_k(x)\, dS \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{23}$$

Мы покажем, что последовательность приближений $\{u^m\}$ сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) в пространстве $V(\Omega)$.

Теорема 13. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательность функций $\{u^m\}$ с коэффициентами, определяемыми равенствами (23) сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) в пространстве $V(\Omega)$.*

Доказательство проведем по следующему плану. Прежде всего мы покажем, что множество приближений $\{u^m\}$ ограничено по норме пространства $V(\Omega)$. Отсюда, основываясь на теоремах 1 и 2, получим, что последовательность $\{u^m\}$ слабо сходится в $V(\Omega)$ к обобщенному решению. Затем покажем, что последовательность $\{u^m\}$ сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) не только слабо, но и сильно, т.е. по норме пространства $V(\Omega)$.

1. Фиксируем натуральное m, умножим каждое из равенств (21) на свое α_k и просуммируем по k от 1 до m. Получим, используя неравенства Коши-Буняковского, (5) и (6),

$$|||u^m|||^2 = -\int\limits_\Omega f(x)u^m(x)\,dx + \int\limits_S \psi(x)u^m(x)\,dS \le$$

$$\le \|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\int\limits_\Omega \left[u^m(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \|\psi\|_{L_2(S)} \left(\int\limits_S \left[u^m(x)\right]^2 dS\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right)\|u^m\|_{W_2^1(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right)|||u^m|||,$$

откуда и следует ограниченность множества $\{u^m\}$

$$|||u^m||| \le c\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(S)}\right). \tag{24}$$

2. Применяя к последовательности $\{u^m\}$ теорему 2, выделим подпоследовательность $\{u^{m_j}\}$, которая слабо сходится к некоторому элементу $v \in V(\Omega)$, т.е.

$$u^{m_j} \rightharpoonup v, \quad \text{что означает} \quad [u^{m_j}, z] \to [v, z]\ \forall z \in V(\Omega).$$

Покажем, что v есть обобщенное решение задачи (1), (2) из $V(\Omega)$. Для этого разложим произвольный элемент $\eta \in V(\Omega)$ в ряд по базису $\{\varphi_k\}$.

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i(x), \quad \beta_i = [\eta, \varphi_i]. \tag{25}$$

Для каждого натурального p обозначим $\eta_p = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i \varphi_i$. Имеют место сходимости

$$\eta_p \to \eta \text{ (сильно)}, \quad \eta_p \rightharpoonup \eta \text{ (слабо)} \quad \text{в } V(\Omega).$$

Из теоремы вложения Соболева (см. [6]) следуют сходимости

$$\eta_p \to \eta \text{ (сильно)}, \quad \eta_p \rightharpoonup \eta \text{ (слабо)} \quad \text{в } L_2(S).$$

Фиксируем натуральные числа m и p так, чтобы $p \le m$, умножим каждое из равенств (21) на β_k и просуммируем по k от 1 до p. Получим

$$[u^m, \eta_p] = -\int\limits_\Omega f(x)\eta_p(x)\,dx + \int\limits_S \psi(x)\eta_p(x)\,dS. \tag{26}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу по подпоследовательности m_j. Так как $u^{m_j} \rightharpoonup v$, то

$$[v,\eta_p] = -\int\limits_{\Omega} f(x)\eta_p(x)\,dx + \int\limits_{S} \psi(x)\eta_p(x)\,dS.$$

Теперь перейдем к пределу по p. Это даст

$$[v,\eta] = -\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx + \int\limits_{S} \psi(x)\eta(x)\,dS,$$

откуда следует, что v есть обобщенное решение задачи (1), (2) из $V(\Omega)$, Так как в пространстве $V(\Omega)$ существует только одно обобщенное решение, то $v = u$.

Покажем, что вся последовательность u^m слабо сходится к обобщенному решению u. Предположим, что это не так. Тогда существуют элемент $z_0 \in V(\Omega)$ и положительное число ε такие, что для некоторой подпоследовательности $\{u^{m_q}\} \subset \{u^m\}$ выполняется неравенство

$$\big|[u^{m_q}, z_0] - [u, z_0]\big| > \varepsilon. \tag{27}$$

Из оценки (24) следует, что подпоследовательность $\{u^{m_q}\}$ ограничена и поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Как уже было показано, эта новая подпоследовательность слабо сходится к обобщенному решению u. Другими словами существует счетное множество функций из $\{u^{m_q}\}$, для которых выполняется неравенство, противоположное (27). Полученное противоречие показывает, что $u^m \rightharpoonup u$ в $V(\Omega)$.

3. Покажем теперь, что последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}$ сходится к обобщенному решению u задачи (1), (2) сильно, т.е. по норме пространства $V(\Omega)$. Для этого разложим функцию u в ряд по базису $\{\varphi_k\}$.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi_i(x), \quad \gamma_i = [u,\varphi_i], \quad u_p = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \varphi_i, \quad |||u - u_p||| \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Обратимся вновь к равенству (26) и положим в нем $p = m$, а $\eta_m = u^m - u_m$. Получим

$$[u^m, u^m - u_m] = -\int\limits_{\Omega} f(u^m - u_m)\,dx + \int\limits_{S} \psi(u^m - u_m)\,dS. \tag{28}$$

Запишем также интегральное тождество (9), положив в нем $\eta = u^m - u_m$.

$$[u, u^m - u_m] = -\int\limits_{\Omega} f(u^m - u_m)\,dx + \int\limits_{S} \psi(u^m - u_m)\,dS. \tag{29}$$

Вычтем (28) из (29) и преобразуем разность.

$$0 = [u - u^m, u^m - u_m] = [u - u^m, (u^m - u) + (u - u_m)] =$$
$$= -[u - u^m, u - u^m] + [u - u^m, u - u_m] = -|||u - u^m|||^2 + [u - u^m, u - u_m].$$

Отсюда получим, применяя неравенства Коши-Буняковского,

$$|||u - u^m|||^2 \leq |||u - u^m||| \cdot |||u - u_m|||,$$

что приводит к соотношению

$$|||u - u^m||| \leq |||u - u_m||| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

А это и означает, что последовательность $\{u^m\}$ сильно сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) в $V(\Omega)$. Теорема доказана.

6. Численная реализация метода Галеркина

Изложенный в предыдущем параграфе метод был реализован численно с использованием среды MATLAB. В качестве области Ω была выбрана криволинейная трапеция

$$\Omega = \{a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < \mu(x_1)\},$$

где $\mu(x_1)$ — заданная гладкая функция.

Конечная ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ получается в результате ортогонализации системы полиномов

$$x_1^{p_k} x_2^{q_k} - b_k, \quad k = 1, ..., m, \quad 1 \leq p_k + q_k \leq d,$$

где d — максимальная степень полиномов, а числа b_k подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_{\Omega} (x_1^{p_k} x_2^{q_k} - b_k) dx = 0, \quad k = 1, ..., m.$$

Полиномы $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ удовлетворяют условиям ортонормированности в $V(\Omega)$

$$[\varphi_i, \varphi_j] = \delta_{ij}.$$

Процедура ортогонализации реализована в виде отдельной программы. Приближенное решение вычисляется по формулам (22) и (23).

Комплекс программ, реализующих метод Галеркина, протестирован на нескольких функциях. Ниже приводятся результаты тестирования. Были выбраны следующие данные:

$$a_1 = 0, \; b_1 = 2, \; a_2 = 0.$$

Точность приближения решения оценивается относительной погрешностью

$$\delta = \frac{\|u - u^m\|_{W_1^2(\Omega)}}{\|u\|_{W_1^2(\Omega)}},$$

где u — точное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию (7), u^m — приближенное решение.

$\mu(x_1)$	$u(x_1,x_2)$	d	δ
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1^2+x_2^3-4.5619$	3	$1.7609\cdot 10^{-7}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$\exp(x_1+x_2)-9.4652$	3	0.0699
$2+\sin\,\pi x_1$	$\exp(x_1+x_2)-9.4652$	5	0.0031
$2+\sin\,\pi x_1$	$\exp(x_1+x_2)-9.4652$	7	$1.0645\cdot 10^{-4}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$\exp(x_1+x_2)-9.4652$	9	$7.4907\cdot 10^{-5}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\frac{\pi}{2}x_2)-1.3094$	7	$3.9469\cdot 10^{-4}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\frac{\pi}{2}x_2)-1.3094$	9	$3.5905\cdot 10^{-4}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\frac{\pi}{2}x_2)-1.3094$	11	$1.1594\cdot 10^{-4}$
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\pi\,x_2)-1.0484$	7	0.0514
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\pi\,x_2)-1.0484$	9	0.0045
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(\pi\,x_2)-1.0484$	11	0.0073
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-0.9029$	7	0.7355
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-0.9029$	9	0.3035
$2+\sin\,\pi x_1$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-0.9029$	11	0.2881
$0.5+0.1\cdot\sin(\pi x_1)$	$x_1+\sin(\pi\,x_2)-1.5730$	5	$1.9175\cdot 10^{-4}$
$0.5+0.1\cdot\sin(\pi x_1)$	$x_1+\sin(\pi\,x_2)-1.5730$	7	$2.5931\cdot 10^{-6}$
$0.5+0.1\cdot\sin(\pi x_1)$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-1.5423$	5	0.0075
$0.5+0.1\cdot\sin(\pi x_1)$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-1.5423$	7	$1.6132\cdot 10^{-4}$
$0.5+0.1\cdot\sin(\pi x_1)$	$x_1+\sin(2\pi\,x_2)-1.5423$	9	$1.1057\cdot 10^{-5}$

Полученные результаты численного решения задачи Неймана дают возможность сделать заключение о работоспособности предложенного метода. Неудовлетворительные результаты, полученные для

$$\mu(x_1)=2+\sin\,\pi x_1,\quad u(x_1,x_2)=x_1+\sin(2\pi\,x_2),$$

объясняются тем, что для подходящей аппроксимации функции $\sin(2\pi\,x_2)$ при $1\le x_2\le 3$ требуется полином примерно 30 степени. При $0<x_1<2$ и $0<x_2<3$ полиномы степени 30 принимают весьма большие значения и относительно небольшие ошибки вычислений интегралов умножаются на большие числа, что приводит к большим результирующим ошибкам. Для решения этой проблемы нужны специальные вычислительные и программные методы, обсуждение которых выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение

В статье исследована классическая задача Неймана для уравнения Лапласа. Приведено новое и сравнительно простое доказательство существования обобщенного решения задачи Неймана в пространстве функций, ортогональных единице. Дано новое доказательство теоремы о слабой компактности для сепарабельного гильбертова пространства. Обосновано получение решения задачи Неймана методом Галеркина. Приведены результаты численной реализации метода Галеркина для плоской криволинейной трапеции, причем в качестве базисных функций выбраны полиномы, ортогональные единице.

Список литературы

[1] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977, 431 с.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973, 407 с.

[3] Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967, 624 с.

[4] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970, 351 с.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972, 496 с.

[6] Избранные главы анализа и высшей алгебры. – Л.: ЛГУ, 1981, 200 с.