

УДК 519.6,517.9

**ОБРАЗОВАНИЕ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ПУЗЫРЕЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ВРАЩАЮЩИХСЯ НЬЮТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП**

Михеев С.А., Цветков В.П.

Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.2010, после переработки 05.04.2010.

В работе доказано существование у ньютоновских быстро вращающихся политроп с индексом $n \geq 1.254$ областей, в которых плотность близка к нулю. Эти области (пузыри) имеют кольцеобразную структуру. Проведена проверка выполнения граничных условий на поверхности пузыря. Подробно исследуется зависимость конфигурации пузырей от параметров сплюснутости e и быстроты вращения конфигурации ε . В случае уравнения состояния нерелятивистского вырожденного нейтронного газа ($n = 1.5$) получены ограничения на период вращения T конфигурации в области существования пузыря при произвольном значении ее массы m $11.579 \cdot 10^{-3} \text{сек} \leq T \cdot m/m_{\odot} \leq 11.917 \cdot 10^{-3} \text{сек}$.

In work existence at Newtonian polytropes rapidly rotating with an index $n \geq 1.254$ areas in which the density is close to zero is proved. These areas (bubbles) have ring-shaped structure. There was performed the check up of performance of the boundary conditions on a bubble surface. Explicitly association of a configuration of bubbles on parameters of flatness e and speed of rotation ε of a configuration is investigated. In the case of the equation of the condition nonrelativistic degenerate neutron gas ($n=1.5$) restrictions on period of rotation T of a configuration in the region of bubble existence are received at arbitrary value the configuration's mass m $11.579 \cdot 10^{-3} \text{s} \leq T \cdot m/m_{\odot} \leq 11.917 \cdot 10^{-3} \text{s}$.

Ключевые слова: кольцеобразный пузырь, ньютоновская политропа, полином, аппроксимация.

Keywords: ring-shaped bubbles, Newtonian polytropes, polynomial, approximation.

Введение

Вопрос о распределении плотности вещества в нейтронных звездах изучался во многих работах для различных уравнений состояния сверхплотной ядерной материи. Подробности этого рассмотрения можно найти в хорошо известных монографиях [1, 2].

Геометрия распределения плотности вращающихся нейтронных звезд (пульсаров) чрезвычайно важна при описании эволюции их периода, который измеряется в настоящее время с высокой степенью точности. Наблюдения в течение длительного времени за эволюцией периода вращения пульсаров дают уникальные

сведения о характере распределения в них вещества, возможных уравнений его состояния. Так небольшие скачки в распределении плотности пульсаров приводят к скачкам их периода [3].

Цель нашей работы - показать, что использование новых математических методов исследования вращающихся гравитирующих конфигураций, основанных на комплексе символьно-численных программ [4, 5], может привести к выявлению принципиально новых физических эффектов, а именно, возникновению кольцеобразных пузырей в распределении плотности этих конфигураций. Мы предполагаем, что уравнение состояния конфигурации хорошо приближается политропой. Этот эффект имеет место только в определенном интервале значений индекса политропы и угловой скорости вращения, и обусловлен неэллипсоидальным характером данной конфигурации.

В нашем подходе мы проводим вычисления в ньютоновском приближении. Релятивистские поправки будут учтены нами в дальнейшем на основе полученного в [6] уравнения. Как показывают проведенные нами оценки, влияние релятивистских поправок на конфигурации вращающихся политроп с малым индексом оказывается достаточно заметным [7].

Простой критерий применимости ньютоновского приближения вращающихся гравитирующих конфигураций в случае нерелятивистского нейтронного газа мы получим в данной работе.

Основные уравнения математической модели

Для описания ньютоновской вращающейся политропы возьмем за основу уравнение [5]:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{\mathbf{r}'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0(1+n)(\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} - 1) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = 0, \quad (1)$$

где $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, ρ - плотность конфигурации, ρ_0 - ее значение в центре, D - область R^3 , в которой $\tilde{\rho} \geq 0$, $\mathbf{r}_\perp = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $x_1 = x/a_1$, $x_2 = y/a_1$, $x_3 = z/a_3$, a_1, a_3 - полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации, $\varepsilon = \omega^2/(4\pi G\rho_0)$, ω - угловая скорость вращения, G - гравитационная постоянная, $K_0 = P_0/(2\pi G\rho_0^2 a_1^2)$, P_0 - давление в центре конфигурации.

Границу конфигурации δD находим из условия $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в R^3 . Эту границу δD будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [4]:

$$\delta D : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^L Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 1 \quad (2)$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида a_1, a_3 и коэффициенты Z_{ijk} находятся из условия минимизации функционала Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta D} \tilde{\rho}^2 d\Omega, \quad (3)$$

что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_3} = 0 \tag{4}$$

Система уравнений (1), (4) представляет собой замкнутую систему для нахождения $a_1, a_3, Z_{ijk}, \tilde{\rho}$.

Будем искать $\tilde{\rho}$ в виде полинома степени P :

$$\tilde{\rho} = \sum_{a,b,c}^P \tilde{\rho}_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c \tag{5}$$

Согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса на случай непрерывной функции трех переменных, заданной на компакте в R^3 , при достаточно большом выборе P выражение (5) аппроксимирует $\tilde{\rho}$ с любой степенью точности.

Неэллипсоидальность конфигурации в общем случае очевидна из формулы (5).

При решении всех уравнений мы будем применять метод наилучшего приближения всех функций координат полиномами степени P в метрике L_2 . В отличие от метода разложения в степенные ряды этот метод позволяет достичь намного большей точности при той же степени полинома, и не возникает необходимость условия малости коэффициентов при высших степенях координат.

Аппроксимируем $\tilde{\rho}^{1/n}$ многочленом второй степени по $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho}^{1/n} \cong \delta_0(n) + \delta_1(n)(\tilde{\rho} - 1) + \delta_2(n)(\tilde{\rho} - 1)^2 \tag{6}$$

Коэффициенты $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ находятся минимизацией уклонения правой и левой частей (9) в метрике L_2 . При этом:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{4n(n+2)}{(2n+1)(3n+1)}, & \delta_1 &= -\frac{4n(4n-7)}{(2n+1)(3n+1)}, \\ \delta_2 &= -\frac{20n(n-1)}{(2n+1)(3n+1)} \end{aligned} \tag{7}$$

Нас будет интересовать интервал значений $n: 1.25 \leq n \leq 1.5$. Погрешность аппроксимации при $n = 1.35$ составила $2.02 \cdot 10^{-2}$ в L_2 .

Рассмотрим конфигурации, являющиеся фигурами вращения. Тогда $\tilde{\rho}$ и δD имеют вид:

$$\tilde{\rho} = \sum_{a+b=0}^{a+b=P} \tilde{\rho}_{ab} r^a x_3^b \tag{8}$$

$$\delta D: \quad r^2 + x_3^2 + \sum_{i+j=2}^{i+j=L} Z_{ij} r^i x_3^j = 1$$

В (8) a, b, i, j - четные, а $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

При проведении дальнейших вычислений нам удобно считать $e = a_3/a_1$ свободным параметром, а $\varepsilon = \varepsilon(e)$ - вычисляемым. Тогда все искомые величины будут функциями e и n :

$$\tilde{\rho}_{ab} = \tilde{\rho}_{ab}(e, n); Z_{ij} = Z_{ij}(e, n); \varepsilon = \varepsilon(e, n); K_0 = K_0(e, n) \quad (9)$$

Для решения уравнения (1) нами составлен алгоритм, описанный в [4, 5] и реализованный в системе символьной математики MAPLE, позволяющий с использованием полиномов наилучшего приближения в L_2 получить систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\rho}_{ab}$, Z_{ij} , ε , K_0 :

$$H_l(\tilde{\rho}_{ab}, Z_{ij}, \varepsilon, K_0) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$N = \frac{1}{8}(P+2)(P+4) + \frac{1}{8}(L+2)(L+4)$$

Если $P = 6$, $L = 2$, то $N = 13$.

2. Результаты численных расчетов параметров модели

Численное решение (10) будем находить при фиксированных значениях параметров e и n . Для этого интервалы значений e , n разобьем на участки с шагами h_e и h_n соответственно:

$$e \rightarrow e_\mu = 1 - \mu h_e, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{0.75}{h_e} \right] \quad (11)$$

$$n \rightarrow n_\nu = 1.5 - \nu h_n, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{0.25}{h_n} \right]$$

Фиксируя $P = 6$, $L = 2$ и используя регуляризованный аналог метода Ньютона с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-6}$ [4] находим массив численных решений:

$$\tilde{\rho}_{ab}(e_\mu, n_\nu); Z_{ij}(e_\mu, n_\nu); \varepsilon(e_\mu, n_\nu); K_0(e_\mu, n_\nu) \quad (12)$$

Погрешность численного решения уравнения (1) оказалась порядка 10^{-3} в метрике L_2 .

Далее мы воспользовались пакетом *CurveFitting* системы MAPLE для аппроксимации полученных численных решений (12) многочленами по e и n восьмой и четвертой степеней соответственно. Погрешность этой аппроксимации оказалась порядка 10^{-5} в метрике L_2 , что намного превышает погрешность численного решения уравнения (1).

Графики используемых в дальнейшем функций $\tilde{\rho}_{20}(e, n)$, $\tilde{\rho}_{40}(e, n)$, $\tilde{\rho}_{60}(e, n)$, $\varepsilon(e, n)$, $K_0(e, n)$ представим на рисунках 1-4.

Из рисунков 1-3 видно, что коэффициенты $\tilde{\rho}_{ab}$ имеют сложный характер зависимости от e и n . Это в свою очередь указывает на сложность зависимости $\tilde{\rho}$ от координат r , $\eta = xze = z/a_1$.

Наиболее сложной оказывается структура $\tilde{\rho}$ в экваториальной плоскости $\eta = 0$. Введем обозначение $\tilde{\rho}_{eq}(r) = \tilde{\rho}(r, \eta = 0)$. Функция $\tilde{\rho}_{eq}(r)$ имеет следующий аналитический вид:

$$\tilde{\rho}_{eq}(r) = 1 + \tilde{\rho}_{20}(e, n)r^2 + \tilde{\rho}_{40}(e, n)r^4 + \tilde{\rho}_{60}(e, n)r^6 \quad (13)$$

Экваториальный радиус находится из условия $\tilde{\rho}_{eq}(r_{eq}) = 0$.

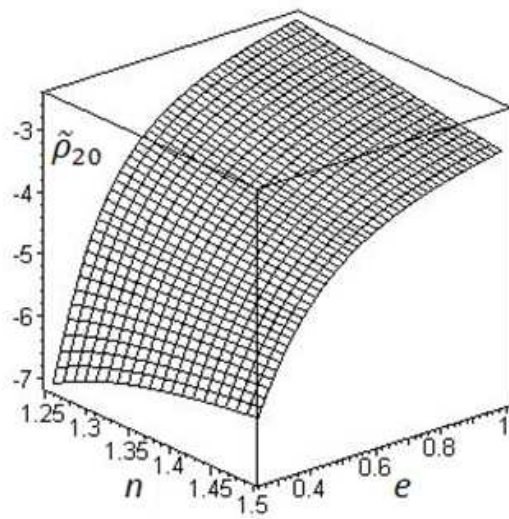


Рис. 1: График функции $\tilde{\rho}_{20}(e, n)$

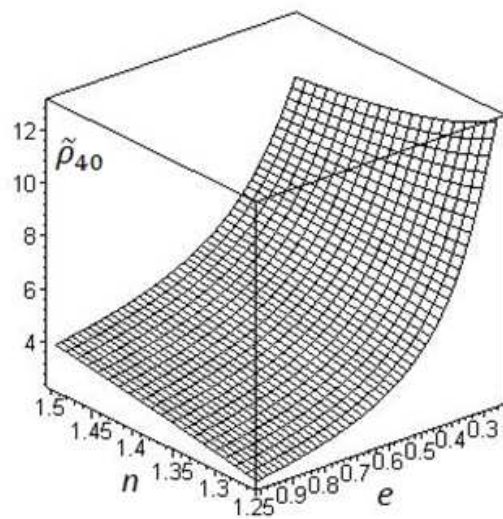


Рис. 2: График функции $\tilde{\rho}_{40}(e, n)$

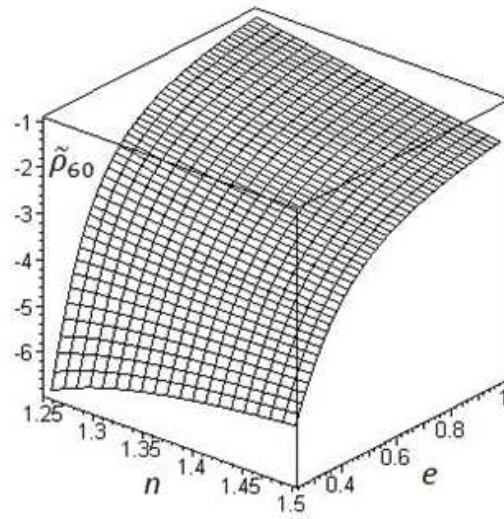


Рис. 3: График функции $\tilde{\rho}_{60}(e, n)$

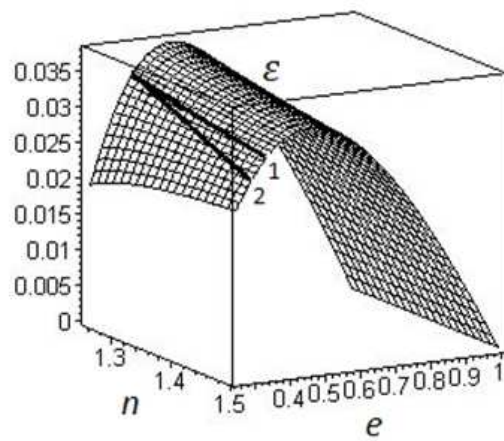


Рис. 4: График функции $\varepsilon(e, n)$

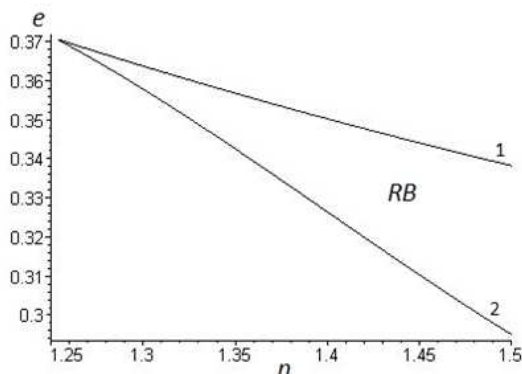


Рис. 5: Область значений параметров e, n существования конфигураций с кольцеобразным пузырьком (RB)

На рисунке 5 представлена найденная нами область значений параметров e и n в интервале $1.25 \leq n \leq 1.5$, где $\tilde{\rho}(r, \eta)$ представляет собой конфигурацию, внутри которой образуется область $\tilde{\rho}(r, \eta) = 0$, имеющая кольцеобразную форму. В дальнейшем эту область мы будем называть пузырьком.

Область RB (Region Bubble, рис. 5) на плоскости e, n имеет примерно форму клина. Вершина клина определена значениями $e_b = 0.3705, n_b = 1.2535$ и соответствует точке образования пузыря. Его зарождение происходит на кривой 1 (рис. 5) и при фиксированном n с уменьшением e размеры пузыря растут. При достижении предельной кривой 2 (рис. 5) пузырь достигает внешней поверхности конфигурации и происходит отрыв экваториального слоя от основной конфигурации.

3. О выполнении граничных условий на поверхности пузыря и физические причины его возникновения

Поскольку состояние пузыря является аномальным, плотность внутри его равна нулю, а вне отлична от нуля и растет по направлению внешней нормали к его поверхности, то рассмотрим более подробно и детально вопрос о выполнении граничных условий на его поверхности. С этой целью на рисунке 6 приведем форму уровней постоянных значений функции плотности $\tilde{\rho}$ в области существования пузыря при $n = 1.4, e = 0.3480$. Жирной линией на рисунке изображено сечение поверхности $\tilde{\rho}(x_1, x_2 = 0, \eta) = 0$.

Данный рисунок указывает на сложный характер зависимости плотности от переменных η и r . На поверхности пузыря $\tilde{\rho} = 0$ плотность растет по направлению внешней нормали к его поверхности как видно из рисунка 6.

Сила, обусловленная градиентом давления, будет направлена по направлению внутренней нормали и уравновешивается разностью сил тяготения и центробежной.

На дальней от экватора поверхности пузыря сила тяготения превосходит по величине центробежную силу, а на ближней наоборот. Геометрия пузыря такова, что она и обеспечивает выполнение граничных условий. Пузырь образуется как

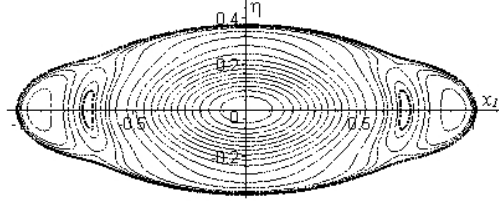


Рис. 6: Распределение относительной плотности $\tilde{\rho}(x_1, x_2 = 0, \eta)$ для случая $n = 1.4$, $e = 0.348$. На графике изображены линии уровня $\tilde{\rho} = 1 - 0.93i/14$, $i = 0, 1, 2, \dots, 14$; $\tilde{\rho} = 0.05(1 - j/4)$, $j = 1, 2, 3$; $\tilde{\rho} = (1 - k)/300$, $k = 0, 1$

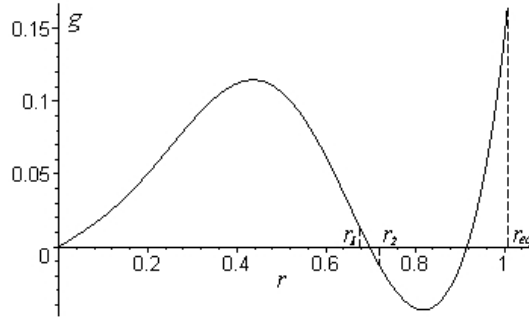


Рис. 7: График функции $g(r, x_3 = 0)$

раз в области, где гравитационная и центробежная силы в сумме дают малую величину.

Для более детального изучения ситуации с выполнением граничных условий проведем численные расчеты значения проекции вектора ускорения свободного падения g в плоскости экватора ($x_3 = 0$) на единичный вектор, направленный в центр конфигурации, определенного согласно (1) и (6):

$$g = -K_0 \frac{\partial}{\partial r} (\delta_0(n) + \delta_1(n)(\tilde{\rho} - 1) + \delta_2(n)(\tilde{\rho} - 1)^2) \quad (14)$$

Результаты расчетов g при тех же значениях $n = 1.4$, $e = 0.3480$ представим на рисунке 7.

Из рисунка видно, что на стенках пузыря в экваториальной плоскости ($r = r_1$ и $r = r_2$) ускорение свободного падения g имеет разные знаки и будет направлено по направлению к внешней нормали, и граничные условия очевидно выполняются. Далее при $r_{eq} > r > r_2$ снова знак g меняется с отрицательного на положительный $g(r_{eq}) > 0$ и снова граничные условия в точке экватора выполнены.

Отметим, что в центре пузыря (между r_1 и r_2) имеет место состояние невесомости $g = 0$. Отсюда следует принципиальное различие экстремально быстро вращающихся ньютоновских политропов с индексами $n > 1.25$ и $n < 1.25$. В первом случае

точка невесомости $g = 0$ возникает внутри конфигурации, а во втором случае на экваторе.

Остановимся более подробно на физическом механизме возникновения состояния пузыря. Как уже нами отмечалось необходимым условием его возникновения является выполнение условия $g(r) \leq 0$ при $r < r_{eq}$. Точка невесомости $g(r_0)=0$ появляется в случае $n = 1.4$ при $e = 0.5105$. Причем для этого случая r_0 оказывается порядка 0.7 и плотность конфигурации достаточно медленно изменяется в области $r_0 < r < r_{eq}$.

Гравитирующая масса, заключенная между $0 \leq r \leq r_0$, притягивает вещество в точке r_0 к центру конфигурации, а заключенная между $r_0 \leq r \leq r_{eq}$ и центробежная сила действуют в противоположном направлении. В результате возникает в точке r_0 состояние невесомости, и $\tilde{\rho}(r)$ имеет локальный минимум в r_0 согласно формуле (14).

Очевидно, что сила давления будет направлена к точке r_0 , как бы противодействуя возникновению локального минимума, а суммарная гравитационная и центробежная сила направлена от точки r_0 , наоборот, способствует возникновению и увеличению этого минимума.

С уменьшением e до 0.3502 и, соответственно, увеличением угловой скорости вращения происходит вытяжение конфигурации в плоскости экватора и уменьшение значения $\tilde{\rho}(r_0)$ до нуля. Достигается кривая 1 (рис. 5). Величина силы давления при этом уже не в состоянии удержать вещество в точке r_0 . Дальнейшее уменьшение параметра e приводит к превосходству суммарной гравитационной и центробежной силы, направленной от точки r_0 , над силой давления в некоторой достаточно малой области с центром в r_0 , и вещество уходит из этой области. Возникает пузырь, на границе которого естественно уже имеет место баланс сил.

Как хорошо видно из рисунка 6, дальняя от экватора стенка пузыря выпукла, а ближняя к экватору вогнута. Это указывает на то, что в первом случае доминирует гравитационная сила, направленная к центру конфигурации, а во втором центробежная, направленная от центра.

При дальнейшем уменьшении e центробежная сила увеличивается, раздувая пузырь, и при достижении кривой 2 (рис. 5) происходит выход поверхности пузыря на основную поверхность конфигурации и отрыв экваториального слоя от основной конфигурации.

4. Оценки параметров конфигурации в области существования пузыря

Оценим значения параметра быстроты вращения в области образования пузыря RB . Они заключены между кривыми 1 и 2 на поверхности графика функции $\varepsilon(e, n)$, представленного на рисунке 4.

Из рисунка 4 видно, что в области RB $\varepsilon_{max} = 0.0306$ и соответствует точке зарождения пузыря, а $\varepsilon_{min} = 0.0276$.

В случае уравнения состояния нерелятивистского вырожденного нейтронного газа ($n = 1.5$) проведем оценку периода вращения конфигурации в области RB при фиксированной массе m конфигурации. Из рисунка 5 имеем $e_{max} = 0.338$, а $e_{min} = 0.295$. В этих точках при $m = m_{\odot}$ $T(e = e_{max}) = 11.579 \cdot 10^{-3}$ сек, $T(e = e_{min}) = 11.917 \cdot 10^{-3}$ сек, что соответствует периодам миллисекундных пульсаров.

При произвольной массе m конфигурации период вращения T при том же уравнении состояния в области RB будет удовлетворять неравенству $11.579 \cdot 10^{-3} \text{сек} \leq T \cdot m/m_{\odot} \leq 11.917 \cdot 10^{-3} \text{сек}$.

Условие малости релятивистских поправок [6] в области $0.295 \leq e \leq 1$ для конфигурации вращающегося вырожденного нерелятивистского нейтронного газа приводит к критерию применимости ньютоновского приближения в этом случае $0.1(m/m_{\odot})^{4/3} \ll 1$, в который входит масса конфигурации, а не значение центральной плотности ρ_0 . Это соотношение более удобно для оценок, так как ρ_0 зависит от значения e при $m = \text{const}$. Из полученного нами критерия следует область значений масс нейтронных звезд m меньше или порядка m_{\odot} , для которых вполне можно использовать приближение ньютоновской политропы если ее индекс близок к 1.5.

Область пузыря расположена на расстоянии примерно $(0.6 - 0.7)r_{eq}$ от оси вращения. Вследствие этого момент инерции конфигурации может заметно возрасти при образовании пузыря, и из сохранения углового момента может увеличиться период. И наоборот, при схлопывании пузыря период должен уменьшаться. Предполагается детальное исследование этого вопроса в дальнейших работах авторов. Таким образом наблюдение эволюции миллисекундных пульсаров с периодом $T \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{сек}$ может дать информацию о возможности образования в них пузырей.

Аналогичный эффект может иметь место и для быстровращающихся белых карликов.

Заключение

В работе для решения уравнения, описывающего вращающиеся ньютоновские политропы с индексом n из интервала $1.254 \leq n \leq 1.5$, разработан и реализован комплекс символьно-численных программ. В результате, с использованием многочленов наилучшего приближения в L_2 , получено аналитическое представление приближенного решения $\tilde{\rho}$ в виде многочленов степени 8 и 4 по параметрам e и n соответственно и степени 6 по координатам.

Найдена область значений параметров e и n , в которой решение $\tilde{\rho}$ представляет собой конфигурацию с кольцеобразным пузырем. Показано, что она имеет клиновидную форму с вершиной в точке (e_b, n_b) .

Обсуждается вопрос о возможности влияния пузыря на эволюцию периода конфигурации.

Получен простой критерий применимости ньютоновского приближения в случае вращающихся конфигураций нерелятивистского вырожденного нейтронного газа.

Список литературы

- [1] Г.С. Саакян. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. М., Наука, 1972.
- [2] С. Шапиро, С. Тюкольский. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч.1-2, М.: Мир, 1985.

- [3] Р. Манчестер, Дж. Тейлор. Пульсары. М.: Мир, 1980.
- [4] Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстро вращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. Мат. моделирование, 2006, т. 118, №3, с. 103-119.
- [5] Михеев С.А., Цветков В.П. Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политропов с показателем близким к единице. Письма в ЭЧАЯ, 2008, т. 5, №4(146), с. 675-687.
- [6] Цветков В.П. Релятивистские эффекты в теории гравитирующих быстро вращающихся сверхплотных конфигураций. Письма в ЭЧАЯ, 2007, т. 4, №5(141), с. 661-667.
- [7] Михеев С.А., Цветков В.П. Влияние релятивистских эффектов на точки бифуркации намагниченных вращающихся гравитирующих конфигураций. RUSGRAV-13. Тезисы докладов. Москва, РУДН, 2008, с. 139-140.