

УДК 519.854.2

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ  
НА МАЛОМ ПРЕДПРИЯТИИ**

**Арендателева С.И.**

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,  
г. Великий Новгород

---

*Поступила в редакцию 25.12.2009, после переработки 10.03.2010.*

---

Рассматривается математическая модель производственного планирования на малом предприятии, позволяющая автоматизировать построение оптимальных производственных расписаний, а также исследовать динамику движения производства на все стадиях изготовления продукции.

A mathematical model of production planning for small enterprises to automate the construction of optimal production schedules, as well as explore the dynamics of the movement of production at all stages of manufacturing.

**Ключевые слова:** теория расписаний, эвристический алгоритм, моделирование, оптимизация, критерии оптимизации, производственное планирование.

**Keywords:** scheduling theory, heuristics, modeling, optimization, optimization criteria, production planning.

## **Введение**

Моделированию производственной деятельности малых предприятий в настоящее время не уделяется достаточного внимания, в основном исследования касаются вопросов маркетинга, стратегического планирования или снабжения. Поэтому разработка адекватных математических моделей производственного планирования с учетом особенностей малого бизнеса в настоящее время достаточно актуальна [1].

Представленная в статье модель производственного планирования для малых предприятий: во-первых, осуществляет оптимизацию планов производства; во-вторых, позволяет исследовать динамику производства на всех стадиях изготовления продукции; в-третьих, дает возможность анализировать механизмы воздействия на производство различного рода внешних и внутренних факторов; в-четвертых, практически реализуема и малозатратна при внедрении на предприятии. Таким образом, использование рассматриваемой модели обеспечит взаимодействие элементов управляемого объекта для достижения конечных результатов

производства, характеризующих строгое выполнение утвержденного плана выпуска продукции по номенклатуре и количеству при максимальном сокращении длительности производственного цикла, минимизации запасов и объемов незавершенного производства, рациональном использовании производственных мощностей.

### 1. Постановка задачи

Предлагаемая модель соответствует следующим условиям. Предприятие производит  $z$  видов продукции,  $z = 1, 2, \dots, n$ , обладая ограниченным объемом оборотных средств. Известны нормы затрат каждого из  $\beta$ -ых видов ресурсов на производство единицы  $z$ -ой продукции  $A = \{N_{\beta z}\}$ , а также цены и тарифы по которым осуществляет поставка ресурсов предприятию  $C = \{C_{\beta z}\}$ . Объемы производства каждого вида продукции ограничены производственными мощностями  $PM_z$ .

Ставится задача разработки оптимального плана производства с точки зрения минимизации длительности производственного цикла, при условии минимизации потребности в оборотных средствах, вложенных в производство:

$$\sum_{k=1}^{n_k} T_{ck} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{\omega=1}^T C_k (t_o + \omega) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $\sum_{k=1}^4 C_k$  — сумма оборотных средств, вложенных в производство за период  $T$ .

Оптимизация производственного расписания требует дальнейшей детализации решения задачи [3]. Будем считать, что на данном производственном участке на  $p$  единицах оборудования ( $p = 1, 2, \dots, n_p$ ), объединенного в группы, изготавливается  $m$  партий деталей  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Изготовление партии  $d_i$  состоит в выполнении  $m_i$  операций  $g_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_i$ . Количество и характер операций определяется заданным технологическим маршрутом:

$$M_i = \{g_{i_1,p}, g_{i_2,p}, \dots, g_{i_{m_i},p}\}.$$

Функциональная зависимость  $T_i = \varphi(a_i)$  времени обработки партии от числа деталей  $a_i$  в партии  $d_i$  задается выражением:

$$T_i = \sum_{j=1}^{m_i} t_{ij} = \sum_{j=1}^{m_i} (t_{ij}^n + a_i t_{ij}^{int}), \quad (3)$$

где  $t_{ij}$  — длительность выполнения операции  $g_{ij}$  над партией деталей,  $t_{ij}^n$  — подготовительное время,  $t_{ij}^{int}$  — продолжительность выполнения операции  $g_{ij}$  над одной деталью из партии.

Совокупность чисел  $G = \{\tau_{ijp}^s\}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ), где  $\tau_{ijp}^s$  — момент начала выполнения операции  $g_{ij}$  на  $p$ -ом оборудовании, в дальнейшем будем называть расписанием работы производственного участка или план-графиком. Вариант расписания  $G^{(l)}$  будем считать допустимым, т.е. соответствующим условиям

организации производственного процесса на моделируемом объекте, если выполняются следующие ограничения:

$$\tau_{ijp}^{e(l)} = \tau_{ijp}^{s(l)} + t_{ij}, \quad (4)$$

$$\tau_{i_1, j_1, p_1}^{s(l)} + t_{i_1, j_1} > \tau_{i_2, j_2, p_1}^{s(l)} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{ijp_1}^{s(l)} \geq \tau_{i, j-1, p_2}^{s(l)} + c_{ij} \\ \tau_{ijp_1}^{e(l)} \geq \tau_{i, j-1, p_2}^{e(l)} + c_{ij} + (t_{ij}^{(l)} - t_{i, j-1}^{(l)}) \end{array} \right\}, \text{ если } t_{i, j-1} \leq t_{ij}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{ijp_1}^{s(l)} \geq \tau_{i, j-1, p_2}^{s(l)} + (t_{i, j-1}^{(l)} - t_{ij}^{(l)}) + c_{ij} \\ \tau_{ijp_1}^{e(l)} \geq \tau_{i, j-1, p_2}^{e(l)} + c_{ij} \end{array} \right\}, \text{ если } t_{i, j-1} > t_{ij}, \quad (7)$$

где  $\tau_{ijp}^{e(l)}$  — момент окончания выполнения операции  $g_{ij}$  на  $p$ -ом оборудовании в  $l$ -ом варианте плана;  $c_{i, j}$  — минимально возможный интервал времени между началом (при  $t_{i, j-1} \leq t_{ij}$ ) или окончанием (при  $t_{i, j-1} > t_{ij}$ ) выполнения предыдущей и последующей операций в  $l$ -ом варианте плана.

Следует отметить, что нет смысла добиваться строгой аналитической формулировки некоторых ограничений, особенно отражающих динамические зависимости, например, ограничение на одновременную переналадку оборудования или загрузку оборудования в некоторые периоды времени, т.к. алгоритмическое соблюдение ограничений, сформулированных словами, не вызывает никаких трудностей.

Задачей  $S$  на предложенной модели будем называть любую конкретную совокупность данных:

$$n, \{n_p\}, \quad (p = 1, 2, \dots, n_p);$$

$$m, \{m_i\}, \{a_i\}, \{t^s\}, \{t^e\}, \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\{\tau_{ijp}^s\}, \{t_{ij}^n\}, \{t_{ij}^{\text{шт}}\}, \{\hat{t}_{ij}\}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m_i; i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $t^s, t^e$  — моменты начала и окончания заданного интервала планирования, соответственно;  $\hat{t}_{ij}$  — длительность выполнения операции  $g_{ij}$  над транспортной партией.

Множество  $G = \{G^{(l)}\}$  будем называть областью допустимых решений задачи  $S$ . Решение считается оптимальным  $G_{opt} \in G$ , если

$$F(G_{opt}) = \max_l F(G^{(l)}) \text{ или } F(G_{opt}) = \min_l F(G^{(l)}),$$

Уточним записанный ранее критерий (1):

$$F_1(G^{(l)}) = \min_G \left( \max_i \tau_{im_i}^{e(l)} \right), \quad (8)$$

Введем дополнительные критерии оптимизации:

$$F_1(G^{(l)}) = \min_G \sum_{i=1}^m \left( t_i^{ep} - \tau_{im_i}^{e(l)} \right), \quad (9)$$

$$F_3(G^{(l)}) = \min_G \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} (\tau_{i,j+1}^{s(l)} - \tau_{ij}^{e(l)}), \quad (10)$$

$$F_4(G^{(l)}) = \max_G \left( \frac{1}{F_p^{\max}} \sum_i^m \sum_j^{m_i} t_{ijp} \right). \quad (11)$$

Оптимизация будет проводиться одновременно по всем приведенным критериям. Критерий минимизации производственного цикла (8) коррелирует с расходами на обработку деталей и сокращением оборотных средств, т.к. с уменьшением периода выполнения заданной производственной программы происходит сокращение длительности выполнения заказов, уменьшение простоев оборудования, объема незавершенного производства, а, следовательно, и его стоимости. Очевидно практическое значение критериев минимизации суммарного «пролеживания» деталей в ожидании обработки (10) и максимальной загрузки оборудования (11), т.к. расписание однозначно определяет продолжительность и расположение интервалов «пролеживания» деталей и простоев каждой единицы оборудования, характер которых влияет на оценку расписаний.

Сокращение длительности производственного цикла обеспечивает параллельно-последовательный вид движения, при котором на следующую операцию передается часть партии (транспортная подпартия) [4]. Ограничения (6), (7) в этом случае рассматриваются с учетом возможных вариантов расчета величины  $c_{ij}$ :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } t_{ij} \geq t_{i,j-1} \text{ и } t_{ij}^n \geq t_{i,j-1}^n + \hat{t}_{i,j-1} \\ t_{i,j-1}^n + \hat{t}_{i,j-1} - t_{ij}^n, & \text{если } t_{ij} \geq t_{i,j-1} \text{ и } t_{ij}^n < t_{i,j-1}^n + \hat{t}_{i,j-1} \\ \hat{t}_{ij}, & \text{если } t_{ij} < t_{i,j-1} \text{ и } t_{ij}^n \geq t_{i,j-1}^n + \hat{t}_{i,j-1} - t_{i,j-1} + t_{ij} - \hat{t}_{ij} \\ t_{i,j-1}^n + \hat{t}_{i,j-1} - t_{i,j-1} + t_{ij} - t_{ij}^n, & \\ \text{если } t_{ij} < t_{i,j-1} \text{ и } t_{ij}^{n3} < t_{i,j-1}^{n3} + \hat{t}_{i,j-1} - t_{i,j-1} + t_{ij} - \hat{t}_{ij}. & \end{cases}, \quad (12)$$

Целевая функция выражается коэффициентом параллельности  $K_{\text{пар}}$ , который определяется отношением времени протекания процесса при соблюдении принципа параллельности  $T_{\text{ц}}^{\text{пар}}$  к полной длительности производственного процесса  $T_{\text{ц}}$  при последовательном движении деталей:

$$k_{\text{пар}} = \frac{T_{\text{ц}}^{\text{пар}}}{T_{\text{ц}}} \rightarrow \min. \quad (13)$$

Коэффициент параллельности расписаний, полученных при исследованиях на модели составил:  $k_{\text{пар}(0)} = (0,60 \div 0,62)$  — без ограничения на переналадки оборудования;  $k_{\text{пар}(1)} = (0,88 \div 0,89)$  — с ограничением на одновременную переналадку оборудования;  $k_{\text{пар}(2)} = (0,58 \div 0,60)$  — с ограничением на три и более переналадки. Возможно повышение данных коэффициентов в реальных производственных условиях, но в любом случае параллельно-последовательный способ движения производства дает значительное сокращение длительности производственного цикла.

## 2. Обоснование применения эвристического алгоритма для построения модели

В основу разработки расчетных модулей производственного расписания положен эвристический алгоритм. Необходимость выбора эвристического алгоритма объясняется как  $NP$ -трудностью задачи построения расписания [3], так и требованием адекватности математической модели специфическим особенностям производства на малом предприятии.

Практическое значение понятия  $NP$ -трудности состоит в следующем: такие задачи по существу труднорешаемы с вычислительной точки зрения, они не поддаются эффективному алгоритмическому решению, и для алгоритма, корректно решающего  $NP$ -трудную задачу, потребуется экспоненциальное количество времени и, следовательно, он будет применим на практике к очень малым задачам. Эвристические алгоритмы могут быть достаточно эффективными, и при правильном подборе используемых эвристических правил (приоритетов, правил предпочтения) дают достаточно близкие к оптимальному расписания [2].

Рассматриваемая задача планирования не ставится как экстремальная. Требование нахождения оптимума  $G_{opt}$  для реальных задач планирования заменяется, например, требованием найти такое  $G^{(l)}$ , что  $F(G^{(l)}) \leq F^*$ , где  $F^*$  — некоторое пороговое значение  $F(G^{(l)})$ . Решением задачи будет любой допустимый вариант  $G^{(l)} \in G$ . Например, единственным требованием к расписанию для малого предприятия может быть выполнение всего комплекса операций в течение заданного планового периода  $T$ .

Таким образом, ставится проблема выработки алгоритма определения  $G^{(l)} \in G$ , заключающегося в реализации пошагового динамического процесса последовательной фиксации значений  $\tau_{ijp}^{s(l)}$  в качестве моментов выполнения соответствующей операции  $g_{ijp}$  с максимальным значением функции предпочтения, если на  $s$ -м шаге, которому соответствует момент времени  $t_s^{(l)}$ , выполняется ряд условий, удовлетворяющих ограничениям задачи. В отличие от точных методов, например, симплекс-метода или регулярных приближенных алгоритмов, в процессе решения с помощью функций предпочтения аналитическое выражение критерия оптимальности фактически не используется. Функции предпочтения являются лишь средством, направляющим процесс решения задачи планирования по определенному пути.

Анализ публикаций показывает, что не существует единой функции предпочтения, обеспечивающей получение близких к оптимальному графиков для любого характера рассматриваемых технологических маршрутов, любого производственного объекта и любого критерия оптимизации. В модели используются следующие правила предпочтения (эвристики): выбор работы в порядке ее поступления; выбор работы с наибольшим значением приоритета; выбор работы с наибольшим (наименьшим) номером; правило особых признаков (в качестве признака может быть срок изготовления детали, важность, вес, габаритные размеры); выбор работы с наибольшей (наименьшей) длительностью; выбор работы с наибольшим (наименьшим) числом операций; выбор операции с той же меткой, что и предыдущая; выбор операции с минимальным ожиданием следующей операции; выбор операции с более поздней стадией обработки; выбор оборудования с наибольшим (наименьшим) временем ожидания операции. Следует отметить, что часть эври-

стик позволяет не только оптимизировать план по рассмотренным выше критериям, но и учитывать специфику производства.

### 3. Построение модели

Для решения задачи планирования рассматривается реальный календарь времени. Расписание (план-график) формируется на отрезке времени  $T = \{t_o; t_p\}$  (назовем его горизонтом планирования), где  $t_o$  — текущий момент,  $t_p$  — некоторая дата в будущем, для которой данный план разрабатывается. Горизонт планирования должен включать в себя следующие интервалы, каждый из которых может иметь произвольную длительность (от одного дня):  $\Delta t_m = \{t_m^s; t_m^e\}$  — интервал заказов и поставок производственных запасов;  $\Delta t_d = \{t_d^s; t_d^e\}$  — выполнение заготовительных операций;  $\Delta t_p = \{t_p^s; t_p^e\}$  — выполнение сборочных работ. На этапе разработки план-графиков применяется непрерывная модель времени: операция может начаться и закончиться в любой момент, заданный с определённой точностью. Процесс планирования ведётся в порядке, обратном ходу производственного процесса:  $\Delta t_p \rightarrow \Delta t_d \rightarrow \Delta t_m$ . Исходной точкой расчетов является момент выпуска готовой продукции. Установка моментов начала и окончания каждого из интервалов производится в интерактивном режиме.

Оценка план-графиков на интервалах  $\Delta t_p$ ,  $\Delta t_d$  выполняется по заданным критериям оптимизации. Оценка общего производственного плана осуществляется проверкой условия:

$$t_o \leq \min_{\beta} \left\{ \min_{ij} \tau_{ij\beta}^{s(l)} - t_{\beta} \right\} \quad (14)$$

$\beta = 1, 2, \dots, b; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m_i,$

где  $\tau_{ij\beta}^{s(l)}$  — момент начала использованием  $\beta$ -го производственного запаса в  $l$ -ом варианте плана;  $t_{\beta}$  — период заказа и поставки  $\beta$ -го производственного запаса.

При соблюдении условия (14) план выполним. В противном случае требуется корректировка исходных данных или параметров планирования. В процессе выполнения плана возможно перепланирование, но необходима оценка доступности производственных запасов (при  $t_o \in \{t_m^s; t_m^e\}$ ), или оценка доступности всех ресурсов (при  $t_o \in \{t_p^s; t_p^e\}$ ). Основные лимитирующие факторы: фонды времени работы оборудования и длины технологических маршрутов. Для оценки влияния фондов времени оборудования на выполнение планового задания, необходимо вычислить  $K_{\text{заг,р}}^{(l)}$  коэффициент загрузки оборудования плановым заданием. Если  $K_{\text{заг,р}}^{(l)} > 1$ , то имеет место абсолютная нехватка фондов времени оборудования. В этом случае надо либо уменьшить плановое задание, либо увеличить фонды времени оборудования. Эти коэффициенты позволяют определить наиболее загруженные участки плана.

К основным этапам построения модели относятся следующие.

- Формирование управляющих величин модели, таких как, производственная программа выпуска, планы запуска изделий (деталей) по интервалам планирования, минимальный размер партии запуска, потребность в производственных запасах и др.

- Построение план-графиков, определяющих какая операция, в какой момент времени должна выполняться на данной единице оборудования, а также на каком оборудовании и в какое время будут осуществляться переналадки.
- Формирование плана заказа производственных запасов, согласованного с результатами предыдущего этапа.
- Анализ процесса движения производства во времени. На данном этапе используется дискретная модель с разбиением оси времени на фиксированные периоды.
- Для решения поставленных задач строится динамическая компьютерная модель производства.

#### 4. Оптимизация управляющих величин модели

Оптимальность общего плана обеспечивается не только заданными критериями, но и оптимизацией управляющих величин модели.

Одна из важнейших управляющих величин модели — программа выпуска продукции  $P_z$ , где  $z$  — вид продукции по номенклатуре,  $z = 1, 2, \dots, n$ . Задание программы выпуска продукции в плановом периоде является исходным пунктом всех расчетов по модели. Начальная программа формируется путем обработки статистических данных об объемах реализации продукции  $P_{zt}$  в течение предшествующих плановому периодов. Полученные данные аппроксимируются с последующей экстраполяцией на планируемый период времени  $T$ . Основное внимание при этом уделяется статистическим методам экстраполяции, в частности, рассматриваются методы аналитического выравнивания и экспоненциального сглаживания с учетом сезонных факторов. Сезонный компонент имеет место практически в любой отрасли промышленности, поэтому в прогнозные модели включены аддитивные  $g_{zt}$  и мультипликативные  $f_{zt}$  сезонные составляющие:

$$P_{zt} = tr_{zt} + g_{zt} + \varepsilon_{zt}, \quad P_{zt} = tr_{zt} \cdot f_{zt} \cdot \varepsilon_{zt}, \quad z = 1, 2, \dots, n,$$

где  $P_{zt}$  — объем реализации продукции вида  $z$  в момент  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ ;  $tr_{zt}$  — тренд;  $\varepsilon_{it}$  — случайная компонента, подчиняющейся некоторому вероятностному закону. Фактически функции  $g_{zt}$  и  $f_{zt}$  определяются своими значениями на периоде длины  $T$ :  $g_1, \dots, g_T$ ;  $f_1, \dots, f_T$ . Для однозначности параметризации модели предполагаем, что  $g_1 + \dots + g_T = 0$  и  $f_1 \cdot \dots \cdot f_T = 1$ . Сезонные компоненты рассматриваются в системе прогнозирования объемов реализации продукции как периодические функции с бесконечной областью определения, и в таком качестве могут участвовать в любых арифметических операциях над временными рядами.

Согласно методу наименьших квадратов, неизвестные параметры аппроксимирующих функций находятся, исходя из условия:

$$\sum_{t=1}^n [P_{zt} - \varphi(t, a, b, c, \dots)]^2 = \min.$$

В результате исследований, проведенных на статистических данных малого предприятия с 2006 по 2009 гг., наибольшую точность получила аддитивная полиномиальная регрессионная модель второй степени:

$$\hat{P}_{z,t+k} = at^2 + bt + c + g_{zt}.$$

Выбор полиномиальной модели второй степени объясняется влиянием на деятельность предприятия мирового финансового кризиса. Относительная средняя ошибка  $|\bar{\delta}|$  (Mean Absolute Percentage Error) ретроспективных прогнозов по всем видам продукции, выпускаемой на предприятии, составила в среднем 4,63%, что свидетельствует о высокой точности прогноза.

$$|\bar{\delta}| = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{P}_{zt} - P_{zt}}{P_{zt}} \right|.$$

Аддитивная модель оказывается более предпочтительной в случае, когда сезонная вариация с ростом уровней остается приблизительно неизменной.

Достаточно высокую точность показала также адаптивная модель экспоненциального сглаживания (модель Тейла-Вейджа):

$$\hat{P}_{z,t+k} = (S_{zt} + \tau \cdot b_{zt}) + g_{z,t+\tau-T},$$

$$S_{zt} = \alpha (P_{zt} - g_{z,t-T}) + (1 - \alpha) (S_{z,t-1} + b_{z,t-1}),$$

$$b_{zt} = \gamma (S_{z,t-1} + b_{z,t-1}) + (1 - \gamma) b_{z,t-1},$$

$$g_{zt} = \beta (P_{zt} - S_{zt}) + (1 - \beta) g_{z,t-T},$$

где  $S_{zt}$  — сглаженное значение фактического уровня;  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры сглаживания ( $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$ );  $g_{zt}$  — сглаженное значение фактора сезонности.

Точность  $|\bar{\delta}|$  по модели Тейла-Вейджа не превысила 10%. Применение адаптивных моделей объясняется динамичностью рыночных условий.

В модели предусмотрено также статистическое моделирование других величин, например, величины страховых запасов, цены материалов, готовой продукции.

На основе полученных значений  $P_z$  ( $z = 1, 2, \dots, n$ ) рассчитываются следующие показатели планового периода  $T$ .

1) План запуска изделий в производство в плановый период  $PR_z$ :

$$PR_z = P_z + S_z - R_z(t_c) - RP_z(T-1) + DF_z + \sum_{j=1}^{m_z} CH_{zj}, \quad z = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

где  $P_z$  — производственная программа выпуска продукции;  $S_z$  — страховой запас изделий;  $R_z$  — остатки изделий на складе;  $RP_z$  — резерв планирования;  $DF_z$  — производственный брак продукции;  $\sum_{j=1}^{m_z} CH_{zj}$  — число изделий для наладки оборудования.

Изделия запускаются в обработку партиями:



$$\sum_{e=1}^{d_z} q_{ez} = PR_z \text{ при } q_z^{\min} \leq q_{ez} < q_z^{\max}, \quad e_z = 1, 2, \dots, d_z, \quad (16)$$

где  $q_{ez}$  — количество  $z$ -ых изделий в партии.

Максимально допустимое число изделий в партии определяется стойкостью инструмента. В качестве критерия при установлении величины минимально допустимого размера партии принято соотношение между подготовительным и общим временем занятости оборудования данной операцией:

$$q_z^{\min} = \max q_z \{ t_{zj}^n, t_{zj}^{\text{шт}}, \alpha_{ij}^{\text{opt}} \}, \quad j = 1, 2, \dots, n_z, \quad (17)$$

где  $\alpha_{zj}^{\text{opt}}$  — коэффициент переналадки на  $j$ -ой операции  $z$ -го изделия.

2) План запуска в производство деталей  $i$ -го вида, соответствует потребностям сборки всей номенклатуры продукции,  $PR_i$ :

$$PR_i = \sum_{z=1}^n PR_z \cdot N_{iz} + S_i - R_i(t_o) - RP_i(T-1) + DF_i + \sum_{j=1}^{m_z} CH_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

где  $N_{iz}$  — норма расхода  $i$ -ых деталей на  $z$ -е изделие.

Корректировка плана осуществляется с учетом условия:

$$PR_i^{\min} \leq PR_i < PR_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Соотношение (15) запишем в виде:

$$PR_i^{\min} = \max PR_z \{ t_{ij}^n, t_{ij}^{\text{шт}}, \alpha_{ij}^{\text{opt}} \}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i$$

3) Объем производственных запасов  $\beta$ -го вида  $PM_{\beta z}$ , необходимый в планируемом периоде для производства продукции вида  $z$  в объеме  $\bar{P}_z$ :

$$PM_{\beta z} = \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{z=1}^n PR_z N_{i,z} \cdot N_{\beta i} + PR_z \cdot N_{\beta z}, \quad \beta = 1, 2, \dots, n_\beta, \quad (19)$$

где  $N_{\beta z}, N_{\beta i}$  — норма расхода  $\beta$ -го производственного запаса на  $z$ -е изделие,  $i$ -ую деталь, соответственно;  $n_\beta$  — общее число видов производственных запасов, используемых на предприятии при производстве различных видов продукции. Равенства  $N_{\beta i} = 0$  и  $N_{\beta z} = 0$  отражают то, что производственный запас вида  $\beta$  не используются при изготовлении продукции вида  $z$ .

4) Взаимосвязь между объемом выпускаемой продукции всех видов и объемом необходимых запасов в планируемом периоде:

$$PM_\beta = \sum_{i=1}^{m_i} PR_i \cdot N_{\beta,i} + \sum_{z=1}^{n_z} PR_z \cdot N_{\beta,z}, \quad \beta = 1, 2, \dots, b. \quad (20)$$

5) План заказа производственных запасов:

$$MR_\beta(t_{m\beta}^s) = PM_\beta + S_\beta - R_\beta(t_o), \quad \beta = 1, 2, \dots, b. \quad (21)$$

6) Момент заказа  $\beta$ -го производственного запаса в  $l$ -ом варианте плана  $t_{m\beta}^{s(l)}$ :

$$t_{m\beta}^{s(l)} = \min_{ij} \tau_{ij\beta}^{s(l)} - \Delta t, \quad (22)$$

$$\beta = 1, 2, \dots, b; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m_i.$$

## 5. Анализ движения производства

В модели расчеты по движению производства осуществляются на любой момент времени  $t_k$ . Предполагается, что  $\forall t_k \in \Delta t_d \cup \Delta t_p$ . При задании шага  $\Delta t$ , расчеты выполняются последовательно для каждого шага до момента  $t_k$ .

Обозначим  $P_z^{(l)}(t_k)$  — объем продукции вида  $z$ ,  $z = 1, 2, \dots, n$ , выпущенной на момент времени  $t_k$ ,  $D_i^{(l)}(t_k)$  — объем  $i$ -ых деталей, изготовленных на момент времени  $t_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$P_z^{(l)}(t_k) = \begin{cases} W_{zm_z,p}^{(l)}(t_k) = PR_{zm_z}^{(l)}, & \text{если } \tau_{zm_z,p}^{e(l)} \leq t_k; \\ \tilde{W}_{zm_z,p}^{(l)}(t_k) = \frac{t_k - (\tau_{zm_z,p}^{s(l)} + t_{zm_z}^n) - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{zm_z}^{u\pi}}, & \text{если } \tau_{zm_z,p}^{e(l)} > t_k \text{ и } \left( \tau_{zm_z,p}^{s(l)} + t_{zm_z}^n \right) \geq t_{k-1}; \\ \tilde{W}_{zm_z,p}^{(l)}(t_k) + P_z^{(l)}(t_{k-1}) = \frac{t_k - t_{k-1} - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{zm_z}^{u\pi}} + P_z^{(l)}(t_{k-1}), & \\ \tilde{W}_{zm_z,p}^{(l)}(t_k) + P_z^{(l)}(t_{k-1}) = \frac{t_k - t_{k-1} - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{zm_z}^{u\pi}} + P_z^{(l)}(t_{k-1}), & \text{если } \tau_{zm_z,p}^{e(l)} > t_k \text{ и } \left( \tau_{zm_z,p}^{s(l)} + t_{zm_z}^n \right) < t_{k-1}, \end{cases} \quad (23)$$

где  $W_{zm_z,p}^{(l)}(t_k)$  — количество  $z$ -ых изделий в партии, завершившей последнюю операцию;  $\tilde{W}_{zm_z,p}^{(l)}(t_k)$  — количество  $z$ -ых изделий, завершивших последнюю операцию;  $\Delta t'_{fp}$  — нерабочие промежутки времени  $p$ -го оборудования в интервале планирования.

$$D_i^{(l)}(t_k) = \begin{cases} W_{im_i,p}^{(l)}(t_k) = PR_{im_i}^{(l)}, & \text{если } \tau_{im_i,p}^{e(l)} \leq t_k; \\ \tilde{W}_{im_i,p}^{(l)}(t_k) = \frac{t_k - (\tau_{im_i,p}^{s(l)} + t_{im_i}^n) - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{im_i}^{u\pi}}, & \text{если } \tau_{im_i,p}^{e(l)} > t_k \text{ и } \left( \tau_{im_i,p}^{s(l)} + t_{im_i}^n \right) \geq t_{k-1}; \\ \tilde{W}_{im_i,p}^{(l)}(t_k) + D_i^{(l)}(t_{k-1}) = \frac{t_k - t_{k-1} - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{im_i}^{u\pi}} + D_i^{(l)}(t_{k-1}), & \\ \tilde{W}_{im_i,p}^{(l)}(t_k) + D_i^{(l)}(t_{k-1}) = \frac{t_k - t_{k-1} - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp}}{t_{im_i}^{u\pi}} + D_i^{(l)}(t_{k-1}), & \text{если } \tau_{im_i,p}^{e(l)} > t_k \text{ и } \left( \tau_{im_i,p}^{s(l)} + t_{im_i}^n \right) < t_{k-1}. \end{cases} \quad (24)$$

Объем деталей, находящихся в незавершенном производстве  $DW_i^{(l)}(t_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$DW_i^{(l)}(t_k) = D_i^{(l)}(t_k) + R_i(t_0) + R_i(T-1) - \left( \sum_{z=1}^n \sum_{j=1}^{n_j} W_{zj}^{(l)}(t_k) \cdot N_{i,zj} + \sum_{z=1}^n P_z^{(l)}(t_k) \cdot N_{iz} \right), \quad (25)$$

где  $N_{i,zj}$  — норма расхода  $i$ -ых деталей на  $j$ -ой операции  $z$ -го изделия.

Число единиц продукции, находящихся в незавершенном производстве

$$W_{i(z)j}^{(l)}(t_k), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad z = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m_{i(z)},$$

на момент времени  $t_k$ , соответствует состоянию на предыдущий момент, с учетом увеличения на объем поступивших на этот момент и уменьшения на величину выбывших к данному моменту:

$$W_{i(z)j}^{(l)}(t_k) = \begin{cases} PR_{i(z)j}^{(l)} - \tilde{W}_{i(z),j+1}^{(l)}(t_k), & \text{если } \tau_{i(z)jp}^{e(l)} \leq t_k; \\ \tilde{W}_{i(z)j}^{(l)}(t_k) - \tilde{W}_{i(z),j+1}^{(l)}(t_k) = \frac{(t_k - \tau_{i(z)jp}^{s(l)} + t_{i(z)j}^n - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp})}{t_{ij}^{inr}} - \tilde{W}_{i(z),j+1}^{(l)}(t_k), & \text{если } \tau_{i(z)jp}^{e(l)} > t_k \text{ и } (\tau_{i(z)jp}^{s(l)} + t_{i(z)j}^n) \geq t_{k-1}; \\ \tilde{W}_{i(z)j}^{(l)}(t_k) + W_{i(z)j}^{(l)}(t_{k-1}) - \tilde{W}_{i(z),j+1}^{(l)}(t_k) = \\ = \frac{(t_k - t_{k-1} - \sum_{f=1}^n \Delta t'_{fp})}{t_{ij}^{inr}} + W_{i(z)j}^{(l)}(t_{k-1}) - \tilde{W}_{i(z),j+1}^{(l)}(t_k), & \text{если } \tau_{i(z)jp}^{e(l)} > t_k \text{ и } (\tau_{i(z)jp}^{s(l)} + t_{i(z)j}^n) < t_{k-1}. \end{cases} \quad (26)$$

Расход производственного запаса  $MS_{\beta}^{(l)}(t_k)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, b$ , на момент  $t_k$ :

$$MS_{\beta}(t_k) = \sum_{i=1}^m D_i^{(l)}(t_k) \cdot N_{\beta,i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} W_{ij}^{(l)}(t_k) \cdot N_{\beta,ij} + \sum_{z=1}^n P_z^{(l)}(t_k) \cdot N_{\beta,z} + \sum_{z=1}^n \sum_{j=1}^{n_z} W_{zj}^{(l)}(t_k) \cdot N_{\beta,zj}, \quad (27)$$

Остаток производственного запаса на складе  $R_{\beta}(t_k)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, b$ , на момент  $t_k$ :

$$R_{\beta}(t_k) = M_{\beta}^{(l)}(t_k) + R_{\beta}(t_0) - MS_{\beta}^{(l)}(t_k), \quad (28)$$

где  $M_{\beta}^{(l)}(t_k)$  — объем  $\beta$ -го производственного запаса, поступившего на склад.

Перевод в стоимостное выражение рассчитанных соотношений производится умножением их на соответствующие показатели цены или производственной себестоимости единицы продукции по плану, что позволяет получить количество оборотных средств, связанных в производстве в момент времени  $t_k$ .

Минимизация общей суммы оборотных средств (2), требуемых для выполнения плана производства продукции за период  $T$  обеспечится при выполнении условий:

$$\sum_{\omega=1}^T PR_z(t_o + \omega) - \sum_{\omega=1}^T \overline{PR}_z(t_o + \omega) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{\omega=1}^T P_z(t_o + \omega) - \sum_{\omega=1}^T \bar{P}_z(t_o + \omega) = 0, \quad (30)$$

где  $\overline{PR}_z$  — фактический запуск изделий в производство;  $\bar{P}_z$  — фактический выпуск готовой продукции.

Сумма оборотных средств, вложенных в производство, включает: оборотные средства, вложенные в производственные запасы, руб.:

$$C_{1\Sigma} = \sum_{\beta=1}^b \left( \sum_{\omega=1}^T M_{\beta}^{(l)}(t_o + \omega) - \sum_{\omega=1}^T MS_{\beta}^{(l)}(t_o + \omega) + R_{\beta}(t_o) \right) \cdot C_{\beta}(T), \quad (31)$$

оборотные средства, вложенные в незавершенное производство  $\bar{C}_i$ , руб.:

$$C_{2\Sigma} = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\omega=1}^T D_i^{(l)}(t_o + \omega) + R_i(t_o) + R_i(T-1) - \sum_{z=1}^n \sum_{j=1}^{n_j} W_{zj}^{(l)}(t_k) \cdot N_{i,zj} + \sum_{z=1}^n P_z^{(l)}(t_k) \cdot N_{i,z} \right) \cdot \bar{C}_i(T), \quad (32)$$

оборотные средства, вложенные в готовую продукцию, руб.:

$$C_{3\Sigma} = \sum_{z=1}^n \sum_{\omega=1}^T P_z^{(l)}(t_o + \omega) \cdot \bar{C}_z, \quad (33)$$

оборотные средства, вложенные в запасы готовой продукции, руб.;

$$C_{4\Sigma} = \bar{C}_z \cdot \sum_{z=1}^n R_z(t_o) + RP_z(T-1), \quad (34)$$

где  $\beta$  — цена материала с учетом транспортно-заготовительных расходов;  $\bar{C}_z$  — производственная себестоимость единицы продукции по плану, руб.

Данная модель позволяет определить потребность в оборотных производственных фондах на любой момент времени планируемого периода.

## Заключение

В статье представлена модель оптимизации производственного планирования на малом предприятии. Программная реализация модели позволила автоматизировать процесс планирования и использовать результаты работы на реальном

предприятия. Внедрение разработанного программного комплекса на малом промышленном предприятии (ООО «Новгородский автоагрегатный завод»), выпускающем газовыхлопные системы для автомобилей, позволило добиться улучшения производственных показателей, значительно сократить количество оборотных средств, вложенных в производственные запасы и незавершенное производство, уменьшить производственный цикл, повысить уровень обслуживания клиентов. При этом эффект от внедрения несоизмерим с затратами на программное обеспечение, а накопленный опыт подготовки баз данных, взаимодействия различных специалистов при планировании, детальный анализ выполнения планов и динамики производства позволит предприятию перейти на более высокий уровень планирования.

### Список литературы

- [1] Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. Методы и модели управления фирмой. — СПб: Питер, 2001. — 432 с.
- [2] Танаев В.С., Ковалев М.Я., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Групповые технологии, Минск: Институт технической кибернетики НАН Белоруссии, 1998. — 290 с.
- [3] Теория расписаний. Конвей Р.В. Максвелл В.Л., Миллер Л.В. — Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. — 359 с.
- [4] Эвристические методы календарного планирования / Подчасова Т.П., Португал В.М., Татаров В.А., Шкурба В.В. — К.: Техніка, 1980. — 140 с.