УДК 330.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИЗИСНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫМИ ВРЕМЕННЫМИ КРИВЫМИ

Цветков И.В.
Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 30.11.2009, после переработки 25.02.2010.

В данной статье дан вывод основных уравнений математической модели кризисных экономических явлений, описываемых мультифрактальными временными кривыми. Эта модель включает в себя критические точки D_k, точки бифуркации D_b. Исследуется поведение решений уравнений модели вблизи данных точек.

In the given paper the urgency of build-up of mathematical model of the economic events featured by fractal temporary curves is considered. This model include the critical points D_k, bifurcations points D_b. Investigate the behavior of solution of equation nearby of this points.

Ключевые слова: мультифрактал, формула Тейлора, математическая модель.
Keywords: multifractal, Tailor forms, mathematical model.

1. Введение

Динамика любых экономических процессов обычно задается зависимостью основных параметров $y_1, y_2 ... .y_n$ этих процессов от времени, т.е. зависимостями $y_1(t), y_2(t) ... .y_n(t)$. Эти зависимости часто не описываются гладкими кривыми, а представляют собой фрактальные кривые [1, 2]. Фрактальную кривую на интервале $t \in [a, b]$ мы определим как непрерывную, но не гладкую кривую, длина которой зависит от масштаба усреднения δ по закону [1]:

$$L = L_0 \delta^{1-D}, \tag{1}$$

где D – значение фрактальной размерности кривой, характеризующая степень изрезанности ее графика. D принимает значения от 1 до 2.

Примером фрактальной кривой является график классического броуновского движения $x(t)$, который описывает непрерывную гладкую функцию с $D = 1,5$ [2].

Классическое броуновское движение представляет собой хорошую модель марковских случайных фракталов, для которых характерно отсутствие памяти. Но часто существует необходимость введения такого случайного процесса, который бы обладал некоторой памятью.

Такой процесс получил название фрактального броуновского движения (ФБД) и был исследован Мандельбротом и Ван Несом в 1968 году [3]. Они доказали существование ФБД с использованием стохастических интегралов.

ФБД удобно определить с помощью параметра H, $0 < H < 1$. При $H = \frac{1}{2}$ ФБД совпадают с классическим, причем, $D = 2 - H$.

В силу важности ФБД приведем более точное его определение.

Гауссовский процесс $X(t)$ называется ФБД с параметром H, если он обладает следующими свойствами [3]:

1) $X(0) = 0$ и функция $X(t)$ почти всегда непрерывна;

2) имеет место гауссовость приращений, т.е. $\Delta X = X(t_1) - X(t_2)$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 \left(t_2 - t_1\right)^{2H}$, где $t_2 > t_1$ и $\sigma > 0$:

$$P\left(\Delta X < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\left(t_2 - t_1\right)^H} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma\left(t_2 - t_1\right)^H}\right)\right)^2 du, \qquad (2)$$

где $P\left(\Delta X < x\right)$ — вероятность того, что $\left(\Delta X < x\right)$.

Очевидно, что при $H = \frac{1}{2}$ ФБД совпадает с классическим броуновским движением.

Для (2) имеет место одно важное свойство. Если $H > \frac{1}{2}$, то приращения $X\left(t\right) - X\left(0\right)$ и $X\left(t + h\right) - X\left(t\right)$ имеют одинаковые знаки, а при $H < \frac{1}{2}$ разные знаки, т.е. коэффициент корреляции в первом случае положителен, а во втором отрицателен. Это значит, что $X(t)$ будет расти в будущем, если она росла в прошлом $\left(H > \frac{1}{2}\right)$ и наоборот $\left(H < \frac{1}{2}\right)$ [3].

На наш взгляд модель ФБД хорошо может описывать реальные процессы лишь вблизи $H = \frac{1}{2}$, т.е. когда их характеристики не сильно отличаются от гауссовского процесса. Эта модель не в состоянии описывать кризисные явления, для которых характерно наличие критического значения фрактальной размерности D_k. Вблизи D_k значение основного параметра экономической системы может многократно изменяться.

Актуальность построения математической модели экономических явлений, описываемых фрактальными временными кривыми, и которая одновременно имела как достоинства модели ФБД при $D \simeq 1,5$, так и могла описать критические явления в настоящее время не вызывает каких-либо сомнений. Это в первую очередь связано с глобальным экономическим кризисом, моделирование процессов которого представляет большой интерес.

Многие процессы экономики имеют сложный характер и описываются мультифрактальными кривыми, т.е. когда их можно разбить на участки $i = 1, 2, 3..., N$, на которых значение фрактальной размерности $D_i = const$. Свойства самоподобия для участков с различными значениями фрактальной размерности очевидно не выполняются. На каждом из этих участков фрактальную кривую аппроксимируем линейной функцией (линейный тренд). Тангенс угла наклона графика линии тренда на каждом участке обозначим X_i.

В дальнейшем во всех формулах опускаем индекс i, т.е. положим $X_i = X\left(D\right)$.

2. Уравнения модели

Основной вопрос данной работы ставится как обоснование уравнения для $X(D)$ и изучение его решений.

Введем параметр η, описывающий эффективное влияние внешних факторов на динамику экономической системы. Будем считать $X(D) << 1$ и $\eta << 1$, что соответствует достаточно медленному, квазистационарному характеру динамики.

Далее предположим, что между параметрами X, D и η имеет место функциональная связь вида:

$$\Phi(X, D) = \eta. \tag{3}$$

От функции Φ потребуем непрерывности по X и D и дифференцируемости по X до третьего порядка включительно. Из соображений симметрии при замене $X \rightarrow -X$и $\eta \rightarrow -\eta$ знак Φ должен меняться на противоположный. Это дает условие:

$$\Phi(-X, D) = -\Phi(X, D). \tag{4}$$

Используя формулу Тейлора мы имеем:

$$\Phi_X^{(0)}(0, D) + \Phi_X^{(1)}(0, D)\, X + \Phi_X^{(2)}(0, D)\, X^2 + \Phi_X^{(3)}(0, D)\, X^3 + 0\left(X^3\right) = \eta. \tag{5}$$

В(5) мы обозначим $\Phi_X^{(n)}(0, D) = \left(\frac{d^n}{dX^n}\Phi(X, D)\right)_{X=0}$.

Из (4) следует $\Phi_X^{(0)}(0, D) = \Phi_X^{(2)}(0, D) = 0$. Обозначив $\Phi_X^{(1)}(0, D) = A(D)$, $\Phi_X^{(3)}(0, D) = B(D)$, мы приводим (5) к виду:

$$A(D)\, X + B(D)\, X^3 = \eta. \tag{6}$$

В (6) коэффициент $B(D)$ существенен в области $|A(D)| << 1$. Точки в которых $A(D) = 0$ назовем критическими и обозначим D_k. Тогда в (6) можно сделать замену $B(D) = B(D_k) = B_k$ и уравнение (6) упрощается:

$$A(D)\, X + B_k X^3 = \eta. \tag{7}$$

Величины B_k и η в течении всего времени наблюдения процесса будем считать постоянными. Динамика процессов будет в данной модели определяться аналитической зависимостью коэффициента A от фрактальной размерности D. Значения D удовлетворяют условию $1 < D \leq 2$. Разобьем этот интервал на два $1 < D \leq D_0$ и $D_0 \leq D < 2$.

В области $1 < D \leq D_0$ мы предложим следующее представление $A(D)$ [4]:

$$A(D) = \frac{1}{D_0 - D}, \tag{8}$$

а в области $D_0 \leq D < 2$ - более сложное представление [4]:

$$A(D) = \frac{\pi}{2(D_k - D_0)} tg\left\{\frac{\pi}{2}\frac{D - D_k}{D_k - D_0}\right\} = \frac{\pi}{2(D_k - D_0)} ctg\left\{\frac{\pi}{2}\frac{D_0 - D}{D_k - D_0}\right\}. \tag{9}$$

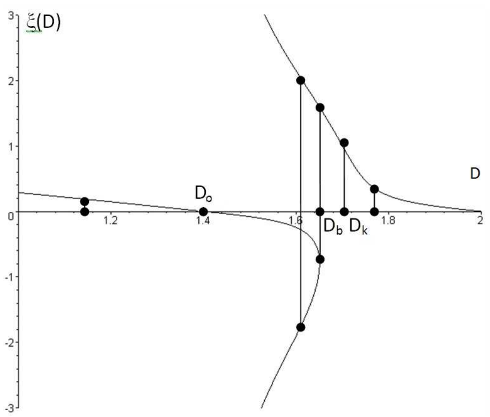

Рис. 1: Зависимость вещественных корней уравнения (10) ξ от значения фрактальной размерности D, $B_k > 0$

Представления $A\,(D)$ (8) и (9) гладко сшиваются в точке D_0, так как имеет место равенство главных членов разложения (8) и (9) в ряд Лорана с центром в точке полюса $D = D_0$. В точке $D = D_k > D_0 \;\; A\,(D) = 0$. В дальнейшем мы будем называть ее критической точкой. Вблизи критической точки D_k кубичным членом (7) пренебречь уже нельзя.

Приведем (7) к более удобному для решения виду, сделав замену $X = X_k\xi$ где $X_k = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}$:

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda, \tag{10}$$

где $\lambda = \frac{-A(D)}{B_k^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}$.

В критической точке $D = D_k, \lambda = 0, \xi = 1$. Тогда $X = X_k = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}$. С учетом условия $|\eta| << 1$ и считая $|B_k| \leq 1$ имеем $|X\,(D < D_0)| << |X_k|$. Следовательно, в критической точке D_k значение $X\,(D_k)$ многократно возрастает. Отсюда очевидно следует возможность применения данной математической модели для описания кризисных явлений.

Из (10) видно, что точка бифуркации λ_b, в которой вместо одного появляются три вещественных корня уравнения (10), находятся из условия $\lambda_b = -\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$. Тем самым имеет место сдвиг точки бифуркации и критической точки при $\eta \neq 0$.

Зависимость вещественных корней уравнения (10) ξ от значения фрактальной размерности D представим на рис. 1 ($B_k > 0$) и рис. 2 ($B_k < 0$). Значения параметров модели мы взяли $B_k = \pm 0,39$; $\eta = 1$; $D_0 = 1,4$; $D_k = 1,65$. Для большей наглядности графика мы выбрали $\eta = 1$. Это несколько не соответствует условию $\eta << 1$.

Из рисунков 1 и 2 хорошо видны свойства кривой $\xi\,(D)$ вблизи точек D_k, D_b, D_0, а именно: $\xi(D_0) = 0$, $\xi(D_k) = 1$ и при $D \leq D_b$ каждому D соответствует три

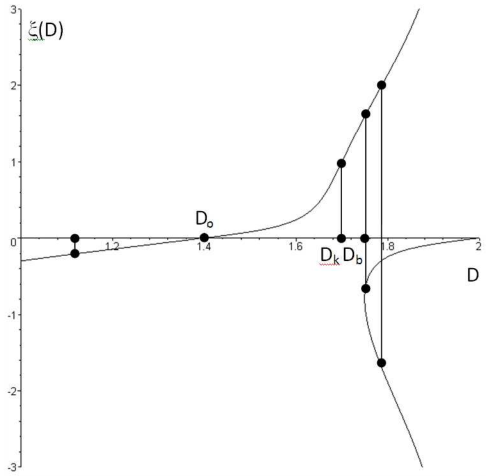

Рис. 2: Зависимость вещественных корней уравнения (10) ξ от значения фрактальной размерности D, $B_k < 0$

вещественных корня.

Заключение

Наша модель содержит три неизвестных параметра η, D_0, D_k, которые находятся из условия наилучшего согласия с опытными данными при наблюдении процессов, описываемых фрактальными кривыми.

Автор выражают благодарность А.Н. Кудинову, С.А. Михееву и В.П. Цветкову за внимание, поддержку работы и многочисленные консультации.

Список литературы

[1] Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. М. Наука. 1992

[2] Р.М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000.

[3] Benoit B. Mandelbrot, J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractal Noises and Applications, SIAM Review, vol.10, №4, 1968, pp. 422–437.

[4] Кудинов А.Н., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В. Нелинейная аппроксимация линейного тренда валютного курса во время кризиса 1998 года в рамках фрактальной модели. //Программные продукты и системы. Вып.8. 2008. С. 55–64.