УДК 519.6

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕНЫ

Катулев А.Н., Кудинов А.Н., Малевинский М.Ф.
Кафедра математического моделирования

Выведены вероятностные характеристики для прогнозирования цены товара. Изменение цены товара описывается стохастическим дифференциальным уравнением. Предложен метод прогнозирования цены товара.

Probability characteristics for forecasting of price of goods are derived. Change of price by means of stochastic differential equation is described. The method of prediction of price is proposed.

Ключевые слова: цена; прогнозирование; стохастическое дифференциальное уравнение.
Keywords: price; forecasting; stochastic differential equation.

1. Введение. Постановка задачи. Известно [1,2], что для прогнозирования экономических показателей, в том числе и динамики цены, обычно используют авторегрессионные методы и модели ARIMA, а также параметрические модели. Однако эти модели не позволяют учитывать нестационарные случайные изменения факторов, воздействующих на динамику цены. Это неизбежно приводит к ошибкам в прогнозировании. Поэтому развитие методов прогнозирования, ориентированных на учет нестационарных изменений, должно позволить снизить потери от ошибок и особенно в тех случаях, когда происходят скачкообразные изменения динамики цены.

Рассмотрим процесс изменения цены на рынке на какой-либо товар. При этом будем считать, что кроме накопленной статистики для исследования недоступна никакая другая информация о затратах на производство, об уровне инфляции и других макро- и микроэкономических факторах, влияющих на цену, а из повседневной практики – цена может быть постоянной, испытывать случайные нестационарные колебания относительно какого-либо значения или тренда, скачкообразно изменяться на случайную для потребителя товара величину.

Два первых вида поведения цены складываются в краткосрочном периоде на рынках, регулируемых государством, и на чисто конкурентных рынках, где имеют место изменения оптовых цен на сырье, перенос торговых точек из одного района в другой, появление новых конкурентов или уход старых и другие обстоятельства. Проявляются такие факторы во времени случайно, независимо один от другого и в результате обусловливают нестационарные случайные изменения цен.

Третий вид характерен монополизированному рынку либо рынку, сильно зависящему от внешних факторов, таких как процентная ставка, валютные сделки и неэкономические факторы, вызывающие скачкообразные изменения цен.

Теперь запишем исходное выражение механизма изменения цены, учитывая только факт ее изменения пропорционально величине избыточного спроса в зависимости от потребительского дохода $J(t)$ и времени

$$\frac{dp}{dt} = z(t), \tag{1}$$

где z(t) представляет разность между спросом и предложением $x(t) - y(t)$.

В свою очередь спрос и предложение зависят от цен товара и дохода потребителя, то есть уравнение (1) должно быть записано в виде

$$\frac{dp}{dt} = f(z(t), p(t), t, J(t)), \tag{2}$$

где f - функция, определяющая тренд цены.

Для учета в этом механизме нестационарных случайных изменений, очевидно, в его правую часть следует ввести слагаемое

$$F(t, p(t), J(t))n(t) \tag{3}$$

а для учета в нем скачкообразных изменений – слагаемое

$$\Phi(t, p(t), J(t))\eta(t). \tag{4}$$

Итак, поведение цены на рынке описывается нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dp}{dt} = f(z(t), p(t), t, J(t)) + F(t, p(t), J(t))n(t) + \quad \Phi(t, p(t), J(t))\eta(t), \tag{5}$$

где $n(t) = \Psi(t)\overset{\circ}{n}(t)$ - нестационарный случайный нормальный процесс с корреляционной функцией

$$R(t, \tau) = \Psi(t)\Psi(\tau)r(t - \tau); \tag{6}$$

$\eta(t) = \varphi(t)\overset{\circ}{\eta}(t)-$ нестационарный пуассоновский процесс, с корреляционной функцией $K(t, \tau) = \varphi(t)\varphi(t)q(t - \tau)$,

$\varphi(t), \Psi(t)$ $-$ заданные функции времени, $\overset{\circ}{n}(t)-$ стационарный центрированный нормальный процесс с нормированной корреляционной функцией $r(t)$;

$\overset{\circ}{\eta}(t)-$ стационарный центрированный пуассоновский процесс с нормированной корреляционной функцией $q(t)$.

Решение этого уравнения существует, так как функции f, F, Φ непрерывны по совокупности аргументов, а их приращения и амплитуды скачков ограничены.

Для полного описания цены необходимо иметь ее закон распределения вероятностей. Отсюда вытекает постановка научной задачи: найти решение дифференциального уравнения, описывающего поведение цены, и вычислить ее вероятностные характеристики.

Цель статьи – разработка метода вычисления закона распределения вероятностей цены товара на нестационарном рынке и ее прогнозирования на заданный момент времени краткосрочного периода.

2. Метод вычисления вероятностных характеристик цены. К вероятностным характеристикам относятся: математическое ожидание, центральные моменты высшего порядка, корреляционная функция, интегральный закон распределения цены. Для их вычисления представим случайные функции $\overset{\circ}{n}(\tau)$ и $\overset{\circ}{\eta}(\tau)$ с помощью неканонического разложения в виде

$$\overset{\circ}{n}(\tau) = \sin\lambda_1\tau + \lambda_2\cos\lambda_1\tau, \tag{7}$$

$$\overset{\circ}{\eta}(\tau) = \sin\lambda_3\tau + \lambda_4\cos\lambda_3\tau, \tag{8}$$

где λ_2 и λ_4 - случайные величины с произвольными плотностями распределений и единичными дисперсиями. Плотности распределений случайных величин λ_1 и λ_3 формируются как спектральные плотности посредством преобразования Фурье от корреляционных функций $q(\tau)$ и $r(\tau)$. При этом нормированная корреляционная функция нормального стационарного случайного процесса $\overset{\circ}{n}(t)$ записывается в виде

$$r(t) = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{N} A_k \exp(-\nu_k\,|t|)(\cos\beta_k t + B_k\sin\beta_k\,|t|) + \sum_{j=1}^{M} c_j\exp(-\alpha_j\,|t|), \tag{9}$$

где

$$D = \sum_{k=1}^{N} A_k + \sum_{j=1}^{M} c_j,$$

$A_k, B_k, \nu_k, \beta_k, c_j, \alpha_j, N, M, k = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,M}$ - известные величины.

Согласно методу неканонического разложения случайной функции $\overset{\circ}{n}(\tau)$ плотность распределения случайной величины λ_1 определяется по формуле

$$f(\lambda_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\exp(-i\lambda_1\tau)d\tau. \tag{10}$$

Подставив выражение (9) в подынтегральное выражение (10) и взяв интеграл аналитически, получим

$$f(\lambda_1) = \left\{\sum_{k=1}^{N} A_k\left\{\frac{\nu_k}{2\pi}\left[\frac{1}{(\beta_k+\lambda_1)^2+\nu_k^2} + \frac{1}{(\beta_k-\lambda_1)^2+\nu_k^2}\right] + \right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left. + \frac{B_k}{2\pi}\left[\frac{\beta_k+\lambda_1}{(\beta_k+\lambda_1)^2+\nu_k^2} + \frac{\beta_k-\lambda_1}{(\beta_k-\lambda_1)^2+\nu_k^2}\right]\right\} + \sum_{j=1}^{M} c_j\frac{\alpha_j}{\pi(\lambda_1^2+\alpha_j^2)}\right\}\frac{1}{D}.$$

По аналогичному выражению (10) определяется и плотность распределения $f(\lambda_3)$ случайной величины λ_3.

Для вычисления вероятностных характеристик цены $p(t,\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ воспользуемся интерполяционным методом.

В этом методе решение системы (5) записывается в виде полинома Лагранжа от случайных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$p(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_4) = \sum_{k_1,...,k_4}^{q_1,...,q_4} p(t, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) L_{k_1...k_4}(\lambda_1, ..., \lambda_4), \qquad (12)$$

где $L_{k_1...k_4}(\lambda_1, ..., \lambda_4) = \prod\limits_{i=1}^{4} \frac{W_{q_i}(\lambda_i)}{(W_{q_i}(\tau_{ik_i}))'(\lambda_i - \tau_{ik_i})}$,

$$W_{q_i}(\lambda_i) = (\lambda_i - \tau_{i0})(\lambda_i - \tau_{i1}) \cdots (\lambda_i - \tau_{iq_i}),$$

$\tau_{i0}, ..., \tau_{iq_i}$– статистические узлы, равные корням ортогональных полиномов степени $q_i + 1$; полиномы имеют вес, равный $f_i(\lambda_i)$ - плотности распределения вероятностей случайной величины λ_i, $(W_{q_i}(\tau_{ik_i}))'$–значение первой производной от полинома $W_{q_i}(\lambda_i)$ в узле τ_{ik_i}.

Тогда математическое ожидание, центральные моменты, корреляционная функция, интегральный закон распределения цены $p(t, \lambda)$ вычисляются соответственно по формулам:

$$M[p(t)] = \sum_{k_1,...,k_4=0}^{q_1,...,q_4} p(t, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) \prod_{i=1}^{4} \rho_{k_i}, \qquad (13)$$

$$D_k[p(t)] = \sum_{k_1,...,k_4=0}^{q_1,...,q_4} [p(t, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) - M[p(t)]]^k \prod_{i=1}^{4} \rho_{k_i}, \qquad (14)$$

$$K(t_1, t_2) = \sum_{k_1,...,k_4=0}^{q_1,...,q4} [p(t_1, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) - M[p(t_1)]]\ [p(t_2, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) - M[p(t_2)]] \prod_{i=1}^{4} \rho_{k_i} \qquad (15)$$

$$F(t, p) = \frac{1}{2} \sum_{k_1,...,k_4=0}^{q_1,...,q_4} \frac{p(t, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) - p}{|p(t, \tau_{1k_1}, ..., \tau_{4k_4}) - p|} \prod_{i=1}^{4} \rho_{k_i}, \qquad (16)$$

где $\rho_{k_i} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(\lambda_i) W_{q_i}(\lambda_i)}{(W_{q_i}(\tau_{ik_i})'(\lambda_i - \tau_{ik_i})} d\lambda_i$ -числа Кристоффеля для случайной величины λ_i с плотностью распределения $f_i(\lambda_i)$.

Видно, что по формулам (13)-(16) можно выполнить расчеты для любого момента t, в том числе и на прогнозный.

В [3] приведены таблицы статистических узлов и чисел Кристоффеля для равномерной, экспоненциальной и нормальной плотностей распределения. В других случаях статистические узлы определяются как решения трансцендентного уравнения [3]

$$\int\limits_{c}^{\lambda} f(\tau) d\tau = \int\limits_{a}^{x} g(y) dy, \qquad (17)$$

где g(y)- плотность распределения, для которой имеются таблицы статистических узлов и чисел Кристоффеля, при этом числа Кристоффеля остаются теми же;

a, c - нижние границы интервалов значений случайных величин x и λ соответственно;

x – значение статистического узла из таблицы статистических узлов, соответствующей плотности стандартного распределения g(y);

λ– искомое значение статистического узла.

Аналитическое решение уравнения (17) получено только для небольшого количества простейших плотностей распределений. Поскольку аналитическое решение уравнения (17) для плотностей распределения общего вида получить практически невозможно предложим численный метод его решения, основанный на следующей теореме.

Теорема 1. *Значение λ статистического узла, удовлетворяющего уравнению (17) при $f(\lambda)$, отличной от нуля, является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{d\lambda}{dq} = \frac{1}{f(\lambda)} \tag{18}$$

с начальным условием

$$\lambda(0) = c. \tag{19}$$

Доказательство. Запишем (17) в виде

$$\int_c^{\lambda} f(\tau)d\tau = q, \tag{20}$$

где $q = \int_a^x g(y)dy$.

Выражение (17) можно привести к виду

$$\int_c^0 f(\tau)d\tau + \int_0^{\lambda} f(\tau)d\tau = \int_a^x g(y)dy. \tag{21}$$

Преобразуем (21) следующим образом:

$$\int_0^{\lambda} f(\tau)d\tau = q, \tag{22}$$

где

$$q = \int_a^x g(y)dy - \int_c^0 f(\tau)d\tau.$$

Считая q функцией от λ и продифференцировав (20) по переменной λ, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dq}{d\lambda} = f(\lambda) \tag{23}$$

с начальным условием $q(c) = 0$.

Если теперь положить, что независимой переменной является q, а λ есть функция от q, то уравнение (23) примет требуемый вид (18) с начальным условием (19) и с начальным условием $\lambda(0) = 0$ для дифференциального уравнения, определяемого по (22). При этом дифференциальное уравнение первого порядка (18) интегрируется до значения q, равного

$$q_3 = \int_a^{x_3} g(y)dy, \tag{24}$$

а дифференциальное уравнение, соответствующее (22) – до значения

$$q_3 = \int_a^{x_3} g(y)dy - \int_c^0 f(\tau)d\tau \tag{25}$$

с начальным условием $\lambda(0) = 0$.

Здесь x_3- значение статистического узла, соответствующего плотности распределения $g(x)$. Теорема доказана. ∎

Для решения уравнения (18) на ПЭВМ можно использовать стандартные процедуры интегрирования систем дифференциальных уравнений предпочтительно с автоматическим выбором шага интегрирования на заданном отрезке интегрирования. Но если при интегрировании возникает случай обращения плотности распределения $f(\lambda)$ в нуль (например, распределение Рэлея, гамма-распределение, бета-распределение) в граничных конечных точках интервалов их определения, то правая часть дифференциального уравнения (18) обращается в бесконечность, и тогда необходим другой подход к нахождению узла λ. Содержание такого подхода раскрывается следующей теоремой.

Теорема 2. *В случае если $f(\lambda)$ обращается в нуль, искомое значение λ статистического узла находится как значение $\lambda(1)$ функции $\lambda(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$ удовлетворяющей уравнению*

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{\lambda - c - F(\lambda) + q_3}{1 + \alpha(f(\lambda) - 1)} \tag{26}$$

с начальным условием

$$\lambda(0) = c. \tag{27}$$

Доказательство. С учетом исходного данного q_3 уравнение (23) запишется в виде

$$a(\lambda) = F(\lambda) - q_3 = 0, \tag{28}$$

где

$$F(\lambda) = \int_c^{\lambda} f(\lambda)d\lambda \quad -$$

функция распределения случайной величины с функцией плотности $f(\lambda)$.

Введем вспомогательную функцию

$$G(\lambda, \alpha) = \lambda - c + \alpha(a(\lambda) - \lambda + c), \tag{29}$$

где α - вспомогательный параметр, изменяющийся в пределах [0,1] . При $\alpha = 1$ получаем $G(\lambda, 1) = a(\lambda)$, а при $\alpha = 0$ и $\lambda = c$ имеем $G(\lambda, 0) = 0$.

Для определения корня λ трансцендентного уравнения (28) будем решать уравнение

$$G(\lambda, \alpha) = 0, \tag{30}$$

из которого λ определяется как функция α. Продифференцируем уравнение (30) по параметру α. В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка, равносильное (30)

$$\frac{dG(\lambda(\alpha), \alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial G(\lambda(\alpha), \alpha)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\alpha} + \frac{\partial G(\lambda(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \tag{31}$$

с начальным условием (27), где

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 1 + \alpha(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} - 1),$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = g(\lambda) - \lambda + c.$$

Разрешив уравнение (31) относительно производной $\frac{d\lambda}{d\alpha}$, получаем, что $\lambda(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (26) с начальным условием (27). Правая часть уравнения (26) уже не имеет особенностей в граничных точках.

Дифференциальное уравнение первого порядка (26) можно интегрировать любым численным методом на конечном отрезке [0,1], при этом $\lambda(1)$ — корень трансцендентного уравнения (28). Теорема доказана. ∎

Отметим, что метод расчета статистических узлов, основанный на теореме 2, по существу, представляет собой вариант метода дифференцирования по параметру на основе решения уравнения (23).

Предложенный метод решения уравнения (17) обладает следующими преимуществами по сравнению с методом, приведенным в [3] на примере частных случаев плотностей распределений:

- приводит к более простым формулам для вычисления правой части уравнения (23), поскольку в ней присутствует только функция $f(\lambda)$ и не присутствует $g(x)$;
- обеспечивает возможность интегрирования уравнения (18) на небольшом интервале (не более чем на интервале (0, 1) и
- возможность вычисления статистических узлов с помощью плотностей распределений, аргументы которых изменяются на всей числовой оси.

3. Прогнозирование цены. Сущность прогнозирования цены заключается:

1. При выбранной степени полинома Лагранжа (12) и известным корреляционным функциям $R(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$ процессов $n(t)$ и $\eta(t)$ вычисляются статистические узлы по соотношениям (18) и (26).

2. Производится интегрирование уравнения (5) с вычисленными статистическими узлами; интегрирование выполняется до заданного прогнозного момента времени.

3. По соотношениям (13)-(16) рассчитываются на прогнозный момент времени вероятностные характеристики цены: математическое ожидание, центральные моменты высшего порядка, корреляционная функция и закон распределения вероятностей.

Список литературы

[1] Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск, издание института математики, 1999.

[2] Клеменс М.П., Хендри Д.Ф. Прогнозирование в макроэкономике // Обозрение прикладной и промышленной математики, том 3, выпуск 6, М.: Наука, 1996.

[3] Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. М.: Машиностроение, 1968.