КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.54

ОБ ОЦЕНКЕ РАДИУСА ЗВЕЗДНОСТИ В КЛАССАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Эйланголи О.Р.
Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 26.05.2010, после переработки 02.06.2010.

В линейно- и аффинно-инвариантных классах однолистных гармонических отображений единичного круга получена оценка радиуса звездности, зависящая от порядка семейства.

At the linear- and affine-invariant families of univalent harmonic mappings an estimate of the radius of starlikeness depending on the order of family is obtained.

Ключевые слова: гармоническое отображение, линейно-инвариантное семейство, радиус звездности.
Keywords: harmonic mapping, linear-invariant family, radius of starlikeness.

Введение

Интерес к классам однолистных гармонических функций появился после известной работы Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолла [1] и обусловлен во-первых родством задач теории гармонических отображений с классической проблематикой конформных отображений, а во-вторых существенными отличиями и своеобразием свойств гармонических функций и используемых для их анализа методов. В дальнейшем проблематике однолистных гармонических отображений был посвящен ряд работ Т. Шейл-Смолла [2], Дж. Бшути, У. Хенгартнера [3], П. Дюрена [4] и других авторов. Следует отметить, что ряд классических проблем теории гармонических отображений (таких как оценка коэффициентов, теорема существования и единственности гармонического отображения с заданной дилатацией) на сегодняшний день остаются нерешенными.

1. Рассмотрим произвольное линейно- и аффинно-инвариантное семейство $\mathcal{L}$ сохраняющих ориентацию локально однолистных гармонических отображений f единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0, f_z(0) = 1$.

Напомним, что свойство линейной инвариантности семейства $\mathcal{L}$ заключается в том, что наряду с каждой функцией $f \in \mathcal{L}$ классу $\mathcal{L}$ принадлежит также функция

$$f(\tilde{z}) = \frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f_z(\phi(0))\phi'(0)} \qquad (1)$$

при любом конформном автоморфизм $\phi(z) = e^{i\theta}(z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$ единичного круга, где $z_0 \in \Delta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Аффинная инвариантность семейства $\mathcal{L}$ означает, что вместе с каждой функцией f классу $\mathcal{L}$ принадлежат функции вида

$$f_\epsilon(z) = \frac{f(z) + \varepsilon\overline{f(z)}}{1 + \varepsilon\overline{f_{\overline{z}}}(0)} \tag{2}$$

при любом значении $\varepsilon \in \Delta$.

Известно (см., например, [4]), что гармонические функции в единичном круге Δ можно представить в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где $h(z)$, $g(z)$ – голоморфные в Δ функции. Этот результат позволяет записать всякую функцию $f \in \mathcal{L}$ в виде

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}, \ \ |z| < 1.$$

Напомним (см. [2]), что порядком линейно- и аффинно-инвариантного семейства $\mathcal{L}$ называется число $\alpha = \sup |a_2|$, где супремум берётся по всем функциям из $\mathcal{L}$. В данной работе будем считать, что порядок семейства $\mathcal{L}$ конечен. Оценка величины α в семействах однолистных гармонических отображений остается одной из центральных нерешенных задач данного раздела геометрической теории функций комплексного переменного.

Подкласс $\mathcal{L}^0$ класса $\mathcal{L}$, который выделяется наложением дополнительного условия $f_{\overline{z}}(0) = 0$, является компактным в топологии локально равномерной сходимости в круге Δ. При этом $\mathcal{L}^0$ уже не является линейно-инвариантным семейством.

В работе [5] вводится понятие порядка α_0 семейства $\mathcal{L}^0$. Порядком семейства $\mathcal{L}^0$ назовем число $\alpha_0 = \max |a_2|$, где максимум берётся по всем функциям из $\mathcal{L}^0$. Привлечение порядка α_0 позволило уточнить некоторые оценки в линейно- и аффинно-инвариантных глассах гармонических функций (см. [5,6]).

Очевидно, что всякую функцию $f \in \mathcal{L}$ можно представить в виде $f(z) = f_0(z) + \overline{b_1 f_0(z)}$, где f_0 – некоторая функция из $\mathcal{L}^0$, а $b_1 = f_{\overline{z}}(0)$, $|b_1| < 1$. Отсюда следует, что $\alpha \le \alpha_0 + \beta_0$, где $\beta_0 = \max |b_2|$, причем максимум берётся по всем функциям из $\mathcal{L}^0$. Известно (см., например, [6]), что $\beta_0 \le 1/2$.

Примерами семейств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^0$ являются известные классы однолистных гармонических отображений S_H, S_H^0 соотвественно (см., например, [1,4]).

Проблематика теории гармонических отображений во многом продолжает классические задачи теории конформных отображений. В частности, в линейно- и аффинно-инвариантных классах гармонических отображений удается получить точные оценки радиуса выпуклости [2,6], зависящие от порядка семейства.

Оценка радиуса звездности в классах $\mathcal{L}$ как и в случае конформных отображений представляет собой более сложную задачу. Напомним, что в классе S конформных однолистных функций в единичном круге любая функция f отображает круг $\{z \in \Delta : |z| \le 2 - \sqrt{3}\}$ на область, звездообразную относительно начала координат.

Следующая теорема позволяет получить оценку радиуса звездности в линейно- и аффинно-инвариантных подклассах класса S_H однолистных гармонических отображений.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z) = h(z)+\overline{g(z)} \in \mathcal{L} \subset S_H$. *Тогда* f *звездообразна относительно начала координат в любом круге* $\{z \in \Delta : |z| < r\}$ *для всех* r, *удовлетворяющих неравенству*

$$r \le r_0 = \frac{e^{\frac{t_0}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{t_0}{\alpha}} + 1}, \text{ где } t_0 \approx 2.1986.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный линейно- и аффинно-инвариантный подкласс $\mathcal{L}$ семейства однолистных гармонических отображений S_H. Пусть $f = h+\overline{g} \in \mathcal{L}$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при любом фиксированном $r \in (0,1)$ и $z = r\,e^{it}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f(z) = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\ln\left(h(z)+\overline{g(z)}\right) = \mathrm{Re}\, z\frac{h'(z) - e^{-2it}\overline{g'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}. \qquad (3)$$

В силу линейной инвариантности класса $\mathcal{L}$ существует такое отображение $f_0 = h_0 + \overline{g_0} \in \mathcal{L}$, что

$$f(z) = -e^{it_0}\frac{f_0\left(e^{-it_0}\frac{z_0 - z}{1-\overline{z_0}z}\right) - f_0(r)}{h_0'(r)(1-r^2)}, \;\; z_0 = re^{it_0},$$

причем

$$f_0(\zeta) = -e^{-it_0}\frac{f\left(e^{it_0}\frac{r-\zeta}{1-r\zeta}\right) - f(z_0)}{h'(r)(1-r^2)}, \;\; \zeta = \frac{z_0 - z}{1-\overline{z_0}z}.$$

Дифференцируя последние соотношения, получаем

$$h'(z_0) = \frac{1}{h_0'(r)(1-r^2)^2} \text{ и } g'(z_0) = e^{-2it_0}\frac{g_0'(0)}{\overline{h_0'(r)}(1-r^2)^2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f(z_0) = \frac{r}{(1-r^2)\,|f_0(r)|^2}\mathrm{Re}\left\{(1-\overline{g_0'(0)})\overline{f_0(r)}\right\} =$$

$$= \frac{1-|g_0'(0)|^2}{|f_0(r)|^2}\frac{r}{1-r^2}\,\mathrm{Re}\,\hat{f}(r), \qquad (4)$$

где

$$\hat{f}(r) = \frac{f_0(r) - \overline{g_0'(r) f_0(r)}}{1-|g_0'(r)|^2},$$

причем функция $\hat{f}$ принадлежит классу $\mathcal{L}$ в силу свойства аффинной инвариантности (2) (при $\varepsilon = -\overline{g_0'(0)}$, $|\varepsilon| < 1$).

Звездообразность образа круга $\{z : |z| < r\}$ относительно начала координат при отображении f имеет место, если при любом $t \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f(re^{it}) \ge 0.$$

В силу соотношений (4) для этого достаточно, чтобы выполнялась оценка $\operatorname{Re}\hat{f}(r) \geq 0$.

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\hat{f}(r) = \operatorname{Re}\left(\hat{h}(r) + \overline{\hat{g}(r)}\right) = \operatorname{Re}\left(\hat{h}(r) + \hat{g}(r)\right) =$$

$$= \int_0^r \left|\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right| \cos\arg\left(\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right) dx.$$

Для голоморфной составляющей h произвольной гармонической функции f, принадлежащей линейно- и аффинно-инвариантному семейству, стандартными методами (см., например, [7]) с помощью оценки отношения $h''(z)/h'(z)$, которая может быть найдена, например, в [4,6], доказываются теоремы искажения и вращения. В частности, в силу аффинной инвариантности семейства $\mathcal{L}$ для любого ε, $|\varepsilon| < 1$, и произвольного $z \in \Delta$ справедливы неравенства

$$\frac{(1-|z|)^{\alpha-1}}{(1+|z|)^{\alpha+1}} \leq \left|\hat{h}'(z) + \varepsilon\,\hat{g}'(z)\right| \leq \frac{(1+|z|)^{\alpha-1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}},$$

$$\alpha\ln\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \arg\left(\hat{h}'(z) + \varepsilon\,\hat{g}'(z)\right) \leq \alpha\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{5}$$

Отсюда, устремляя ε к 1, для любого $x \in (0,1)$ полчаем

$$\begin{gathered}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+1}} \leq \left|\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right| \leq \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1-x)^{\alpha+1}},\\ \alpha\ln\frac{1-x}{1+x} \leq \arg\left(\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right) \leq \alpha\ln\frac{1+x}{1-x}.\end{gathered} \tag{5$'$}$$

Более точная, но менее удобная в интересующем нас случае, теорема искажения для линейно- и аффинно-инвариантных семейств гармонических отображений приведена в работе [6].

Оценим $\operatorname{Re}\hat{f}(r)$ с учетом неравенств (5$'$). Для этого заметим, что, если $x \leq r_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{2\alpha}}-1}{e^{\frac{\pi}{2\alpha}}+1}$, то $\alpha\ln\frac{1+x}{1-x} \leq \frac{\pi}{2}$ и $\cos\arg\left(\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right) \geq 0$.

Следовательно, с учетом (5$'$)

$$\int_0^{r_1} \left|\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right| \cos\arg\left(\hat{h}'(x) + \hat{g}'(x)\right) dx \geq$$

$$\geq \int_0^{r_1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{1}{1-x^2} \cos\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos t\,dt = A.$$

Интегрированием по частям приходим к равенству:

$$A = \frac{1}{4\alpha}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Если же $r_1 < x < r_2 = \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}}-1}{e^{\frac{\pi}{\alpha}}+1}$, то $\alpha\ln\frac{1+x}{1-x} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Следовательно, $\cos\arg\Big(\hat{h}'(x)+\hat{g}'(x)\Big)<0$ и для любого $r\in(r_1,r_2)$

$$\int_{r_1}^{r}\Big|\hat{h}'(x)+\hat{g}'(x)\Big|\cos\arg\Big(\hat{h}'(x)+\hat{g}'(x)\Big)\,dx\geq$$

$$\geq\int_{r_1}^{r}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-x^2}\cos\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}dx=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}}e^t\cos t\,dt=A_r.$$

После интегрирования по частям получим

$$A_r=\frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}\left\{\cos\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}+\sin\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}\right\}-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4\alpha}=$$
$$=\frac{1}{4\alpha}\left\{\sqrt{2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}\sin\left(\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}+\frac{\pi}{4}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\right\},$$

причем $A_r<0$ для $r\in(r_1,r_2)$.

Остается заметить, что $\operatorname{Re}\hat{f}(r)\geq A+A_r\geq 0$ и, как следствие, функция f звездообразна относительно начала координат в круге $\{z\in\Delta:|z|<r\}$, если $r\in(r_1,r_2)$ и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}\sin\left(\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}+\frac{\pi}{4}\right)>e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}-1,$$

Отсюда получаем, что радиус звездообразности функции f удовлетворяет неравенству:

$$r\leq\frac{e^{\frac{t_0}{\alpha}}-1}{e^{\frac{t_0}{\alpha}}+1},$$

где t_0 – единственный корень трансцендентного уравнения

$$e^{t_0}\sin\left(t_0+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

на интервале $(\pi/2,\pi)$. Приближенно значение t_0 можно оценить величиной 2.1986.

Теорема доказана.

Замечание. Известно, что в подклассе $C_H\subset S_H$, образованном функциями $f\in S_H$, отображающими Δ на почти выпуклые области, порядок $\alpha=3$. В этом случае радиус звездности в любом подклассе $\mathcal{L}\subset C_H$ оценивается величиной $r_0=(e^{\frac{t_0}{\alpha}}-1)/(e^{\frac{t_0}{\alpha}}+1)\approx 0.35037$. Для сравнения, радиус выпуклости (см., например, [4,6]) для класса C_H равен $3-\sqrt{8}\approx 0.17157$.

2. В завершение докажем теорему вращения для функций, принадлежащих произвольному линейно- и аффинно-инвариантному классу гармонических отображений.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{L}$, $b_1 = \overline{f_{\overline{z}}(0)}$ *и* $r \in (0,1)$. *Тогда для любого* $z = re^{it}$ *справедлива оценка*

$$\left|\arg \frac{d}{dt} f(re^{it}) - t - \frac{\pi}{2}\right| \leq \\ \leq \ln\left\{\frac{(1+r)^{\alpha_0-\beta_0}}{(1-r)^{\alpha_0+\beta_0}}(1+r|b_1|)^{2\beta_0}\right\} + \arcsin\frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \mathcal{L}$, где $h(z)$, $g(z)$ – голоморфные в Δ функции. Пусть $b_1 = \overline{f_{\overline{z}}(0)} = g'(0)$. Непосредственным дифференцированием устанавливается, что при любом фиксированном $r \in (0,1)$

$$\arg \frac{d}{dt} f(re^{it}) = \arg\left\{ire^{it}\left(h'(re^{it}) - e^{-2it}\overline{g'(re^{it})}\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$\arg \frac{d}{dt} f(re^{it}) - t - \frac{\pi}{2} = \arg h'(re^{it}) + \arg\left\{1 - e^{-2it}\frac{\overline{g'(re^{it})}}{h'(re^{it})}\right\}. \tag{7}$$

Локальная однолистность отображения f позволяет применить к отношению $g'(z)/h'(z)$ лемму Шварца [8], в соответствии с которой

$$\left|e^{-2it}\frac{\overline{g'(re^{it})}}{h'(re^{it})}\right| \leq \frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|} < 1.$$

Следовательно,

$$\arg\left(1 - e^{-2it}\frac{\overline{g'(re^{it})}}{h'(re^{it})}\right) \leq \arcsin\frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|}. \tag{8}$$

С другой стороны $\arg h'(re^{it}) = \operatorname{Im} \ln h'(re^{it})$, причем функция $\ln h'$ голоморфна в круге Δ, поскольку $h'(z) \neq 0$.

В работе [6] получена точная оценка производной $\frac{\partial}{\partial z} \ln h'(z)$ в линейно- и аффинно-инвариантных семействах локально однолистных гармонических отображений, имеющая вид:

$$\left|z\frac{\partial}{\partial z}\ln h'(z) - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}\left(\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|}\right).$$

Очевидно, что аналогичная оценка справедлива и для мнимой части выражения под знаком модуля, что приводит к неравенству

$$\left|\operatorname{Im}\left\{z\frac{\partial}{\partial z}\ln h'(z)\right\}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}\left(\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|}\right). \tag{9}$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\operatorname{Im}\left\{z\frac{\partial}{\partial z}\ln h'(z)\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\ln h'(re^{it}) - i\frac{\partial}{\partial t}\ln h'(re^{it})\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\arg h'(re^{it}) - \frac{\partial}{\partial t}\ln|h'(re^{it})|\right).$$

Применяя к последнему выражению условие Коши-Римана в полярных координатах $\frac{\partial \ln|h'(re^{it})|}{\partial t} = -r\frac{\partial \arg h'(re^{it})}{\partial r}$, получаем

$$\mathrm{Im}\left\{z\frac{\partial}{\partial z}\ln h'(z)\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\arg h'(re^{it}),$$

что позволяет преобразовать (9) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\arg h'(re^{it}) \le \frac{2}{1-r^2}\left(\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|b_1|}{1+r|b_1|}\right).$$

Интегрированием последнего неравенства по r с учетом равенства $h'(0) = 1$ приходим к оценке

$$\arg h'(re^{it}) \le \ln\left\{\frac{(1+r)^{\alpha_0-\beta_0}}{(1-r)^{\alpha_0+\beta_0}}(1+r|b_1|)^{2\beta_0}\right\}. \tag{10}$$

Остается применить к (7) неравенство (8) совместно с оценкой (10), что в итоге приводит к требуемому соотношению (6).

Что и требовалось доказать.

Заметим, что неравенство (10), полученное в ходе доказательства теоремы 2, уточняет теорему вращения ($5'$) для голоморфных составляющих гармонических отображений.

Заключение

Таким образом, использование свойств линейной и аффинной инвариантности позволяет получить оценку радиуса звездности в подклассах класса нормированных однолистных гармонических отображений единичного круга.

Список литературы

[1] Clunie J., Sheil–Small T. Harmonic univalent functions// Ann. Acad. Sci. Fenn., A I Math. 1984. V. 9. P. 3 – 25.

[2] Sheil-Small T. Constants for planar harmonic mappings// J. London Math. Soc. 1990. V. 42. P. 237–248.

[3] Bshouty D., Hengartner W. Univalent Harmonic mappings in the plane// Ann. Univ. Mariae Curie-Skladowska, 1994. Sect. A, V. XLVIII (3). P. 12–42.

[4] Duren P. Harmonic mappings in the plane. Cambridge, 2004.

[5] Граф С.Ю. Точная оценка якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений // Труды Петрозаводского гос. ун–та. Сер. Математика. 2007. Вып. 14. С. 31–38.

[6] Граф С. Ю. Теоремы искажения в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений. Тверь, 2008. С. 43–56.

[7] Duren P. Univalent functions. Springer Verlag, New York, 1983.

[8] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.