УДК 519.216.2, 512.625.5, 517.986

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ С НЕАРХИМЕДОВЫМИ НОРМИРОВАНИЯМИ

Людковский С.В.
Кафедра прикладной математики технического университета МИРЭА

Поступила в редакцию 17.06.2010, после переработки 27.06.2010.

Статья посвящена стохастическим процессам со значениями в конечно- и бесконечно-мерных векторных пространствах над бесконечными полями $\mathbf{K}$ нулевой характеристики с нетривиальными неархимедовыми нормами. Для различных типов стохастических процессов контролируемых мерами со значениями в $\mathbf{K}$ и в полных топологических векторных пространствах над $\mathbf{K}$ исследованы стохастические интегралы. Изучаются спектральных разложениях неархимедовых стохастических процессов.

The article is devoted to stochastic processes with values in finite- and infinite-dimensional vector spaces over infinite fields $\mathbf{K}$ of zero characteristic with non-trivial non-archimedean norms. Stochastic integrals are investigated for different types of stochastic processes controlled by measures with values in $\mathbf{K}$ and in complete topological vector spaces over the field $\mathbf{K}$. Spectral decompositions of non-archimedean stochastic processes are studied.

Ключевые слова: стохастический процесс, неархимедово поле, нулевая характеристика, случайный процесс, линейное пространство, стохастический интеграл, спектральное представление.
Keywords: stochastic process, non-archimedean field, zero characteristic, random process, linear space, stochastic integral, spectral representation.

1. Введение

Стохастические интегралы и спектральные представления случайных процессов широко используются над полями действительных и комплексных чисел [7, 16, 17, 18, 39, 40]. Если рассматривать случайные процессы в топологических группах или метрических пространствах, то это дает некоторое обобщение, но при этом теряются многие специфические особенности топологических векторных пространств и многие результаты на них могут быть естественно утрачены [35, 34, 18, 40]. В тоже время неархимедов анализ быстро развивается в последние годы [22, 37, 38, 41, 11]. Он нашел приложения в неархимедовой квантовой механике и квантовой теории поля, психологии, математической биологии, криптологии и т.д. [41, 3, 9, 6, 19, 20]. Эти разделы науки сильно зависят от теории вероятностей

[2]. Более того, неархимедов анализ является естественным для вполне несвязных топологических пространств и вполне несвязных топологических групп [37, 28]. Стохастическим процессы на таких группах также позволяют исследовать их изометрические представления в неархимедовых пространствах.

Напомним, что неархимедовы поля $\mathbf{K}$ имеют неархимедовы нормы, например, для поля p-адических чисел $\mathbf{Q_p}$, где $p > 1$ - это простое число [22, 37, 42]. Мультипликативные нормы в таких полях $\mathbf{K}$ удовлетворяют сильному неравенству треугольника: $|x + y| \le \max(|x|, |y|)$ для любых $x, y \in \mathbf{K}$.

Кроме локально компактных полей мы также рассмотрим не локально компактные поля. Например, алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q_p}$ можно снабдить мультипликативной неархимедовой нормой, и его пополнение относительно этой нормы дает поле $\mathbf{C_p}$ комплексных p-адических чисел. Поле $\mathbf{C_p}$ алгебраически замкнуто и полно относительно этой нормы [22]. Его группа нормирования $\Gamma_{\mathbf{C_p}} := \{|z| : z \in \mathbf{C_p}, z \ne 0\}$ изоморфна мультипликативной группе $\{p^x : x \in \mathbf{Q}\}$. Существуют бóльшие поля $\mathbf{U_p}$ являющиеся расширениями поля $\mathbf{Q_p}$, так что $\Gamma_{\mathbf{U_p}} = \{p^x : x \in \mathbf{R}\}$. Известны расширения получаемые также с помощью сферических пополнений, если исходное поле таковым не является [37, 38, 8, 11].

Стохастические процессы со значениями в неархимедовых пространствах появляются при их изучении для неархимедовых банаховых пространств, вполне несвязных топологических групп и многообразий [25]-[29]. Большое значение также играют ветвящиеся процессы в графах [1, 17, 18]. Для конечных или бесконечных графов с конечными степенями вершин можно рассмотреть их вложения в p-адические графы, которые могут быть вложены в локально компактное поля. Рассмотрения таких процессов сводятся к процессам со значениями в поле $\mathbf{Q_p}$ p-адических чисел. Стохастическим процессы на p-адических графах также имеют приложения в анализе потоков информации, математической психологии и биологии.

Более специфические особенности возникают, когда меры рассматриваются со значениями в неархимедовых полях. Данная статья продолжает предыдущие работы автора в этой области [25, 30, 31, 32].

В настоящей работе исследуются представления стохастических процессов со значениями в конечно- или бесконечно-мерных векторных пространствах над бесконечными полями с нетривиальными неархимедовыми нормами. Ниже изучаются различные типы стохастических процессов контролируемых мерами со значениями в неархимедовых полях нулевой характеристики, а также стохастические интегралы. Доказаны теоремы о спектральных разложениях неархимедовых стохастических процессов (смотри, например, §§20-29, леммы 27 и 29, теорему 20 и 41). Более того, выяснены специфические особенности неархимедова случая. Эти особенности возникают из-за многочисленных различий классического над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ анализа с одной стороны и неархимедова анализа с другой стороны. Общие построения статьи проиллюстрированы в примерах 9, 31.1, 40, теореме 41 и так далее, где также обсуждаются приложения ко вполне несвязным топологическим группам.

Далее также напоминаются некоторые факты из неархимедовой теории вероятностей и неархимедова анализа, чтобы облегчить чтение (смотри, например, §§1-6 во втором разделе 2), а также развиваются ниже, когда это необходимо. Главные результаты данной статьи получены впервые. Необходимо отметить, что в этой статье изучаются меры и стохастические процессы со значениями не только в неархимедовых полях (смотри раздел 2), но также со значениями в линейных топологических пространствах (смотри раздел 3).

Стохастические процессы со значениями в $\mathbf{Q_p^n}$ имеют естественные интересные приложения, для которых параметр времени может быть или вещественным, или p-адическим. Случайная траектория в $\mathbf{Q_p^n}$ может быть непрерывной относительно неархимедовой нормы в $\mathbf{Q_p}$, но её траектория в $\mathbf{Q^n}$ относительно обычной метрики индуцированной вещественной метрикой может быть разрывной. Это дает новый подход к спазмодическим или скачкообразным разрывным стохастическим процессам со значениями в $\mathbf{Q^n}$, когда последнее рассматривается вложенным в $\mathbf{R^n}$.

2. Скалярные спектральные функции

Во избежание недоразумений мы сначала даем наши определения и напоминаем основные факты.

1. Определения. Пусть G - это полное регулярное вполне несвязное топологическое пространство, пусть также $\mathcal{R}$ - это его покрывающее кольцо подмножеств в G, $\bigcup\{A : A \in \mathcal{R}\} = G$. Мы назовем кольцо разделяющим, если для любых двух различных точек $x, y \in G$ существует $A \in \mathcal{R}$ такое, что $x \in A$, $y \notin A$. Подсемейство $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ называется сжимающимся, если пересечение любых двух элементов из $\mathcal{A}$ содержит элемент из $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство, $f : \mathcal{R} \to \mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{K}$ - это поле с неархимедовой нормой, то это записывают как $\lim_{A\in\mathcal{A}} f(A) = 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $A_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $|f(A)| < \epsilon$ для любого $A \in \mathcal{A}$ с $A \subset A_0$.

Мера $\mu : \mathcal{R} \to \mathbf{K}$ - это отображение со значениями в поле $\mathbf{K}$ нулевой характеристики с неархимедовой нормой удовлетворяющей следующим свойствам:

(i) μ аддитивна;

(ii) для любого $A \in \mathcal{R}$ множество $\{\mu(B) : B \in \mathcal{R}, A \subset B\}$ ограничено;

(iii) если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство в $\mathcal{R}$ и $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$, тогда $\lim_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) = 0$.

Меры на $\mathsf{Bco}(G)$ называются тесными мерами, где $\mathsf{Bco}(G)$ - это кольцо всех открыто-замкнутых (одновременно открытых и замкнутых) подмножеств в G.

Для любого $A \in \mathcal{R}$ определена норма: $\|A\|_\mu := \sup\{|\mu(B)| : B \subset A, B \in \mathcal{R}\}$. Для функций $f : G \to X$, где X - это банахово пространство над $\mathbf{K}$ и $\phi : G \to [0, +\infty)$ определим норму $\|f\|_\phi := \sup\{|f(x)|\phi(x) : x \in G\}$.

Более общим образом для полного локально $\mathbf{K}$-выпуклого пространства X с семейством неархимедовых непрерывных преднорм $\mathcal{S} = \{u\}$ [33] характеризующих его топологию, мы определим семейство преднорм $\|f\|_{\phi,u} := \sup\{u(f(x))\phi(x) : x \in G\}$. Напомним, что подмножество V в X называется абсолютно $\mathbf{K}$-выпуклым или $\mathbf{K}$-диском, если $VB + VB \subseteq V$, где $B := \{x \in \mathbf{K} : |x| \leq 1\}$. Сдвиги $x + V$ абсолютно $\mathbf{K}$-выпуклых множеств называются $\mathbf{K}$-выпуклыми, где $x \in X$. Топологическое векторное пространство над $\mathbf{K}$ называется $\mathbf{K}$-выпуклым, если оно имеет базу $\mathbf{K}$-выпуклых окрестностей нуля (смотри 5.202 и 5.203 [33]). Преднорма u в X называется неархимедовой, если $u(x + y) \leq \max[u(x), u(y)]$ для любого $x, y \in X$. Топологическое векторное пространство X над $\mathbf{K}$ локально $\mathbf{K}$-выпукло, если и только если его топология порождена семейством неархимедовых преднорм. Поэтому полное **K**-выпуклое пространство является проективным пределом банаховых пространств над **K** (смотри 6.204, 6.205 и 12.202 [33]).

Положим также $N_\mu(x) := \inf\{\|U\|_\mu : x \in U \in \mathcal{R}\}$ для любого $x \in G$. Если функция f является конечной линейной комбинацией над полем **K** характеристических функций Ch_A подмножеств $A \subset G$ из $\mathcal{R}$, тогда она называется простой. Функция $f : G \to X$ называется μ-интегрируемой, если существует последовательность $f_1, f_2, ...$ простых функций такая, что существует $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{N_\mu,u} = 0$ для любого $u \in \mathcal{S}$.

Пространство $L(\mu, X) = L(G, \mathcal{R}, \mu, X)$ всех μ-интегрируемых функций со значениями в X является **K**-линейным. В то же время, $\int_G \sum_{j=1}^n a_j Ch_{A_j}(x)\mu(dx) := \sum_{j=1}^n a_j\mu(A_j)$ для простых функций продолжается на $L(\mu, X)$, где $a_j \in X$, $A_j \in \mathcal{R}$ для любого j.

Положим $\mathcal{R}_\mu := \{A : A \subset G, Ch_A \in L(\mu, \mathbf{K})\}$. Для $A \in \mathcal{R}_\mu$ пусть $\bar\mu(A) := \int_G \chi_A(x)\mu(dx)$.

Для $1 \le q < \infty$ мы обозначим через

$\|f\|_q := [\sup_{x\in G} |f(x)|^q N_\mu(x)]^{1/q}$ норму для простой функции $f : G \to X$, когда X является банаховым пространством, или

$\|f\|_{q,u} := [\sup_{x\in G} u(f(x))^q N_\mu(x)]^{1/q}$ для любого $u \in \mathcal{S}$, когда X является полным **K**-выпуклым пространством. Пополнение пространства всех простых функций по $\| * \|_q$ или $\{\| * \|_{q,u} : u \in \mathcal{S}\}$ мы обозначим через $L^q(\mu, X)$, где $L(\mu, X) = L^1(\mu, X)$.

Пусть G - это вполне несвязное полное регулярное пространство, пусть также $\mathsf{B_c}(G)$ - это покрывающее кольцо, состоящее из всех открыто-замкнутых компактных подмножеств в G, предположим также, что $\mu : \mathsf{B_c}(G) \to \mathbf{K}$ является конечно-аддитивной функцией такой, что её ограничение $\mu|_A$ для любого $A \in \mathsf{B_c}(G)$ является мерой на разделяющем покрывающем кольце $\mathcal{R}(G)|_A$, где $\mathsf{B_c}(G)|_A = \mathcal{R}|_A$, $\mathcal{R}|_A := \{E \in \mathcal{R} : E \subseteq A\}$.

Мера $\eta : \mathcal{R} \to \mathbf{K}$ называется абсолютно непрерывной относительно меры $\mu : \mathcal{R} \to \mathbf{K}$, если существует функция $f \in L(\mu, \mathbf{K})$ такая, что $\eta(A) = \int_G Ch_A(x)f(x)\mu(dx)$ для любого $A \in \mathcal{R}$, обозначим её через $\eta \preceq \mu$. Если $\eta \preceq \mu$ и $\mu \preceq \eta$, тогда мы скажем, что η и μ эквивалентны $\eta \sim \mu$.

K-значную меру P на $\mathcal{R}(X)$ мы назовем вероятностной мерой, если $\|X\|_P =: \|P\| = 1$ и $P(X) = 1$ (смотри [32]).

Также являются полезными следующие утверждение из неархимедова функционального анализа, которые доказаны в [37].

2. Лемма *Пусть μ - это мера на $\mathcal{R}$. Существует и единственная функция $N_\mu : G \to [0, \infty)$ такая, что*

(1) $\|Ch_A\|_{N_\mu} = \|A\|_\mu$;

(2) *if $\phi : G \to [0, \infty)$ и $\|Ch_A\|_\phi \le \|A\|_\mu$ для любого $A \in \mathcal{R}$, тогда $\phi \le N_\mu$; $N_\mu(x) = \inf_{x\in A, A\in\mathcal{R}} \|A\|_\mu$ для любого $x \in X$.*

3. Теорема. *Пусть μ - это мера на $\mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{R}_\mu$ - это покрывающее кольцо для G и $\bar\mu$ - это мера на $\mathcal{R}_\mu$ продолжающая меру μ.*

4. Лемма. *Если μ - это мера на $\mathcal{R}$, то $N_\mu = N_{\bar\mu}$ и $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_{\bar\mu}$.*

5. Теорема. *Пусть μ - это мера на $\mathcal{R}$, тогда N_μ является полунепрерывной сверху и для всякого $A \in \mathcal{R}_\mu$ и $\epsilon > 0$ множество $\{x \in A : N_\mu(x) \ge \epsilon\}$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным.*

6. Теорема. *Пусть μ - это мера на $\mathcal{R}$, Пусть также $\mathcal{S}$ - это разделяющее покрывающее кольцо для G, которое является подкольцом в $\mathcal{R}_\mu$ и пусть ν является ограничением меры μ на $\mathcal{S}$. Тогда $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_\mu$ и $\bar{\nu} = \bar{\mu}$.*

7. Замечания и определения. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - это вероятностное пространство, где Ω - пространство элементарных событий, $\mathcal{A}$ - разделяющее покрывающее кольцо событий в Ω, $\mathcal{R}(\Omega) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}_P(\Omega)$, $P : \mathcal{A} \to \mathbf{K}$ - это вероятность, $\mathbf{K}$ - это неархимедово поле нулевой характеристики, $char(\mathbf{K}) = 0$, полное относительно своей мультипликативной нормы, $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q_p}$, $1 < p$ - это простое число, $\mathbf{Q_p}$ - это поле p-адических чисел.

Обозначим через ξ случайный вектор (случайную величину при $n = 1$) со значениями в $\mathbf{K^n}$ или в линейном топологическом пространстве X над $\mathbf{K}$ такой, что он имеет вероятностное распределение $P_\xi(A) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\})$ для любого $A \in \mathcal{R}(X)$, где $\xi : \Omega \to \mathbf{X}$, ξ является $(\mathcal{A}, \mathcal{R}(X))$-измеримым, где $\mathcal{R}(X)$ - это разделяющее покрывающее кольцо для X такое, что $\mathcal{R}(X) \subset \mathsf{Bco}(X)$, $\mathsf{Bco}(X)$ обозначаете разделяющее покрывающее кольцо всех открыто-замкнутых (одновременно замкнутых и открытых) подмножеств в X. То есть, $\xi^{-1}(\mathcal{R}(X)) \subset \mathcal{A}$. Если T - это множество и $\xi(t)$ - случайный вектор для любого $t \in T$, тогда $\xi(t)$ называется случайной функцией (или стохастической функцией). В частности, если T - это подмножество в поле, тогда $\xi(t)$ называется стохастическим процессом, в то время как $t \in T$ интерпретируется как временной параметр.

Как обычно положим $M(\xi^k) := \int_\Omega \xi^k(\omega)P(d\omega)$ для случайной величины ξ и $k \in \mathbf{N}$ всякий раз когда такой k-й момент существует.

Случайный векторы ξ и η со значениями в X называется независимыми, если $P(\{\xi \in A, \eta \in B\}) = P(\{\xi \in A\})P(\{\eta \in B\})$ для любых $A, B \in \mathcal{R}(X)$.

8. Определение. Пусть $\{\Omega, \mathcal{R}, P\}$ - это вероятностное пространство с вероятностной мерой со значениями в неархимедовом поле $\mathbf{K}$ полным относительно своей мультипликативной нормы, $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q_p}$. Рассмотрим множество G и кольцо J его подмножеств. Пусть $\xi(A) = \xi(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, является $\mathbf{K}$ - значной случайной величиной для любого $A \in J$, так что

$(M1)$ $\xi(A) \in Y$, $\xi(\emptyset) = 0$, где $Y = L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K})$;

$(M2)$ $\xi(A_1 \cup A_2) = \xi(A_1) + \xi(A_2)\ mod(P)$ для любого $A_1, A_2 \in J$ с $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

$(M3)$ $M(\xi(A_1)\xi(A_2)) = \mu(A_1 \cap A_2)$;

$(M4)$ $M(\xi(A_1)\xi(A_2)) = 0$ для любого $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1, A_2 \in J$, то есть $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ являются ортогональными случайными величинами, где $\mu(A) \in \mathbf{K}$ для любых $A, A_1, A_2 \in J$.

Семейство случайных величин $\{\xi(A) : A \in J\}$ удовлетворяющих условиям $(M1 - M4)$ мы назовем элементарной ортогональной $\mathbf{K}$-значной стохастической мерой.

9. Пример. Если $\xi(A)$ имеет нулевое среднее значение $M\xi(A) = 0$ для любого $A \in J$, тогда как $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ - это независимые случайные величины для $A_1, A_2 \in J$ с $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, тогда они ортогональны, так как $M(\xi(A_1)\xi(A_2)) = (M\xi(A_1))(M\xi(A_2))$.

10. Лемма. *Функция μ из определения 8 аддитивна.*

Доказательство. Поскольку $\xi(A) \in Y = L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K})$ для любого $A \in J$, тогда существует $M\xi(A) = \int_\Omega \xi(\omega, A)P(d\omega)$, так как $\sup_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega, A)|^2 N_P^2(\omega) \le \sup_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega, A)|^2 N_P(\omega)$ для вероятностной меры P имеющей $N_P(\omega) \le 1$ для любого $\omega \in \Omega$, то есть, $L^1(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K})$.

Поэтому, из условий $(M2, M4)$ для любого $A_1, A_2 \in J$ с пустым пересечением $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ вытекают равенства:

$M(\xi^2(A_1 \cup A_2)) = M[(\xi(A_1) + \xi(A_2))^2]$

$= M[\xi^2(A_1) + 2\xi(A_1)\xi(A_2) + \xi^2(A_2)] = M\xi^2(A_1) + M\xi^2(A_2)$. В силу $(M3)$ этот дает

$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

11. Замечание. Предположим, что μ имеет продолжение до меры на разделяющем покрывающем кольце $\mathcal{R}(G)$, G есть вполне несвязное полное регулярное пространство, где $J \subset \mathcal{R}_\mu(G)$.

12. Определения. Пусть случайная функция $\xi(t)$ принимает значения в полном линейном локально $\mathbf{K}$-выпуклом пространстве X над $\mathbf{K}$, $t \in T$, где (T, ρ) - это метрическое пространство с метрикой ρ. Тогда $\xi(t)$ называется стохастически непрерывным в точке t_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\lim_{\rho(t,t_0)\to 0} P(\{u(\xi(t) - \xi(t_0)) > \epsilon\}) = 0$ для любого $u \in \mathcal{S}$. Если $\xi(t)$ стохастически непрерывна в каждой точке подмножества E в T, тогда она называется стохастически непрерывной на E.

Если $\lim_{R\to\infty} \sup_{t\in E} P(\{u(\xi(t)) > R\}) = 0$ для любого $u \in \mathcal{S}$, тогда случайная функция $\xi(t)$ называется стохастически ограниченной на E.

Пусть $L^0(\mathcal{R}(G), X)$ обозначает класс всех ступенчатых (простых) функций $f(x) = \sum_{k=1}^m c_k Ch_{A_k}(x)$, где $c_k \in X$, $A_k \in \mathcal{R}(G)$ для любого $k = 1, ..., m \in \mathbf{N}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$ для любого $k \ne j$. Тогда неархимедов стохастический интеграл по элементарной ортогональной стохастической мере $\xi(A)$ функции $f \in L^0(\mathcal{R}(G), X)$ определяется по формуле:

(SI) $\eta(\omega) := \int_G f(x)\xi(\omega, dx) := \sum_{k=1}^m c_k \xi(\omega, A_k)$.

13. Лемма. *Пусть* $f, g \in L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$, *где* $f(x) = \sum_{k=1}^m c_k Ch_{A_k}(x)$ *и* $g(x) = \sum_{k=1}^m d_k Ch_{A_k}(x)$, *тогда* $M(\int_G f(x)\xi(dx) \int_G g(y)\xi(dy)) = \sum_{k=1}^m c_k d_k \mu(A_k)$ *и существует* $\mathbf{K}$*-линейное вложение пространства* $L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ *в* $L^2(\mu, \mathbf{K})$.

Доказательство. В силу условий $(M1, M2)$ существует $\int_G f(x)\xi(\omega, dx) \in Y = L(P)$. Поскольку $\int_G f(x)\xi(dx) \int_G g(y)\xi(dy) = \sum_{k,j=1}^m c_k d_j \xi A_k)\xi(A_j$, то $M(\int_G f(x)\xi(dx) \int_G g(y)\xi(dy)) = \sum_{k,j=1}^n c_k d_j M(\xi(A_k)\xi(A_j)) = \sum_{k=1}^m c_k d_k \mu(A_k)$ благодаря условиям $(M3, M4)$, так как $A_k \cap A_j = \emptyset$ для любого $j \ne k$. Этот дает $\mathbf{K}$-линейное вложение θ пространства $L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ в $L^2(\mu, \mathbf{K})$ такое, что $\theta(f) = \sum_{k=1}^n c_k Ch_{A_k}(x)$ и

(i) $\|\theta(f)\|_2 = [\max_{k=1}^m |c_k|^2 \sup_{x\in A_k} N_\mu(x)]^{1/2} = [\max_{k=1}^m |c_k|^2 \|A_k\|_\mu]^{1/2} < \infty$ благодаря лемме 2.

14. Замечание. Обозначим через $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ пополнение пространства $L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ по норме $\| * \|_2$ индуцированной из $L^2(\mu, \mathbf{K})$.

15. Определение. Продолжим неархимедов стохастическим интеграл по элементарной ортогональной стохастической мере $\xi(A)$ с пространства функции $f \in L^0(\xi, X)$ из §12 на те функции, для которых интеграл существует как предел направленности в $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$.

Далее этот предельный переход детально описан.

16. Лемма. *Пусть* $f, g \in L^0(\xi, \mathbf{K})$, *где* $f(x) = \sum_{k=1}^m c_k \xi(A_k)$ *и* $g(x) = \sum_{k=1}^m d_k \xi(A_k)$, *тогда* $M(\int_G f(x)\xi(dx) \int_G g(y)\xi(dy)) = \sum_{k=1}^m c_k d_k \mu(A_k)$ *и существует* $\mathbf{K}$*-линейное вложение пространства* $L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ *в* $L^2(P, \mathbf{K})$.

Доказательство. В силу условий $(M1, M2)$ существует $\int_G f(x)\xi(\omega, dx) \in Y = L(P, \mathbf{K})$. Но f является ступенчатой функцией, следовательно,

(i) $\|f\|_{L^2(P,\mathbf{K})} = [\max_{k=1}^m |c_k|^2 \sup_{\omega\in\Omega} |\xi^2(\omega, A_k)| N_P(\omega)]^{1/2}$

$= [\max_{k=1}^{m} |c_k|^2 \|\xi(*, A_k)\|^2_{L^2(P)}]^{1/2} < \infty$
и неизбежно $f \in L^2(P)$. Таким образом отображение $\psi(f) := \sum_{k=1}^{m} c_k Ch_{A_k}(x)$ дает $\mathbf{K}$-линейное вложение пространства $L^0(\xi, \mathbf{K})$ в $L^2(P, \mathbf{K})$. Второе утверждение проверяется также как в лемме 13 благодаря формуле $12(SI)$.

17. Замечание. Обозначим через $L^2(\xi, \mathbf{K})$ пополнение пространства $L^0(\xi, \mathbf{K})$ по норме $\| * \|_2$ индуцированной из $L^2(P, \mathbf{K})$.

18. Следствие. *Отображение 12*(SI) *и условия* $(M1 - M4)$ *индуцируют изометрию между* $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ *и* $L^2(\xi)$.

Доказательство. Группа нормирования $\Gamma_{\mathbf{K}} := \{|z| : z \in \mathbf{K}, z \neq 0\}$ содержится в $(0, \infty)$. В силу теоремы 5, лемма 10 и замечания 11 без ограничения общности для ступенчатой функции f мы возьмем представление с $A_k \in \mathcal{R}(G)$ такое, что $\|A_k\|_\mu = |\mu(A_k)|$ для любого $k = 1, ..., m$. Семейство всех таких ступенчатых функций всюду плотно в $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$.

Поскольку $M(\xi^2(A)) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$, то $N_\mu(x) = \inf_{A \in \mathcal{R}(G), x \in A} \|A\|_\mu$, где $\|A\|_\mu = \sup\{|\mu(B)| : B \in \mathcal{R}(G), B \subset A\} = \sup\{|M(\xi^2(B))| : B \in \mathcal{R}(G), B \subset A\}$. С другой стороны, $M(\xi^2(B)) = \int_\Omega \xi^2(\omega, B) P(d\omega)$, $|M(\xi^2(B))| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\xi^2(\omega, B)| N_P(\omega)$. Согласно нашему предположению μ - это мера, следовательно, беря сжимающееся семейство $\mathcal{S}$ в $\mathcal{R}(G)$ таким, что $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \{x\}$, мы получим

$N_\mu(x) = \inf_{A \in \mathcal{R}(G), x \in A} [\sup_{B \in \mathcal{R}(G), B \subset A} \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega, B)|^2 N_P(\omega)]$.
Таким образом $N_\mu(x) = \inf_{A \in \mathcal{R}(G), x \in A} [\sup_{B \in \mathcal{R}(G), B \subset A} \|\xi^2(*, B)\|_{L^2(P)}]$ и $\|A_k\|_\mu = \|\xi(*, A_k)\|^2_{L^2(P)}$ для любого $k = 1, ..., m$ благодаря лемме 2 и в силу выбора $\|A_k\|_\mu = |\mu(A_k)|$ выше.

Отображение ψ из §16 также является $\mathbf{K}$-линейным из $L^0(\xi)$ на $L^0(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$, так что ψ - это изометрия относительно $\| * \|_{L^2(P)}$ и $\| * \|_{L^2(\mu)}$ благодаря формулам $13(i)$ и $16(i)$ и лемме 2, так как $\mathcal{R}(G)$ является разделяющим покрывающим кольцом на G. Пространства $L^2(P)$ и $L^2(\mu)$ полны согласно их определениям, следовательно, ψ имеет $\mathbf{K}$-линейное продолжение из $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ на $L^2(\xi)$, которое осуществляет изометрию между $L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ и $L^2(\xi)$.

19. Определение. Если $f \in L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$, тогда положим по определению:

$\eta = \psi(f) = \int_G f(x) \xi(dx)$.

Случайную величину η мы назовем неархимедовым стохастическим интегралом функции f по мере ξ.

Взятие предела в $L^2(P, X)$ мы обозначим также $l.i.m.$.

20. Теорема. *1. Для ступенчатой функции* $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k Ch_{A_k}(x)$, *где* $a_k \in \mathbf{K}$, $A_k \in \mathcal{R}(G)$, $n = n(f) \in \mathbf{N}$, *стохастический интеграл дается формулой:*

$\eta = \int f(x) \xi(dx) = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi(A_k)$.

2. Для любых $f, g \in L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ *выполняется тождество:*

$M(\int_G f(x) \xi(dx) \int_G g(y) \xi(dy)) = \int_G f(x) g(x) \mu(dx)$.

3. Для любых $f, g \in L^2(\mathcal{R}(G), \mathbf{K})$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ *стохастический интеграл* $\mathbf{K}$-*линеен:*

$\int_G [\alpha f(x) + \beta g(x)] \xi(dx) = \alpha \int_G f(x) \xi(dx) + \beta \int_G g(x) \xi(dx)$.

4. Для любой последовательности функций $f_n \in L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathbf{K})$ *такой, что* $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_{L^2(\mu, \mathbf{K})} = 0$ *существует предел:*

$\int_G f(x) \xi(dx) = l.i.m._{n \to \infty} \int_G f_n(x) \xi(dx)$.

5. Существует продолжение ξ *с* $\mathcal{R}$ *на* $\mathcal{R}_\mu(G)$.

Доказательство. Утверждения (1) и (3) следуют из рассмотрения выше. Для окончания доказательства (2) достаточно показать, что $fg \in L^1(\mu, \mathbf{K})$, если f и $g \in L^2(\mu, \mathbf{K})$, где μ - это мера на G. Поскольку $2|f(x)g(x)| \le |f(x)|^2 + |g(x)|^2$ для любого $x \in G$, тогда $2\sup_{x\in G}|f(x)g(x)|N_\mu(x) \le \sup_{x\in G}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)N_\mu(x) \le \|f\|^2_{L^2(\mu)} + \|g\|^2_{L^2(\mu)}$, следовательно, $f(x)g(x)$ является μ-интегрируемой.

4. Из $\lim_{n\to\infty}[\sup_{x\in G}|f(x) - f_n(x)|^2 N_\mu(x)] = 0$ и $M[\int_G(f - f_n)(x)\xi(dx)\int_G(f - f_n)(y)\xi(dy)] = \int_G(f - f_n)^2(x)\mu(dx)$ следует, что $\lim_{n\to\infty} M[(\int_G(f - f_n)(x)\xi(dx))^2] = 0$, то есть $l.i.m._{n\to\infty}\int_G f_n(x)\xi(dx) = \int_G f(x)\xi(dx)$ благодаря следствию 18.

5. Продолжим теперь стохастическую меру ξ с $\mathcal{R}(G)$ до $\tilde{\xi}$ на $\mathcal{R}_\mu(G)$. Если $A \in \mathcal{R}_\mu(G)$, то $Ch_A \in L(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathbf{K})$. Поскольку $Ch_A \in L(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathbf{K})$, то $\sup_{x\in A} N_\mu(x) < \infty$. Положим $\tilde{\xi}(A) := \int_G Ch_A(x)\xi(dx) = \int_A \xi(dx)$ для любого $A \in \mathcal{R}_\mu(G)$, следовательно,

(1) $\tilde{\xi}$ определено на $\mathcal{R}_\mu(G)$.

Поэтому, $\tilde{\xi}(A) = \xi(A)$ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$. Для любых $A, B \in \mathcal{R}_\mu(G)$ существуют последовательности простых функций $f_n = \sum_k a_{k,n}Ch_{A_{k,n}}$, $g_m = \sum_l b_{l,m}Ch_{B_{l,m}}$ с $a_{k,n}, b_{l,m} \in \mathbf{K}$, $A_{k,n}, B_{l,m} \in \mathcal{R}(G)$ такие, что $\lim_{n\to\infty}\|Ch_A - f_n\|_{L(\mu)} = 0$ и $\lim_{m\to\infty}\|Ch_B - g_m\|_{L(\mu)} = 0$. Поскольку $M(a_{k,n}\tilde{\xi}(A_{k,n})b_{l,m}\tilde{\xi}(B_{l,m})) = a_{k,n}b_{l,m}\mu(A_{k,n}\cap B_{l,m})$ для любого k, n, l, m, тогда

(2) $M(\tilde{\xi}(A)\tilde{\xi}(B)) = \bar{\mu}(A\cap B)$ для любых $A, B \in \mathcal{R}_\mu(G)$, где $\bar{\mu}$ - это продолжение меры μ с $\mathcal{R}(G)$ на $\mathcal{R}_\mu(G)$. Если $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\mu(G)$ - это сжимающееся семейство такое, что $\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \emptyset$, тогда

(3) $l.i.m._{A\in\mathcal{S}}\tilde{\xi}(A) = 0$ в силу следствия 18, так как $M[\tilde{\xi}(A)]^2 = \bar{\mu}(A)$ и $\lim_{A\in\mathcal{S}}\bar{\mu}(A) = 0$ согласно теореме 3.

21. Определение. Случайная функция множеств удовлетворяющая условиям 20.5$(1-3)$ называется ортогональной стохастической мерой.

22. Следствие. *Пусть ξ и $\tilde{\xi}$ такие же как в теореме 20.5, тогда $L^2(\xi, \mathbf{K}) = L^2(\tilde{\xi}, \mathbf{K})$.*

23. Замечание. Если ξ - это ортогональная стохастическая мера со структурной мерой μ на $\mathcal{R}_\mu(G)$ и $g \in L^2(\mu, \mathbf{K})$, тогда положим $\rho(A) := \int_G Ch_A(x)g(x)\xi(dx)$ для любого $A \in \mathcal{R}_\mu(G)$ и $\nu(A) := \int_A g^2(x)\mu(dx)$.

24. Лемма. *Если $f \in L^2(\nu, \mathbf{K})$, тогда $f(x)g(x) \in L^2(\mu, \mathbf{K})$ и $\int_G f(x)\rho(dx) = \int_G f(x)g(x)\xi(dx)$.*

Доказательство. В силу теорем 20 для любых $A, B \in \mathcal{R}_\mu(G)$ выполняется равенство

$M[\rho(A)\rho(B)] = M[\int_G Ch_A(x)g(x)\xi(dx)\int_G Ch_B(y)g(y)\xi(dy)$

$= \int_{A\cap B} g^2(x)\mu(dx) = \nu(A\cap B)$.

Поскольку $g \in L^2(\mu, \mathbf{K})$, тогда ν - это мера абсолютно непрерывная относительно μ на $\mathcal{R}_\mu(G)$. Если $f(x) = \sum_k a_k Ch_{A_k}(x)$ - это простая функция с $a_k \in \mathbf{K}$ и $A_k \in \mathcal{R}_\mu(G)$, тогда $\int_G f(x)\rho(dx) = \sum_k a_k \int_G Ch_{A_k}(x)g(x)\xi(dx) = \sum_k a_k\rho(A_k) = \int_G f(x)g(x)\xi(dx)$, так как

$\sup_{x\in G}|f(x)g(x)|^2 N_\mu(x) \le [\max_k |a|^2_k]\sup_{x\in G}|g(x)|^2 N_\mu(x) < \infty$.

Если f_n - это фундаментальная последовательность простых функций в $L^2(\nu, \mathbf{K})$, тогда $M[(\int_G(f_n - f_m)(x)\rho(dx))^2] = \int_G[(f_n - f_m)(x)]^2 g^2(x)\mu(dx)$, следовательно, $f_n g$ является фундаментальной последовательностью в $L^2(\mu, \mathbf{K})$. Поэтому существует предел

$\lim_{n\to\infty}\int_G f_n(x)\rho(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_G f_n(x)g(x)\xi(dx)$,
следовательно, $\int_G f(x)\rho(dx) = \int_G f(x)g(x)\xi(dx)$.

25. Лемма. *Если* $A\in\mathcal{R}_\mu(G)$, *тогда* $\xi(A) = \int_G [Ch_A(x)/g(x)]\rho(dx)$.

Доказательство. Поскольку $\nu(\{x : g(x) = 0\}) = 0$, то $1/g(x)$ определена ν-почти всюду на G, следовательно,

$$\int_G [Ch_A(x)/g^2(x)]\nu(dx) = \int_G [g^2(x)/g^2(x)]\mu(dx) = \mu(A).$$

В силу леммы 24 $\int_G [Ch_A(x)/g(x)]\rho(dx) = \int_G [Ch_A(x)g(x)/g(x)]\xi(dx) = \xi(A)$.

26. Обозначения и замечание. Пусть T - это вполне несвязное хаусдорфово топологическое пространство с разделяющим покрывающим кольцом $\mathcal{R}(T)$ и нетривиальной мерой $h : \mathcal{R}(T)\to\mathbf{K}$. Обозначим посредством $B(X,x,R) := \{y\in X : \rho(x,y)\le R\}$ шар в метрическом пространстве (X,ρ) с метрикой ρ, $0<R<\infty$. В частности, T может быть или открыто-замкнутым подмножеством в $\mathbf{K_r}$, или сегментом в $\mathbf{R}$, h может быть нетривиальной $\mathbf{K}$-значной мерой на разделяющем покрывающем кольце $\mathcal{R}(B(T,t_0,R))$ для любого $t_0\in T$ и всякого $0<R<\infty$, где $\mathcal{R}(B(T,t_0,R_1))\subset\mathcal{R}(B(T,t_0,R_2))$ для любого $0<R_1<R_2<\infty$ и каждого $t_0\in T$, $\mathbf{K}\supset\mathbf{Q_p}$, $\mathbf{K_r}\supset\mathbf{Q_{p'}}$, $r=p'$, r и p - это простые числа, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K_r}$ - это неархимедовы поля полные относительно своих мультипликативных норм.

Существует непрерывное отображение из открыто-замкнутого подмножества в $\mathbf{Q'_p}$ на $[a,b]$ в $\mathbf{R}$, $-\infty<a<b<\infty$ (смотри [10]), следовательно, подходящее разделяющее покрывающее кольцо $\mathcal{R}(T)$ и h существуют на $[a,b]$.

Напомним, что мера $h : \mathsf{B_c}(\mathbf{K_r})\to\mathbf{K}$ называется мерой Хаара, если $h(t+B) = h(B)$ для любого открыто-замкнутого компактного подмножества B в $\mathbf{K_r}$ и каждого $t\in\mathbf{K_r}$. Мера Хаара существует в силу теоремы Монна-Спрингера 8.4 [37], когда $r\ne p$ взаимно просты, $(r,p)=1$, так как $B(\mathbf{K_r},0,R)$ является p-свободной. Например, можно взять нетривиальную $\mathbf{K}$-значную меру Хаара h на $\mathsf{B_c}(\mathbf{K_r})$ такой, что $h(B(\mathbf{K_r},0,1)) = 1$, но в общем мы не требуем, чтобы h была мерой Хаара или $r\ne p$.

Предположим, что функция $g(t,x)$ на $T\times G$ является $\mathcal{R}_h\times\mathcal{R}_\mu$-измеримой и $g\in L^2(T\times G,\mathcal{R}_h\times\mathcal{R}_\mu,h\times\mu,\mathbf{K})$, где $\mathcal{R}_h := \mathsf{B}_{\mathsf{c}h}(\mathbf{K_r})$.

27. Лемма. *Стохастический интеграл*

(1) $\rho(t) = \int_G g(t,x)\xi(dx)$ *определен для всякого* $t\in T$ *для* P*-почти всех* $\omega\in\Omega$ *и его можно определить таким, чтобы стохастическая функция* $\rho(t)$ *была измеримой.*

Доказательство. Если $g(t,x) = \sum_k a_k Ch_{B_k}(t)Ch_{A_k}(x)$ - это простая функция с $A_k\in\mathcal{R}_\mu$ и $B_k\in\mathcal{R}_h$, и $a_k\in\mathbf{K}$ для любого $k=1,...,m$, $m\in\mathbf{N}$, тогда $\rho(t) = \sum_k a_k Ch_{B_k}(t)\xi(A_k)$ является $\mathcal{R}_h\times\mathcal{A}$-измеримой функцией величин $(t,\omega)\in T\times\Omega$ (смотри также определения 7). Для любого $g\in L^2(h\times\mu,\mathbf{K})$ существует последовательность простых функций $g_n(t,x)$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in T,x\in G}|g(t,x) - g_n(t,x)|^2 N_h(t)N_\mu(x) = 0$.

Пусть $\rho_n(t) := \int_G g_n(t,x)\xi(dx)$, тогда существует стохастическая функция $\tilde\rho(t)$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in T}|M[(\tilde\rho(t)-\rho_n(t))^2]|N_h(t) = 0$. Выполняется равенство $\int_T M[(\tilde\rho(t)-\rho_n(t))^2]h(dt) = \int_T\int_G [g(t,x)-g_n(t,x)]^2\mu(dx)h(dt)$, следовательно, $\sup_{t\in T}|M[(\tilde\rho(t)-\rho_n(t))^2]|N_h(t)\le\sup_{t\in T,x\in G}|g(t,x)-g_n(t,x)|^2N_h(t)N_\mu(x)<\infty$, и неизбежно стохастическая функция $\tilde\rho(t)$ является $\mathcal{R}_h\times\mathcal{A}$-измеримой по $(t,\omega)\in$

$T \times \Omega$ и она существует с вероятностью единица. Таким образом, $h(\{t \in A : M[(\rho(t) - \tilde{\rho}(t))^2] = 0\}) = h(A)$ для любого $A \in \mathcal{R}(T)$.

Наконец, положим $\eta(t) = \tilde{\rho}(t)$, если $P(\{\rho(t) \neq \tilde{\rho}(t)\}) = 0$, в то время как $\eta(t) = \rho(t)$, если $P(\{\rho(t) \neq \tilde{\rho}(t)\}) \neq 0$. Поэтому, стохастическая функция η является $\mathcal{R}_h \times \mathcal{A}$-измеримой, так как η отличается от $\mathcal{R}_h \times \mathcal{A}$-измеримой функции $\tilde{\rho}(t)$ на множестве нулевой $h \times P$-меры и η стохастически эквивалентна ρ.

28. Замечание. Далее благодаря лемме 27 мы будем предполагать, что стохастические интегралы 27(1) являются $\mathcal{R}_h \times \mathcal{A}$-измеримыми.

29. Лемма. *Если $g(t,y)$ и $z(t)$ являются $\mathcal{R}_h \times \mathcal{R}_\mu$ и $\mathcal{R}_h$-измеримыми функциями, $g \in L^2(T \times \mathbf{K}, \mathcal{R}_h \times \mathcal{R}_\mu, h \times \mu, \mathbf{K})$ и $z \in L^2(T, \mathcal{R}_h, h, \mathbf{K})$, ξ - это ортогональная стохастическая мера на $(\mathbf{K}, \mathcal{R}_\mu)$, тогда*

(1) $\int_T z(t) \int_{\mathbf{K}} g(t,y)\xi(dy)h(dt) = \int_{\mathbf{K}} q(y)\xi(dy)$,

где $q(y) = \int_T z(t)g(t,y)h(dt)$.

Доказательство. Поскольку $z \in L^2(h)$ и $g \in L^2(h \times \mu)$, тогда

(2) $\sup_{t\in T, y\in \mathbf{K}} |z(t)g(t,y)|^2 N_h^2(t)N_\mu(y) \le$

$[\sup_{t\in T} |z(t)|^2 N_h(t)] \sup_{t\in T, y\in\mathbf{K}} |g(t,y)|^2 N_h(t)N_\mu(y) < \infty$.

Рассмотрим $g \in L^2(h \times \mu)$ и последовательность $g_n(t,y) = \sum_k a_{k,n} Ch_{B_{k,n}}(t) Ch_{A_{k,n}}(y)$ ступенчатых функций сходящуюся к g в $L^2(h \times \mu, \mathbf{K})$, где $a_{k,n} \in \mathbf{K}$, $A_{k,n} \in \mathcal{R}_\mu$, $B_{k,n} \in \mathcal{R}_h$ для любого k, n. Среднее значение квадрата левой части уравнения (1) таково:

(3) $M([\int_T z(t) \int_{\mathbf{K}} g(t,y)\xi(dy)h(dt)]^2)$

$= (\int_T \int_T z(t_1)z(t_2) \int_{\mathbf{K}} g(t_1,y)g(t_2,y)\mu(dy)h(dt_1)h(dt_2)$

$= \int_{\mathbf{K}} [\int_T z(t)g(t,y)h(dt)]^2 \mu(dy)$.

Уравнение (1) выполняется для ступенчатых функций. В силу (3) левые и правые части (1) непрерывны относительно взятия предела по $g_n(t,y)$ в $L^2(h \times \mu, \mathbf{K})$ в средне квадратичном смысле относительно вероятности P также в пространстве $L^2(P, \mathbf{K})$. Поскольку семейство ступенчатых функций плотно в $L^2(h \times \mu, \mathbf{K})$, то мы получаем утверждение этой леммы.

30. Замечание и обозначения. Если условия леммы 29 выполнены для любого $T = B(\mathbf{K_r}, 0, R)$, или $T = [-R, R]$ соответственно, $0 < R < \infty$ и если существует

$\int_{\mathbf{K_r}} z(t)g(t,y)h(dt) = \lim_{R\to\infty} \int_{B(\mathbf{K_r},0,R)} z(t)g(t,y)h(dt)$

в $L^2(\mu)$, тогда

(1) $\int_{\mathbf{K_r}} z(t) \int_{\mathbf{K}} g(t,y)\xi(dy)h(dt) = \int_{\mathbf{K}} s(y)\xi(dy)$,

где $s(y) := \int_{\mathbf{K_r}} z(t)g(t,y)h(dt)$. Этот вытекает из леммы 29, так как левая часть 30(1) является пределом левой части 29(1), когда R стремится к бесконечности. В правой части 29(1) можно взять предел под знаком стохастического интеграла в среднеквадратичном смысле относительно вероятности P также в пространстве $L^2(P)$.

Опишем теперь обобщение конструкции данной выше на $\mathbf{K}$-линейное пространства X, которые могут быть бесконечномерными над $\mathbf{K}$.

3. Векторные спектральные функции

31. Пусть X - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство над бесконечным полем $\mathbf{K}$ нулевой характеристики, $char(\mathbf{K}) = 0$, с неархимедовой мультипликативной нормой, относительно которой $\mathbf{K}$ полно. Тогда пространство $Lin(X, X) =$

$Lin(X)$ всех $\mathbf{K}$-линейных непрерывных операторов $F : X \to X$ локально $\mathbf{K}$ выпукло и полно. $\mathbf{K}$-линейный непрерывный оператор F называется компактным, если для любого $\epsilon > 0$ существует конечномерное над $\mathbf{K}$ векторное подпространство X_ϵ такое, что оно имеет дополнение $Z_\epsilon := X \ominus X_\epsilon$ в X и $u(Fx) \le \epsilon u(x)$ для любого $x \in Z_\epsilon$ и каждой преднормы u в X, где Z_ϵ является $\mathbf{K}$-векторным подпространством в X таким, что $Z_\epsilon \cap X_\epsilon = \{0\}$, $Z_\epsilon \oplus X_\epsilon = X$. Рассмотрим подпространство $Lc(X)$ в $Lin(X)$ всех компактных операторов в X.

Пусть $W_1 : X \to X^T$ и $W_2 : Lin(X) \to Lin(X)$ - это линейные изоморфизмы транспозиции, которые мы просто обозначим через W, так что ограничение W на каждое конечномерное подпространство $\mathbf{K^n}$ в X или $Mat_n(\mathbf{K})$ в $Lin(\mathbf{K})$ дает $W(F)$ - транспонированный вектор или матрицу, где $Mat_n(\mathbf{K})$ обозначает $\mathbf{K}$-линейное пространство всех $n \times n$ матриц с элементами из $\mathbf{K}$. Предположим, что существуют $\mathbf{K}$-билинейные непрерывные умножения

$(T1)$ $X \times X \ni \{a, b^T\} \mapsto (a, b) \in \mathbf{K}$ и

$(T2)$ $X \times X \ni \{a^T, b\} \mapsto [a, b] \in Lc(X)$, то есть по паре переменных,
где $b^T := W(b)$.

31.1. Примеры. Пусть $X = c_0(\alpha, \mathbf{K})$ - это банахово пространство состоящее из векторов $x = (x_j : j \in \alpha, x_j \in \mathbf{K})$ таких, что для любого $\epsilon > 0$ множество $\{j : |x_j| > \epsilon\}$ конечно с нормой $\|x\|_{c_0} := \sup_{j\in\alpha} |x_j|$, где α - это множество. В силу теоремы Цермело (смотри [10]) в качестве α можно взять ординал. Это банахово пространство $c_0(\alpha, \mathbf{K})$ имеет стандартный базис $\{e_j : j \in \alpha\}$, где $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ с 1 на j-м месте и остальными нулевыми координатами. Этот базис ортонормирован в неархимедовом смысле [37].

Тогда для любого $F \in Lin(X)$ имеются $F_{i,j} \in \mathbf{K}$ такие, что

(1) $Fe_i = \sum_{j\in\alpha} F_{i,j} e_j$ для любого $i \in \alpha$.
Если $F \in Lc(X)$, тогда для любого $\epsilon > 0$ множество $\beta(F) := \{(i, j) : |F_{i,j}| > \epsilon, i, j \in \alpha\}$ конечно, где $X_\epsilon = span_{\mathbf{K}}\{e_j : \exists (i, j) \vee (j, i) \in \beta(F)\}$, $span_{\mathbf{K}}\{y_j : j \in \beta\} := \{z = a_1 y_{j_1} + ... + a_k y_{j_k} : a_1, ..., a_k \in \mathbf{K}, k \in \mathbf{N}, j_1, ..., j_k \in \beta\}$ обозначает $\mathbf{K}$-линейную оболочку векторов.

Если x - это вектор-строка, тогда $W(x)$ - это вектор-столбец. Если $F \in Lin(c_0(\alpha, \mathbf{K}))$, тогда $[W(F)]_{i,j} = F_{j,i}$ для любых $i, j \in \alpha$. Взятие $\epsilon_n = p^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, дает, что x имеет ненулевые координаты только для счетного подмножества $\beta(x) \subset \alpha$ и существует $\lim_{j\in\alpha} x_j = 0$. Если $a \in X$ и $b \in X$, тогда $(a, b) = \sum_{j\in\alpha} a_j b_j$ сходится в силу неархимедова неравенства для нормы и $\lim_{j\in\alpha} a_j b_j = 0$. Если $a, b \in X$, тогда $[a, b] = F$ с $F_{l,j} = a_l b_j$ для всяких $l, j \in \alpha$, следовательно, $F \in Lc(c_0(\alpha, \mathbf{K}))$.

Если поле $\mathbf{K}$ сферически полно, тогда банахово пространство над $\mathbf{K}$ изоморфном с $c_0(\alpha, \mathbf{K})$ для некоторого множества α, и каждое замкнутое $\mathbf{K}$-линейное подпространство Z в X имеет дополнение (смотри теоремы 5.13 и 5.16 [37]). Тогда определенные замкнутые $\mathbf{K}$-линейные подпространства произведений банаховых пространств $c_0(\alpha, \mathbf{K})$ могут служить дальнейшими примерами.

32. Замечание. Далее мы будем предполагать, что

(D) полное $\mathbf{K}$-выпуклое пространство X (смотри §31) имеет всюду плотное линейное подпространство X_0 изоморфное с $c_0(\alpha, \mathbf{K})$ такое, что топология τ_0 в X_0 наследуемая из топологии τ в X слабее или равна топологии нормы τ_c в $c_0(\alpha, \mathbf{K})$.

В частном случае $\tau_0 = \tau_c$ мы можем взять $X = c_0(\alpha, \mathbf{K})$.

33. Лемма. *Пусть X - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство удо-*

влетворяющее условию 32(D). Тогда существует непрерывное линейное отображение $Tr : Lc(X) \mapsto \mathbf{K}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $F \in Lc(X)$ и преднорму u в X. Если конечномерное над $\mathbf{K}$ подпространство X_ϵ дополняемо в X, тогда существует $X_{0,\epsilon} := X_0 \cap X_\epsilon$, $X_0 \ominus X_\epsilon = X_0 \cap Z_\epsilon =: Z_{0,\epsilon}$, где $Z_\epsilon = X \ominus X_\epsilon$ и $X_{0,\epsilon} \cap Z_{0,\epsilon} = \{0\}$, так как $X_\epsilon \cap Z_\epsilon = \{0\}$. Таким образом, $X_0 = X_{0,\epsilon} \oplus Z_{0,\epsilon}$.

Следовательно, существует непрерывное компактное ограничение оператора F на X_0. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует конечномерное над $\mathbf{K}$ подпространство $X_{0,\epsilon}$ в X_0 такое, что $u(Fx) \le \epsilon u(x)$ для любого $x \in Z_{0,\epsilon}$ и каждой преднормы u в X_0. Поэтому,

(1) $\lim_{i\in\alpha} \sup_{j\in\alpha} |F_{i,j}| = 0$,

так как семейство преднорм $\{u\}$ разделяет точки в X, где $\{e_j : j \in \alpha\}$ - это базис в X_0 наследуемый из $c_0(\alpha, \mathbf{K})$ и в силу теоремы Цермело мы можем взять в качестве α ординал (смотри пример 31.1). Следовательно, $\sum_{j\in\alpha} F_{j,j}$ сходится в $\mathbf{K}$, так как $\mathbf{K}$ полно относительно своей неархимедовой нормы. Положим

(2) $TrF|_{X_0} := \sum_{j\in\alpha} F_{j,j}$.

Пространство $X_{0,\epsilon}$ изоморфно с $\mathbf{K^m}$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$, где норма в $\mathbf{K^m}$ эквивалентна норме наследуемой из $c_0(\alpha, \mathbf{K})$. Тогда каждый базисный вектор v_k в $X_{0,\epsilon}$ имеет разложение над $\mathbf{K}$ по базису $\{e_j : j \in \alpha\}$, следовательно, для любого $\delta > 0$ существует конечное подмножество β в α такое, что $\|v_k - y_k\|_{c_0} < \delta$ для любого k, где $y_k \in span_{\mathbf{K}}\{e_j : j \in \beta\}$.

Таким образом, для некоторого конечного подмножества β в α для любого $x \in X_{0,\epsilon}$ существует $y \in span_{\mathbf{K}}\{e_j : j \in \beta\}$ такое, что $u(x-y) \le \epsilon u(x)$, так как $0 \le u(ax+by) \le \max(|a|u(x), |b|u(y))$ для любых $x, y \in X$ и $a, b \in \mathbf{K}$. Поэтому, $Tr : Lc(X_0) \to \mathbf{K}$ - это непрерывное $\mathbf{K}$-линейное отображение относительно топологии τ_0 в X_0 даваемой семейством преднорм $\{u\}$ и неизбежно Tr имеет непрерывное $\mathbf{K}$-линейное продолжение на пополнение X пространства X_0 относительно локально $\mathbf{K}$-выпуклой топологии τ в X.

34. Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 33* $F \in Lc(X)$. *Тогда* $\|F|_{X_0}\|_{c_0(\alpha,\mathbf{K})} < \infty$.

Доказательство. Из 33(1) вытекает, что: $\sup_{i,j\in\alpha} |F_{i,j}| < \infty$, но $\sup_{i,j\in\alpha} |F_{i,j}| = \|F|_{X_0}\|_{c_0(\alpha,\mathbf{K})}$.

35. Определение. Предположим, что для любого $A \in \mathcal{R}(G)$ существует случайный вектор $\xi(A) \in X$. Пусть будут выполнены условия:

$(M1)$ $\xi(A) \in Y$, $\xi(\emptyset) = 0$, где $Y = L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, X)$;

$(M2)$ $\xi(A_1 \cup A_2) = \xi(A_1) + \xi(A_2)\ mod(P)$ для любого $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(G)$ с $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

$(M3)$ $M[\xi(A_1), \xi(A_2)] = \mu(A_1 \cap A_2)$;

$(M4)$ $M[\xi(A_1), \xi(A_2)] = 0$ для любого $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(G)$, то есть $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ - это ортогональные случайные величины, где $\mu(A) \in Lc(X)$ для любых $A, A_1, A_2 \in \mathcal{R}(G)$.

Семейство случайных векторов $\{\xi(A) : A \in \mathcal{R}(G)\}$ удовлетворяющих условиям $(M1 - M4)$ мы назовем (элементарной) ортогональный X-значной стохастической мерой, компактный оператор $\mu(A)$ называется структурным оператором.

36. Лемма. *Если* $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(G)$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *тогда* $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Доказательство. Обобщая доказательство леммы 10, мы получим утверждение этой леммы, так как произведение в X со значениями в $Lc(X)$ непрерывно и $Lc(X)$ локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство имеющее также структуру алгебры над $\mathbf{K}$, в то время как $L^1(P,X) \subset L^2(P,X)$:

$\mu(A_1 \cup A_2) = M[\xi(A_1 \cup A_2), \xi(A_1 \cup A_2)] = M[\xi(A_1) + \xi(A_2), \xi(A_1) + \xi(A_2)] = M[\xi(A_1), \xi(A_1)] + M[\xi(A_2), \xi(A_2)] = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, так как

$M[\xi(A_1), \xi(A_2)] = 0$ и $M[\xi(A_2), \xi(A_1)] = 0$ для $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

37. Замечание. Обобщим определения 1. Пусть Z является локально $\mathbf{K}$-выпуклым пространством с семейством преднорм $\mathcal{S}(Z)$ определяющим его топологию. Если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство, $f : \mathcal{R} \to Z$, тогда мы будем писать $\lim_{A \in \mathcal{A}} f(A) = 0$, если для любого $\epsilon > 0$ и каждого $u \in \mathcal{S}(Z)$ существует $A_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $u(f(A)) < \epsilon$ для любого $A \in \mathcal{A}$ с $A \subset A_0$.

Мера $\mu : \mathcal{R} \to Z$ - это отображение со значениями в Z удовлетворяющее следующим условиям:

(i) μ аддитивна;

(ii) для любого $A \in \mathcal{R}$ множество $\{\mu(B) : B \in \mathcal{R}, A \subset B\}$ ограниченное;

(iii) если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство в $\mathcal{R}$ и $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$, тогда $\lim_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) = 0$.

Далее мы предполагаем, что μ имеет продолжение до $Lc(X)$-значной меры на разделяющем покрывающем кольце $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}$.

38. Лемма. *Если X - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство удовлетворяющее условию 32(D) и μ такое же, как и в §37, тогда существует след $Tr\mu(A)$ меры μ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$. Более того, $Tr\mu$ является $\mathbf{K}$-значной мерой.*

Доказательство. В силу леммы 33 существует непрерывное отображение $Tr : Lc(X) \to \mathbf{K}$, следовательно, $Tr\mu(A) \in \mathbf{K}$ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$, так как $\mu(A)$ - это компактный оператор. Тогда $\|\mu(A)\|_u := \sup_{u(x) \ne 0, x \in X,} u(\mu(A)x)/u(x) \le \sup_{i,j \in \alpha} |[\mu(A)]_{i,j}| = \|[\mu(A)]|_{X_0}\|_{c_0} < \infty$ благодаря следствию 34, следовательно,

(1) $|Tr\mu(A)| \le \|[\mu(A)]|_{X_0}\|_{c_0}$

для всякого $A \in \mathcal{R}(G)$. Поэтому, если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство в $\mathcal{R}$ и $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$, тогда $\lim_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) = 0$, следовательно, $\lim_{A \in \mathcal{A}} \|\mu(A)\|_u = 0$ для любой преднормы u в X и неизбежно $\lim_{A \in \mathcal{A}} Tr\mu(A) = 0$ благодаря неравенству (1) и $\mu(A) \in Lc(X)$, и 33(1).

39. Определение. Пусть g - это полная локально $\mathbf{K}$-выпуклая алгебра с единицей 1, а X - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство удовлетворяющее условию 32(D), и пусть одновременно X будет левым g-модулем, где g также удовлетворяет условиям 31$(T1, T2)$. Этот означает, что существует отображение $\mathsf{g} \times X \to X$ удовлетворяющее условиям $(1-5)$:

(1) $b(x_1 + x_2) = bx_1 + bx_2$,

(2) $(b_1 + b_2)x = b_1x + b_2x$,

(3) $b_1(b_2x) = (b_1b_2)x$,

(4) $1x = x$,

(5) существует семейство согласованных преднорм $\mathcal{S} = \{u\}$ в g и X определяющих их хаусдорфовы топологии такие, что $u(bx) \le u(b)u(x)$, $u(ab) \le u(a)u(b)$,

(6) $(ax, by) = (b^T ax, y) = (x, a^T by) \in \mathbf{K}$ и

(7) $[ax, by] = [a,b][x,y] \in Lc(X)$, так что $Lc(X)$ является левым $Lc(\mathsf{g})$-модулем для любых $a, b, b_1, b_2 \in \mathsf{g}$ и всяких $x, y, x_1, x_2 \in X$.

Для любого $f \in L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$ определим стохастический интеграл:

(SI) $\eta = \int_G f(x)\xi(dx) := \sum_k a_k \xi(A_k)$,

где $f(x) = \sum_k a_k Ch_{A_k}(x)$, $a_k \in \mathsf{g}$.

Через $L^0(\xi, \mathsf{g}) = L^0(\xi)$ мы обозначим семейство всех случайных векторов η вида (SI).

40. Примеры. Рассмотрим или $\mathsf{g} = \mathbf{K}$, или подалгебру g в $Lin(X)$, а X - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство, каждая преднорма v в X индуцирует согласованную преднорму $\|F\|_v := \sup_{x\in X, v(x)\ne 0} v(Fx)/v(x)$ для любого $F \in L(X)$. Для простоты мы обозначим $\|F\|_v$ также через $v(F)$ и эти преднормы в X и в $Lin(X)$ согласованы, так как $v(Fx) \le \|F\|_v v(x)$, где мы различаем $v(F)$ и $v(Fx)$, каждое кратное bI единичного оператора I также принадлежит $Lin(X)$ для $b \in \mathbf{K}$.

Возьмем теперь группу H с $\mathbf{K}$-значной мерой ν на $\mathcal{R}(H)$ или, в частности, ν на $\mathsf{B_c}(H)$, а H может быть топологической вполне несвязной группой такой, что $\sup_{x\in H} N_\nu(x) = 1$. Пусть $L^q_b(H, \mathsf{B_c}(H), \nu, \mathsf{b})$ - это пополнение семейства всех ступенчатых функций $f : H \to \mathsf{b}$ с носителями в $A \in \mathsf{B_c}(H)$, на которых $\nu|_A$ - это мера, относительно семейства всех неархимедовых преднорм $\|f\|_{q,b,v} = [\sup_{x\in H, y\in H} v[f(y^{-1}x)]^q N_\nu(x)]^{1/q} < \infty$, где $1 \le q < \infty$, b - это полная локально выпуклая алгебра над $\mathbf{K}$ с семейством преднорм $\{v\}$ в ней и b удовлетворяет условиям $31(T1, T2)$. Конечно, $v(xy) \le v(x)v(y)$ для любых $x, y \in \mathsf{b}$ и каждой преднормы v. В частности, это пространство определено для меры ν на $\mathcal{R}(H)$.

Если $f_1, f_2 \in L^1_b(H, \nu, \mathsf{b})$, тогда мы определим свертки

(1) $conv\{f_1, f_2\} := \{f_1 * f_2\}(x) := \int_H f_1(y^{-1}x) f_2(y) \nu(dy)$ и

(2) $conv[f_1, f_2] := [f_1 * f_2](x) := \int_H [f_1(y^{-1}x), f_2(y)] \nu(dy)$ и

(3) $conv(f_1, f_2) := (f_1 * f_2)(x) := \int_H (f_1(y^{-1}x), f_2(y)) \nu(dy)$.

Они определены для простых функций. Если они существуют, то

(4) $\sup_{x\in H, z\in H} v[\{f_1 * f_2\}(z^{-1}x)] N_\nu(x) \le$
$\sup_{x\in H, y\in H, z\in H} v[f_1(y^{-1}z^{-1}x)] v[f_2(y)] N_\nu(x) N_\nu(y) \le \|f_1\|_{1,b,v} \|f_2\|_{1,b,v} < \infty$ и

(5) $\sup_{x\in H, z\in H} v[[f_1 * f_2](z^{-1}x)] N_\nu(x) \le$
$\sup_{x\in H, y\in H, z\in H} C_v v[f_1(y^{-1}z^{-1}x)] v[f_2(y)] N_\nu(x) N_\nu(y) \le C_v \|f_1\|_{1,b,v} \|f_2\|_{1,b,v} < \infty$ и

(6) $\sup_{x\in H, z\in H} |(f_1 * f_2)(z^{-1}x)| N_\nu(x) \le$
$\sup_{x\in H, y\in H, z\in H} J_v v[f_1(y^{-1}z^{-1}x)] v[f_2(y)] N_\nu(x) N_\nu(y) \le J_v \|f_1\|_{1,b,v} \|f_2\|_{1,b,v} < \infty$,
так как отображения $31(T1, T2)$ непрерывны, $y^{-1}z^{-1} = (zy)^{-1}$, где преднорма в $Lin(\mathsf{b})$ индуцирована преднормой v в b также обозначенной через v,

$J_v = \sup_{a,b,v(a)>0,v(b)>0} |(a, b)|/[v(a)v(b)]$ и

$C_v = \sup_{a,b,v(a)>0,v(b)>0} v([a, b])/[v(a)v(b)]$

- это постоянные равные преднормам непрерывных по двум переменным отображений 31 $(T1, T2)$ соответственно относительно преднормы v на g.

Поэтому, свертки имеют непрерывные продолжения на $L^1_b(H, \nu, \mathsf{b}) =: X$ такие, что $conv\{f_1, f_2\} \in L^1_b(H, \nu, \mathsf{b})$, $conv[f_1, f_2] \in L^1_b(H, \nu, Lc(\mathsf{b}))$, $conv(f_1, f_2) \in L^1_b(H, \nu, \mathbf{K})$. Пространство X является $\mathbf{K}$-линейным и полным, и оно является алгеброй с умножением даваемым сверткой $conv\{f_1, f_2\}$. Если постоянная функция 1 не принадлежит этому пространству, то её можно добавить и получить полную $\mathbf{K}$-выпуклую алгебру с единицей $1(x) = 1$ для любого $x \in H$. Такая функция позволяет охватить случай алгебры b с единичным элементом. Эта постоянная функция в общем не обязана быть единицей относительно умножения в этой алгебре X функций. Конечно, к такой алгебре X можно добавить единичный элемент относительно умножения.

Она является групповой алгеброй X для H над b. В частности, мы можем взять $\mathsf{b} = Mat_m(\mathbf{K})$ и более общие алгебры как выше. Тогда транспозиция в b

индуцирует её в $X = L_b^1(H, \nu, \mathsf{b})$, так что

$(f_1, f_2) := \int_H (f_1(x), f_2(x))\nu(dx) \in \mathbf{K}$ и

$[f_1, f_2] := [f_1 * f_2] \in Lin(X)$ можно рассматривать как единственный непрерывный линейный оператор F на X такой, что $F \in Lin(X)$,

(7) $Ff(x) =< [f_1 * f_2] * f > (x)$, где

(8) $< g * f > (x) := \int_H g(y^{-1}x)f(x)\nu(dx)$

для любого $g \in L_b^1(H, \mathcal{R}, \nu, Lin(\mathsf{b}))$ и каждого $f \in X$ и всякого $x \in H$. Если b удовлетворяет условию $39(1-7)$, тогда X также удовлетворяет $39(1-7)$. Если b - это банахова алгебра, тогда X - также банахова алгебра.

41. Теорема. *Пусть $Ff(x) =< [f_1 * f_2] * f > (x)$, где $f, f_1, f_2 \in L_b^1(H, \nu, \mathsf{b}) = X$, а H - это топологическая группа, $\mathcal{R}(H) \subset \mathsf{Bco}(H)$ как в примере 40, супремум $\sup_{x \in H} N_\nu(x) < \infty$ конечен. Тогда F является компактным оператором $F \in Lc(X)$ и отображение $X^2 \ni \{f_1, f_2\} \mapsto < [f_1 * f_2] * > \in Lc(X)$ непрерывно.*

Доказательство. Как было показано в примере 40 свертка $conv[f_1, f_2]$ непрерывна из X^2 в $L_b^1(H, \nu, Lc(\mathsf{b}))$, где ν является $\mathbf{K}$-значной мерой. Пространство $L_b^1(H, \nu, Lc(\mathsf{b}))$ является пополнением семейства всех ступенчатых функций $g(x) = \sum_k Ch_{A_k}(x)a_k$ относительно семейства преднорм $\|g\|_{1,b,v} = [\sup_{x \in H, y \in H} v[g(y^{-1}x)]N_\nu(x)] < \infty$, где $\|Y\|_{v,\mathsf{b}} := \sup_{v(t) \neq 0, t \in \mathsf{b}} v(Yt)/v(t)$ - это преднорма в $Lin(\mathsf{b})$ обозначенная также через $v(Y)$, $A_k \in \mathcal{R}(H)$, $a_k \in Lc(\mathsf{b})$. Поэтому, достаточно показать, что $F \in Lc(X_s)$ и отображение $X_s^2 \ni \{f_1, f_2\} \mapsto [f_1 * f_2] \in Lc(X_s)$ непрерывно, где $X_s := L_b^1(H, \nu, \mathbf{K})$.

Теорема 7.12 [37] утверждает, что $f \in L(H, \mathcal{R}, \nu, \mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда она имеет два свойства: (i) f является $\mathcal{R}_\nu$-непрерывной, (ii) для всякого $\epsilon > 0$ множество $\{x : |f(x)|N_\nu(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}_\nu$-компактным, следовательно, содержащимся в $\{x : N_\nu(x) \geq \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Для векторно значной функции смотри теорему 56 ниже, которая доказана независимо от §§40, 41. Таким образом, если $f_1, f_2 \in X_s$, тогда $f_1 * f_2$ является $\mathcal{R}_\nu$-непрерывной и для любого $\epsilon > 0$ и всякой непрерывной преднормы v в b существует $\delta > 0$ такое, что $\{x : v(f_1 * f_2(x))N_{\nu,v}(x) \geq \epsilon\} \subset \{x : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$, где $\{x : v(f_1 * f_2(x))N_{\nu,v}(x) \geq \epsilon\}$ и $\{x : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$ являются $\mathcal{R}_\nu$-компактными, следовательно, $\mathcal{R}$-компактными множествами.

Если $f \in L(H, \mathcal{R}, \nu, \mathsf{b})$, тогда для любого $\epsilon > 0$ и каждой преднормы v в b и всякого $x \in H$ существует открытая симметричная окрестность U_x единичного элемента e в топологической группе H такая, что $v(f(y^{-1}x) - f(x)) < \epsilon$ для любого $y \in U_x^3$. Из покрытия $\{xU_x : x \in H, N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$ множества $\{x : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$ выделим конечное подпокрытие $\{x_jU_{x_j} : j = 1, ..., q\}$ и возьмем $U = \bigcap_{j=1}^q U_{x_j}$, так как $\mathcal{R} \subset \mathsf{Bco}(H)$. Тогда U открыта и симметрична $U^{-1} = U$, а $e \in U$.

Если $y \in U$ и $N_{\nu,v}(x) \geq \delta$, тогда существует j такое, что $x \in x_jU_{x_j}$, следовательно, $v(f(y^{-1}x) - f(x)) \leq \max(v(f(y^{-1}x) - f(y^{-1}x_j)), v(f(y^{-1}x_j) - f(x_j)), v(f(x_j) - f(x))) < \epsilon$, так как $(y^{-1}x)(y^{-1}x_j)^{-1} \in U^3 \subset U_{x_j}^3$. Итак, $v(f(y^{-1}z) - f(z)) \leq \max(v(f(y^{-1}z) - f(y^{-1}t)), v(f(y^{-1}t) - f(t))) < \epsilon$ для любого $z \in [U\{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}]$, где $t \in \{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$ таково, что $zt^{-1} \in U$, так как $(y^{-1}z)(y^{-1}t)^{-1} \in U^3$. В тоже время $\{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\} \subset [U\{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}]$ и $v(f(z))N_{\nu,v}(z) < \epsilon$ для любого $z \in H \setminus \{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}$. Если $z \in H \setminus [U\{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\}]$, тогда $Uz \cap \{x \in H : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\} = \emptyset$. Таким образом, для любого $f \in L(H, \mathcal{R}, \nu, \mathsf{b})$ и каждого $\epsilon > 0$ и всякой преднормы v в b существует открытая симметричная окрестность U единичного элемента e в H

такая, что $v(f(y^{-1}x) - f(x)) < \epsilon$ для любого $x \in H$ и $y \in U$.

Предположим, что $f, f_1, f_2 \in X_s$, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует открытая симметричная окрестность U единичного элемента e в H такая, что

(iii) $v(< [f_1 * f_2] * f > (y^{-1}x) - < [f_1 * f_2] * f > (x))N_{\nu,v}(x) < \epsilon \sup_{x\in H} v(f(x))N_{\nu,v}(x)$

для любого $x \in H$ и всякого $y \in U$. Возьмем множества $\{x : v([f_1 * f_2](x))N_{\nu,v}(x) \geq \epsilon\} \subset \{x : N_{\nu,v}(x) \geq \delta\} =: A$ для $[f_1 * f_2]$ как выше. Произведем разложение $F = F_1 + F_2$, где $F_1 f :=< [f_1 * f_2] * (Ch_A f) >$ и $F_2 f :=< [f_1 * f_2] * ((1 - Ch_A)f) >$. Тогда $\|F_2\|_v \leq \epsilon$, так как супремум $\sup_{x\in H} N_\nu(x) < \infty$ конечен.

В силу неравенства (iii) для любого $\epsilon > 0$ существует конечное покрывающее семейство подмножеств $A_1, ..., A_m \in \mathcal{R}$ in A, $\bigcup_{j=1}^m A_j = A$, так что для любого $f \in X_s$ существует простая функция $g(x) = \sum_{j=1}^m b_k Ch_{A_k}(x)$, для которой $\|F_1(f - g)\|_v < \epsilon$. Но семейство таких простых функций g конечномерно над $\mathbf{K}$, следовательно, F - это компактный оператор.

В силу $40(2,5)$ отображение $X^2 \ni \{f_1, f_2\} \mapsto < [f_1 * f_2] * > \in Lc(X)$ непрерывно.

42. Лемма. *Пусть для натурального числа k существует момент $M\xi^k$, где ξ - это случайный вектор со значениями в локально $\mathbf{K}$-выпуклой алгебре g, тогда для любого $1 \leq l < k$ существует $M\xi^l$.*

Доказательство. Если ξ - это случайный вектор со значениями в g, то ξ по определению является $(\mathcal{A}, \mathcal{R}(\mathsf{g}))$-измеримым, и для любой преднормы u в g существует $\sup_{\omega\in\Omega}[u(\xi)^k N_P(\omega)]^{1/k} = \|\xi\|_{k,u} < \infty$, где $\mathcal{R}(\mathsf{g})$ - это разделяющее покрывающее кольцо для g такое, что $\mathcal{R}(\mathsf{g}) \subset \mathsf{Bco}(\mathsf{g})$. Поэтому, $\sup_{\omega\in\Omega}[u(\xi)^l N_P(\omega)]^{1/l} \leq \sup_{\omega\in\Omega}[u(\xi)^k N_P(\omega)]^{1/k}$ для любого $1 \leq l < k$, так как $N_P(\omega) \leq 1$ для любого $\omega \in \Omega$.

Заключение

Результаты данной статьи показывают, что стохастические процессы и случайные функции в линейных пространствах над неархимедовыми полями имеют много принципиальных отличий от стохастических процессов над полем вещественных или комплексных чисел. Интересно отметить, что марковские процессы с конечным или бесконечным счетным числом состояний или со значениями в графах можно естественным образом вложить в класс стохастических процессов со значениями в неархимедовых полях или линейных пространствах над ними. При этом стохастически разрывные или со скачками процессы над полем вещественных или комплексных чисел часто можно моделировать с помощью стохастически непрерывных процессов над неархимедовыми полями, так как поле рациональных чисел содержится и в поле вещественных чисел и в поле p-адических чисел. В следующей статье эти результаты будут использованы для дальнейших исследований стохастических интегралов и спектральных разложений стохастических процессов в пространствах конечно- и бесконечно-мерных над бесконечными полями с неархимедовыми нормированиями.

Список литературы

[1] М. Айгнер. Комбинаторная теория. Мир, Москва (1982).

[2] S. Albeverio, W. Karwoski. Diffusion on p-adic numbers. In: K. Ito, T. Hida (Editors). Gaussian random fields. Nagoya 1990. World Scientific, River Edge, NJ (1991).

[3] I.Ya. Aref'eva, B. Dragovich, I.V. Volovich. On the p-adic summability of the anharmonic oscillator// Phys. Lett. V. B200, P. 512-514 (1988).

[4] А.Н. Бикулов, И.В. Волович. p-адическое броуновское движение// Изв. Акад. Наук. Сер. Матем. Т. 61: 3, С. 75-90 (1997).

[5] Н. Бурбаки. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. Наука, Москва (1970).

[6] C. Castro. Fractals, strings as an alternative justification for El Naschie's cantorian spacetime and the fine structurte constants// Chaos, Solitons and Fractals. V. 14, P. 1341-1351 (2002).

[7] Yu.L. Dalecky, S.V. Fomin. Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).

[8] B. Diarra. Ultraproduits ultrametriques de corps values// Ann. Sci. Univ. Clermont II. Sér. Math. V. 22, P. 1-37 (1984).

[9] Г.С. Дйордевич, Б. Драгович. p-адический и адельный гармонический осциллятор с частотой зависящей от времени// Теор. и Матем. Физ. Т. 124: 2, С. 1059-1067 (2000).

[10] Р. Энгелькинг. Общая топология. Мир, Москва (1986).

[11] A. Escassut. Analytic elements in p-adic analysis. World sceintific, Singapore (1995).

[12] S.N. Evans. Continuity properties of Gaussian stochastic processes indexed by a local field// Proceedings London Mathematical Society, Series 3, V. 56, P. 380-416 (1988).

[13] S.N. Evans. Local field Gaussian measures// In: E. Cinlar, et.al. (Editors) Seminar on Stochastic Processes 1988. P. 121-160. Birkhäuser, Boston (1989).

[14] S.N. Evans. Equivalence and perpendicularity of local field Gaussian measures// In: E. Cinlar, et.al. (Editors) Seminar on Stochastic Processes 1990. P. 173-181. Birkhäuser, Boston (1991).

[15] S.N. Evans. Local field Brownian motion// J. Theoret. Probab. V. 6, P. 817-850 (1993).

[16] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.Т. 1, 2. Мир, Москва (1967).

[17] И.И. Гихман, А.В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Наука, Москва (1977).

[18] П.Л. Хеннекен, А. Тортра. Теория вероятностей и некоторые её приложения. Наука, Москва (1974).

[19] Y. Jang. Non-archimedean quantum mechanics. Tohoku Math. Publ. V. 10 (1998).

[20] A. Khrennikov. Interpretations of probability. VSP, Utrecht, 1999.

[21] A. Khrennikov, S.V. Kozyrev. Ultrametric random field. Inf. Dimens. Anal., Quantum Probab. and Related Topics. V. 9: 2, P. 199-213 (2006).

[22] N. Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta functions. Springer-Verlag, New York, 1977.

[23] A.N. Kochubei. Pseudo-differential equations and stochastics over non-archimedean fields. Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. V. 244. Marcel Dekker, Inc., New York (2001).

[24] A.N. Kochubei. Limit theorems for sums of p-adic random variables// Expo. Math. V. 16, P. 425-440 (1998).

[25] S.V. Ludkovsky. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, representations and quasi-invariant measures// J. Mathem. Sci. I 147: 3, P. 6703-6846 (2008);

II 150: 4, P. 2123-2223 (2008).

[26] С.В. Людковский. Стохастические процессы на группах диффеоморфизмов и петель действительных, комплексных и неархимедовых многообразий// Фундам. и Прикл. Матем. Т. 7: 4, С. 1091-1105 (2001).

[27] S.V. Ludkovsky. Stochastic processes on non-Archimedean Banach spaces// Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2003: 21, P. 1341-1363 (2003).

[28] S.V. Ludkovsky. Stochastic processes on totally disconnected topological groups// Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2003: 48, P. 3067-3089 (2003).

[29] S.V. Ludkovsky. Stochastic processes and antiderivational equations on non-Archimedean manifolds// Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 31: 1, P. 1633-1651 (2004).

[30] S.V. Ludkovsky. Non-Archimedean valued quasi-invariant descending at infinity measures// Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2005: 23, P. 3799-3817 (2005).

[31] Ludkovsky S.V. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures on non-Archimedean Banach spaces with values in non-Archimedean fields // J. Math. Sci. 2004. V. 122: 1. P. 2949-2983 (previous variant: Los Alamos preprint math.GM/0106170).

[32] S. Ludkovsky, A. Khrennikov. Stochastic processes on non-Archimedean spaces with values in non-Archimedean fields// Markov Processes and Related Fields. V. 9: 1, P. 131-162 (2003).

[33] L. Narici, E. Beckenstein. Topological vector spaces. Marcel Dekker Inc., New York (1985).

[34] K.R. Partasarathy, R. Rao Ranga, S.R.S Varadhan. Probability distributions on locally compact abelian groups// Illinois J. Math. V. 7, P. 337-369 (1963).

[35] K.R. Partasarathy. Probability measures on metric spaces// Probab. Math. Statist. V. 3. Academic Press, Inc., New York (1967).

[36] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Мир, Москва (1977).

[37] A.C.M. van Rooij. Non-Archimedean functional analysis. Marcel Dekker Inc., New York (1978).

[38] W.H. Schikhof. Ultrametric calculus. Cambidge University Press, Cambridge (1984).

[39] А.Н. Ширяев. Вероятность. Наука, Москва (1989).

[40] Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. Наука, Москва (1985).

[41] В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов. p-адический анализ и математическая физика. Физ.-Мат. Лит., Москва (1994).

[42] A. Weil. Basic number theory. Springer, Berlin (1973).

[43] K. Yasuda. Semi-stable processes on local fields// Tohoku Math. J. V. 58, P. 419-431 (2006).