УДК 519.214

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ЦПТ

Соболев В.Н.
Кафедра высшей и прикладной математики,
Российский государственный торгово-экономический университет, Москва

Поступила в редакцию 20.08.2010, после переработки 07.09.2010.

В статье приводятся новые асимптотические разложения в центральной предельной теореме. Рассматривается связь между различными асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме.

This paper gives new asymptotic expansions in the central limit theorem. It is proposed the connection between the various asymptotic expansions in the central limit theorem.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, асимптотические разложения.
Keywords: central limit theorem, asymptotic expansion.

Введение

Пусть $X_1, X_2, ...$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Обозначим через P распределение X_1, через P_n - распределение нормированной суммы $(X_1 + ... + X_n)\, n^{-\frac{1}{2}}$ и через Φ стандартный нормальный закон с плотностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Мы будем предполагать, что все используемые в дальнейшем моменты $\mathrm{M}\,|X_1|^k$ существуют. Положим $\alpha_k = \frac{\mathrm{M} X_1^k}{k!}$,$\beta_k = \frac{\mathrm{M}|X_1|^k}{k!}$. Из наших предположений следует, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Через $\alpha_k(\varphi)$, $\beta_k(\varphi)$ обозначим соответсвующие величины для стандартного нормального закона. Так, $\alpha_{2j}(\varphi) = \frac{1}{2^j j!}$ для $j = 0, 1, 2, ...$

В статье будут использоваться нормированные моменты Чебышева-Эрмита θ_k, которые определяются формулами

$$\theta_k = \theta_k(P) = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) P(dx)\;, k = 0, 1, 2, ...\,,$$

и отличаются от моментов Чебышева-Эрмита множителем $\frac{1}{k!}$. В данном определении присутствуют многочлены Чебышева-Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}\,(x)}{\varphi\,(x)}\;, k = 0, 1, 2, ...\,. \tag{1}$$

Для $H_k(x)$ и θ_k хорошо известны равенства

$$\frac{H_k(x)}{k!}=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\alpha_{2j}(\varphi)\frac{x^{k-2j}}{(k-2j)!}\ \text{ и } \theta_k=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^j\alpha_{2j}(\varphi)\alpha_{k-2j}.$$

Нормированные моменты Чебышева-Эрмита $\theta_l(P_n)$ распределения P_n для $l\geqslant 3$ вычисляются с помощью моментов $\theta_3,...,\theta_l$ распределения P по формулам

$$\theta_l(P_n)=\sum\frac{n!}{j_0!j_3!...j_l!}\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{j_3}...\left(\frac{\theta_l}{n^{l/2}}\right)^{j_l}, \tag{2}$$

где суммирование ведётся по всем таким наборам неотрицательных целых чисел $j_0,j_3,...,j_k$, что $3j_3+...+lj_l=l$ и $j_0+j_3+...+j_l=n$. Нам понадобятся также квазимоменты $\theta_l^{(s)}(P_n)$, $s=1,2,...,l-1$, для вычисления которых можно использовать формулу для $\theta_l(P_n)$, в которой следует оставить только слагаемые, связанные с величинами θ_j, $j\leqslant s$.

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию распределения P. Далее будем предполагать, что для некоторого неотрицательного ν функция $|f(t)|^\nu$ интегрируема на всей числовой оси. Введем следующие величины: $\alpha(T)=\max\{|f(t)|:t\geqslant T\}$ и $A_n(T)=\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int_T^\infty|f(t)|^\nu\,dt$. Заметим, что выполнение условия $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^\nu\,dt<\infty$ гарантирует существование непрерывной плотности $p_n(x)$ распределения P_n при всех $n\geqslant\nu$, эту плотность можно вычислять при помощи формулы обращения для преобразования Фурье $p_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt$, кроме того, при выполнении этого условия величина $\alpha(T)$ строго меньше 1 для любого $T>0$.

Нам понадобятся неотрицательные четные функции $\mu(t)\geqslant e^{-\frac{t^2}{2}}$ и числа $T>0$ такие, что $|f(t)|\leqslant\mu(t)$ при $|t|\leqslant T$. Для пары (μ,T) определим величины $B_{l,n-k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}|t|^l\mu^{n-k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt$, $\quad B_l=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^l e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $L_l(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\geqslant u}|t|^l e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $l=0,1,2,\dots$, $0\leqslant k\leqslant n$. При достаточно широких условиях на распределение P пару (μ,T) можно подобрать так, что величины $B_{l,n-k}$ для любого фиксированного k при росте n стремятся к величинам B_l [2, стр. 154].

Сформулируем условие, которое будет нами использоваться далее.

Условие 1. Пусть у распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией существует конечный абсолютный момент порядка $m+2$ и существует число $\nu>0$ такое, что для характеристической функции $f(t)$ распределения P выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^\nu\,dt<\infty$.

1. Одна новая форма асимптотических разложений

Как было показано в работе [3], при выполнении условия 1 для $n\geqslant\max(\nu,m+2)$ справедливо следующее асимптотическое разложение

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{s=1}^{m-1}C_n^s\sum_{l=3s}^{m-1+2s}\frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}}H_l(x)\varphi(x)+R, \tag{3}$$

где для остаточной части разложения R была указана явная оценка, которая есть $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$ при $n \to \infty$, а величины $\Theta_{s,l}$ определяются по формуле

$$\Theta_{s,l} = \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s}\,. \tag{4}$$

Суммирование в (4) ведется по наборам неотрицательных целых чисел $t_1,...,t_s$, таким, что $t_1 + ... + t_s = l$ и $t_j \geqslant 3,\ j = 1, ..., m-1$.

В данной работе будут представлены некоторые новые формы данного разложения и рассмотрена связь данного разложения с разложениями Грамма-Шарлье и Эджворда-Крамера. В [3] доказывается, что разложению (3) можно придать вид

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{n^{j/2}} \sum_{s=1}^{j} \frac{C_n^s}{n^s} \Theta_{s,j+2s} H_{j+2s}(x)\varphi(x) + R\,, \tag{5}$$

где величина R - та же, что в (3). Отметим, что $\frac{C_n^s}{n^s} \to \frac{1}{s!}$ при $n \to \infty$.

Получим ещё одну форму главной части разложения (3). Используем величины

$$M_{s,l} = C_n^s \Theta_{s,l} \frac{H_l(x)}{n^{l/2}}\,, \tag{6}$$

с помощью которых мы можем записать главную часть разложения (3) без величины $\varphi(x)$ в виде

$$\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{l=3s}^{m-1+2s} M_{s,l}\,. \tag{7}$$

Пары индексов (s, l) в (7) можно рассматривать как координаты целочисленных точек на плоскости. При этом пары чисел (s, l), по которым производится суммирование в (7), принадлежат замкнутому треугольнику, стороны которого суть отрезки прямых $s = 1$, $l = 3s$, $l = m - 1 + 2s$.

Заметим, что сумма (7) не изменится, если мы вначале просуммируем числа $M_{s,l}$ по парам (s, l), лежащим на данной прямой $l = j + 3s$, где j таково, что прямая $l = j + 3s$ пересекается с указанным выше треугольником, а затем просуммируем полученные числа по всем таким j. Самая верхняя прямая, из тех, что нас интересуют, есть прямая $l = m - 2 + 3s$ (она пересечётся с упомянутым выше треугольником в единственной точке $(1, m + 1)$), а самая нижняя - $l = 3s$. Очевидно, что сумма (7) (суммирование ведётся по точкам вида $(s, j + 3s)$, которые принадлежат семейству рассмотренных выше параллельных прямых, начиная с прямой $l = 3s$ и заканчивая $l = m - 2 + 3s$) равна

$$\sum_{j=0}^{m-2} \sum_{s=1}^{m-1-j} M_{s,j+3s} = \sum_{j=0}^{m-2} \sum_{s=1}^{m-1-j} C_n^s \Theta_{s,j+3s} \frac{H_{j+3s}(x)}{n^{3s/2+j/2}}\,. \tag{8}$$

Отметим, что (8) формально можно получить, если в (7) сделать замену $l = j+3s$, после чего изменить порядок суммирования. Поэтому *разложению* (3) *можно придать вид* (где величина R - та же, что и в (3)):

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{n^{j/2}} \sum_{s=1}^{m-1-j} \frac{C_n^s}{n^{3s/2}} \Theta_{s,3s+j} H_{3s+j}(x)\varphi(x) + R\,. \tag{9}$$

2. Построение разложений Грама-Шарлье

Один из результатов, полученных в [2], состоит в том, что при выполнении условия 1 плотность $p_n(x)$ для $n \geqslant \max(\nu, m+2)$ допускает представление, которое в наших обозначениях имеет вид

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \theta_l(P_n) H_l(x) \varphi(x) +$$

$$+ \sum_{l=m+2,\, l\neq 3m-4}^{3m-3} \theta_l^{(m+1)}(P_n) H_l(x)\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right). \qquad (10)$$

Это разложение в [2] называлось коротким разложением Грама-Шарлье. Для величины $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$ известны явные оценки, явный вид $\theta_l(P_n)$ и $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$ указан выше.

Главную часть разложения (3) можно записать в виде разложения Грама-Шарлье. При этом получается разложение вида Грама-Шарлье с явной оценкой остатка.

Мы уже отмечали, что множество точек (s, l), по которым производится суммирование в (7), состоит из целочисленных точек плоскости, принадлежащих замкнутому треугольнику, стороны которого принадлежат прямым $s = 1$, $l = 3s$, $l = m - 1 + 2s$. Ясно, что последняя сумма не изменится, если мы изменим порядок суммирования. Заметим, что величины l на множестве суммирования в (7) изменяются от 3 до $3m-3$, то есть в тех же пределах, что и в коротких разложениях Грама-Шарлье в формуле (10).

Для $l = 3, ..., m+1$ величины s в (7) изменяются от 1 до $[l/3]$, где $[\cdot]$ означает целую часть, а для $l = m+2, ..., 3m-3$ величины s изменяются $\left]\frac{l-m+1}{2}\right[$ от до $[l/3]$, где $]z[$ для положительного числа z означает наименьшее целое число, большее или равное z. Поэтому

$$\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{l=3s}^{m-1+2s} M_{s,l} = \sum_{l=3}^{m+1} \sum_{s=1}^{[l/3]} M_{s,l} + \sum_{l=m+2}^{3m-3} \sum_{s=\left]\frac{l-m+1}{2}\right[}^{[l/3]} M_{s,l}\,. \qquad (11)$$

Рассмотрим первую сумму в правой части этого равенства. Она равна

$$\sum_{l=3}^{m+1} \frac{H_l(x)}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \Theta_{s,l} = \sum_{l=3}^{m+1} H_l(x) \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s} =$$

$$= \sum_{l=3}^{m+1} H_l(x) \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \sum_{t_1+...+t_s=l} \left(\frac{\theta_{t_1}}{n^{t_1/2}}\right) ... \left(\frac{\theta_{t_s}}{n^{t_s/2}}\right). \qquad (12)$$

Зафиксируем числа l и s, $3 \leqslant l \leqslant m+1$, $1 \leqslant s \leqslant [l/3]$, и рассмотрим все решения уравнения $t_1 + ... + t_s = l$ в неотрицательных целых числах, больших или равных трём. Для каждого решения обозначим k_3 число троек среди $t_1, ..., t_s$, k_4- число четвёрок среди $t_1, ..., t_s$, ..., k_{m+1}- количество чисел $m+1$ среди $t_1, ..., t_s$. Ясно, что для каждого решения $t_1, ..., t_s$

$$\left(\frac{\theta_{t_1}}{n^{t_1/2}}\right)...\left(\frac{\theta_{t_s}}{n^{t_s/2}}\right)=\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_{m+1}}{n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}},$$

при этом

$$3k_3+...+(m+1)k_{m+1}=l \tag{13}$$

и

$$k_3+...+k_{m+1}=s\,. \tag{14}$$

Нетрудно понять, что для данного набора чисел $k_3,...,k_{m+1}$, для которого выполнено (14) существует $C_s^{k_3}C_{s-k_3}^{k_4}...C_{s-(k_3+...+k_m)}^{k_{m+1}}$ решений уравнения $t_1+...+t_s=l$ с заданными числами $k_3,...,k_{m+1}$(k_3 троек можно поместить на s позиций в сумме $t_1+...+t_s$ числом способов, равным $C_s^{k_3}$, k_4 четвёрок можно поместить на $s-k_3$ оставшихся позициях $C_{s-k_3}^{k_4}$ способами и т.д.). Поэтому сумма по $s=1,...,[l/3]$ из (12) равна

$$\sum_{s=1}^{[l/3]}C_n^s{\sum}' C_s^{k_3}C_{s-k_3}^{k_4}...C_{s-(k_3+...+k_{m+1})}^{k_{m+1}}\times\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_{m+1}}{n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}}, \tag{15}$$

где суммирование ${\sum}'$ проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3,...,k_{m+1}$, для которых выполнены условия (13) и (14). Легко проверить, что сумма (15) равна

$$\sum_{s=1}^{[l/3]}{\sum}'\frac{n!}{(n-(k_3+...+k_{m+1}))!k_3!...k_{m+1}!}\times\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_{m+1}}{n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}}.$$

Очевидно, что для $l\leqslant m+1$ все величины k_j с $j\geqslant l+1$ необходимо равны нулю и поэтому условия (13) и (14) можно записать в виде

$$3k_3+...+lk_l=l\,, \tag{16}$$

$$k_3+...+k_l=s\,. \tag{17}$$

Из первого из этих условий следует, что $3k_3+...+3k_l\leqslant l$, поэтому заведомо $s\leqslant[l/3]$, то есть сумма (15) равна

$$\sum_{s\geqslant 1}{\sum}''\frac{n!}{(n-(k_3+...+k_l))!k_3!...k_l!}\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_l}{n^{l/2}}\right)^{k_l}, \tag{18}$$

где суммирование в ${\sum}''$ ведётся по наборам неотрицательных целых чисел $k_3,...,k_l$, для которых выполнены условия (16) и (17). Легко понять что сумма (18) не изменится, если мы снимем в ней суммирование по
$s\geqslant 1$ и исключим из ограничений условие (17), то есть её можно представить в виде

$$\sum\frac{n!}{(n-(k_3+...+k_l))!k_3!...k_l!}\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_l}{n^{l/2}}\right)^{k_l}, \tag{19}$$

где суммирование ведётся по наборам неотрицательных целых чисел $k_3, ..., k_l$, для которых выполнено условие (16). Очевидно, что (19) совпадает с выражением (2) для $\theta_l(P_n)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для моментов Чебышева-Эрмита $\theta_l(P_n)$ справедливо представление*

$$\theta_l(P_n) = \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \Theta_{s,l} \,, \tag{20}$$

где $\Theta_{s,l}$ определяются формулой (4).

Представление (20) можно записать в виде

$$\theta_l(P_n) = \frac{n!}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} \frac{1}{(n-s)!s!} \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s} \,, \tag{21}$$

где во второй сумме суммирование ведется по наборам неотрицательных целых чисел t_1,...,t_s, таким, что $t_1 + ... + t_s = l$ и $t_j \geqslant 3$, $j = 1, ..., m-1$.

Следствие 1. *Первая из сумм в правой части* (11)*, умноженная на* $\varphi(x)$*, совпадает с суммой по* $3 \leqslant l \leqslant m+1$ *из правой части короткого разложения Грама-Шарлье* (10)*, то есть*

$$\sum_{l=3}^{m+1} \tfrac{H_l(x)}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \Theta_{s,l} \varphi(x) = \sum_{l=3}^{m+1} \theta_l(P_n) H_l(x) \varphi(x) \,.$$

Далее рассмотрим вторую из сумм в правой части (11)

$$\sum_{l=m+2}^{3m-3} \sum_{s=]\frac{l-m+1}{2}[}^{[l/3]} M_{s,l} = \sum_{l=m+2}^{3m-3} H_l(x) \sum_{s=]\frac{l-m+1}{2}[}^{[l/3]} C_n^s \tfrac{1}{n^{l/2}} \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s} \,.$$

Дословно повторяя часть проведённых выше рассуждений, находим, что выражение

$$\sum_{s=]\frac{l-m+1}{2}[}^{[l/3]} C_n^s \tfrac{1}{n^{l/2}} \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s}$$

совпадает с

$$\sum_{s=]\frac{l-m+1}{2}[}^{[l/3]} \sum{}' \frac{n!}{(n-(k_3+...+k_{m+1}))!k_3!...k_{m+1}!} \times \left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3} ... \left(\frac{\theta_{m+1}}{n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}} , \tag{22}$$

где суммирование $\sum{}'$ проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, ..., k_{m+1}$, для которых выполнены условия (13) и (14).

Из условия (13) следует, что $3k_3 + ... + 3k_{m+1} \leqslant l$, поэтому при выполнении условия (13) заведомо будет справедливо неравенство $s \leqslant [l/3]$. Поэтому сумма (22) равна

$$\sum_{s\geqslant]\frac{l-m+1}{2}[}\sum{}' \frac{n!}{(n-(k_3+...+k_{m+1}))!k_3!...k_{m+1}!}\times\left(\frac{\theta_3}{n^{3/2}}\right)^{k_3}...\left(\frac{\theta_{m+1}}{n^{(m+1)/2}}\right)^{k_{m+1}}. \tag{23}$$

Видно, что если в формуле (23) суммирование по целым $s\geqslant\,]\frac{l-m+1}{2}[$ заменить суммированием по $s\geqslant 1$, то получается выражение для квазимоментов $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$ Чебышева-Эрмита. Можно ввести понятное обозначение усечённого нормированного квазимомента Чебышева-Эрмита

$$\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)=\frac{n!}{n^{l/2}}\sum\frac{1}{(n-(k_3+...+k_{m+1}))!}\frac{\theta_3^{k_3}}{k_3!}...\frac{\theta_l^{k_{m+1}}}{k_{m+1}!},$$

где суммирование ведётся по всем таким наборам неотрицательных целых чисел $k_3,...,k_{m+1}$, что

$$3k_3+...+(m+1)\,k_{m+1}=l \ \text{ и } k_3+...+k_{m+1}\geqslant\tfrac{l-m+1}{2}.$$

С другой стороны, усечённый нормированный квазимомент Чебышева-Эрмита $\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)$ есть

$$\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)=\frac{1}{n^{l/2}}\sum_{s=]\frac{l-m+1}{2}[}^{[l/3]}C_n^s\Theta_{s,l}\,. \tag{24}$$

Из определения $\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)$ видно, что $\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)$ отличается от $\theta_l^{(m+1)}(P_n)$ только наличием дополнительного условия на пределы суммирования

$$k_3+...+k_{m+1}\geqslant\tfrac{l-m+1}{2}.$$

Таким образом,

при выполнении условия 1 справедливо разложение вида Грама-Шарлье

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{l=3}^{m+1}\theta_l(P_n)H_l(x)\varphi(x)+$$

$$+\sum_{l=m+2,\,l\neq 3m-4}^{3m-3}\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)H_l(x)\varphi(x)+R\,,$$

где величина R — та же, что и в разложении (3), *а величины $\theta_l(P_n)$ и $\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(P_n)$ находятся по формулам* (21) *и* (24) *соответственно.*

3. Построение разложений Эджворта-Крамера

Разложение (3) позволяет получать разложение Эджворта-Крамера, с новой явной формулой для многочленов $K_j(x)$, участвующих в разложении Эджворта-Крамера (см. далее (30)). При желании можно выписать и формулу оценки остатка в разложении Эджворта-Крамера. Для получения разложения Эджворта-Крамера из разложения (3) достаточно в последнем из названных преобразовать некоторые слагаемые и изменить порядок суммирования.

Преобразуем сумму (7), с тем, чтобы получить в общем случае явный вид многочленов $K_j(x)$, $j = 1, 2, ..., m-1$, участвующих в разложении Эджворта-Крамера (30).

Для этого прежде всего заметим, что поскольку на области суммирования в (7) величина $l \geqslant 3s$, а $C_n^s = O(n^s)$ при $n \to \infty$, то слагаемые из (7) с $s > j$ при росте n убывают быстрее $\frac{1}{n^{j/2}}$, поэтому они не будут участвовать в формировании многочлена $K_j(x)$. По той же причине в формировании $K_j(x)$ не будут участвовать слагаемые из (7), для которых $l > j + 2s$. Таким образом, в формировании $K_j(x)$ участвуют лишь слагаемые из суммы

$$\sum_{s=1}^{j}\sum_{l=3s}^{j+2s} M_{s,l}\,. \tag{25}$$

Вполне логично, что вид формулы (25) совпадает с видом формулы (7), поскольку в первой рассматриваются слагаемые, содержащие $\frac{1}{n^{k/2}}$ не далее j, а во второй не далее $m-1$.

При построении из разложения Грама-Шарлье разложения Эджворта-Крамера (30) необходимо представить величины C_n^s в виде многочленов степени s от переменной n, то есть

$$C_n^s = \sum_{k=1}^{s} c_{sk} n^k\,, \tag{26}$$

где c_{sk} — некоторые коэффициенты (далее символы c_{sk} и $c_{s,k}$ обозначают одни и теже величины, а их использовоние обусловлено лишь ясностью восприятия индексов).

Каждая величина $M_{s,l}$, определлнная в (7), представима в виде следующей суммы

$$M_{s,l} = \sum_{k=1}^{s} c_{s,k} n^{k-l/2} \Theta_{s,l} H_l(x)\,. \tag{27}$$

Из (27) видно, что $M_{s,l}$ можно рассматривать как сумму слагаемых, которые отличаются друг от друга степенями переменной n. Поэтому в формировании многочленов $K_j(x)$ может участвовать только одно слагаемое из представления (27) для конкретного $M_{s,l}$, для которого выполняется условие $l = j + 2k$. Из последнего условия понятно, что, если в $M_{s,l}$ присутствует слагаемое с нужным порядком убывания, то в $M_{s,l-1}$ и $M_{s,l+1}$ его нет, поскольку, если $j = l - 2k$ для некоторого $k \in [1; s]$, то $j \neq l \pm 1 - 2k$ при $k \in [1; s]$. По этим же соображениям чётности их также нет в $M_{s+1,l-1}$ и $M_{s+1,l+1}$. Из этих рассуждений очевидно, что любое слагаемое в (25) с индексом l отличающимся чётностью от j, не может участвовать в формировании $K_j(x)$.

Поскольку $1 \leqslant k \leqslant s$ то, из (27) ясно, что при $l < j + 2$ при росте n все слагаемые убывают медленнее $\frac{1}{n^{j/2}}$. Поэтому для формирования многочленов $K_j(x)$ мы должны рассматривать лишь суммы

$$\sum_{s=1}^{j} \sum_{l=\max(j+2,3s)}^{j+2s} M_{s,l} \tag{28}$$

только по l с чётностью, совпадающей с j.

Очевидно так же, что суммирование по строкам от вершины $(j;3j)$ к вершине $(1;j+2)$ равно

$$\sum_{s=0}^{j-1} \sum_{l=s-\left[\frac{s}{3}\right]}^{s} M_{j-l,3j-2s} = \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{3}\right]} M_{j-s+l,3j-2s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{3}\right]} \sum_{k=1}^{j-s+l} c_{j-s+l,k} n^{k-j-s-j/2} \Theta_{j-s+l,3j-2s} H_{3j-2s}(x)\,.$$

Поскольку многочлен $K_j(x)$ связан с $n^{-j/2}$, то формировать $K_j(x)$ будут только те слагаемые из правой части последнего равенства, для которых верно равенство $n^{k-j-s-j/2} = n^{-j/2}$. Поэтому

$$K_j(x) = \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{3}\right]} c_{j-s+l,j+s} \Theta_{j-s+l,3j-2s} H_{3j-2s}(x)\,. \tag{29}$$

Откуда следует, что

при выполнении условия 1 справедливо разложение Эджворта-Крамера

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K_j(x)}{n^{j/2}} \varphi(x) + R, \tag{30}$$

где порядок убывания остаточной части разложения R при $n \to \infty$ равен $O(n^{-m/2})$, а многочлены $K_j(x)$ не зависят от n и находятся по формуле (29).

4. О коэффициентах полиномов из разложения Эджворта-Крамера

В формуле (29) участвуют многочлены Чебышева-Эрмита $H_k(x)$, величины $\Theta_{k,l}$ (4) и коэффициенты $c_{s,k}$ из (26). Коэффициенты c_{sk} тесно связаны с числами Стирлинга первого рода [1, стр. 28]. Найдем явный вид данных коэффициентов. Для этого рассмотрим многочлены

$$\Pi_s(x) = C_x^s = \frac{x(x-1)...(x-s+1)}{s!}\,. \tag{31}$$

Наряду с многочленами $\Pi_s(x)$ рассмотрим многочлены $P_s(x) = \frac{x^s}{s!}$. Поскольку многочлены $\{P_k(x) : k = 0, 1..., s\}$ как и многочлены $\{\Pi_k(x) : k = 0, 1..., s\}$ представляют собой базис в пространстве многочленов степени не больше, чем s, то справедливы следующие равенства

$$\Pi_s(x) = \sum_{k=0}^{s} b_{sk} P_k(x)\,, \tag{32}$$

$$P_s(x) = \sum_{k=0}^{s} a_{sk} \Pi_k(x)\,. \tag{33}$$

При сравнении формул (26) и (32) очевидна следующая связь между коэффициентами $c_{sk} = \frac{b_{sk}}{k!}$. Поэтому для нахожения коэффициентов c_{sk} достаточно найти b_{sk}.

Связь между многочленами вида (32) и вида (33) не ограничивается приведёнными выше равенствами. Так, при рассмотрении «дискретной прямой» или «решётки» многочлены (31) являются аналогом многочленов $P_s(x) = \frac{x^s}{s!}$ в том смысле, что если рассмотреть на «дискретной прямой» с единичным шагом решетчатую производную $\Delta\Pi_s(x) = \Pi_s(x+1) - \Pi_s(x)$ для многочленов $\Pi_s(x)$, а для многочленов $P_s(x)$ оператор дифференцирования $D = d/dx$, то для них справедливы следующие равенства

$$\begin{array}{c} DP_0(x) = 0\,, \\ DP_s(x) = P_{s-1}(x)\,, s \geqslant 1\,, \\ P_s(0) = \left\{ \begin{array}{l} 1\,,\ s = 0 \\ 0\,,\ s \geqslant 1 \end{array} \right. , \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \Delta\Pi_0(x) = 0\,, \\ \Delta\Pi_s(x) = \Pi_{s-1}(x)\,, s \geqslant 1\,, \\ \Pi_s(0) = \left\{ \begin{array}{l} 1\,,\ s = 0 \\ 0\,,\ s \geqslant 1 \end{array} \right. . \end{array}$$

Поэтому для коэффициентов из (32) и (33) справедливы представления

$$a_{s,k} = \Delta^k|_0 P_s(x)\,, \quad b_{s,k} = D^k \,|_0\, \Pi_s(x)\,. \tag{34}$$

Для описанных выше операторов дифференцирования справедлива следующая формула $\Delta = e^D - 1$ [1, стр. 163]. Поэтому вполне очевидны следующие две цепочки равенств

$$a_{s,k+1} = \Delta^{k+1} \,|_0\, P_s(x) = \Delta^k \,|_0\, \Delta P_s(x) = \Delta^k \,|_0\, \left[\left(e^D - 1\right) P_s(x)\right] =$$

$$= \Delta^k \,|_0 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{D^l}{l!} P_s(x)\right] = \Delta^k \,|_0 \left[\sum_{l=1}^{s} \frac{P_{s-l}(x)}{l!}\right] = \sum_{l=1}^{s} \frac{\Delta^k|_0 P_{s-l}(x)}{l!} = \sum_{l=1}^{s} \frac{a_{s-l,k}}{l!}\,,$$

$$b_{s,k+1} = D^{k+1} \,|_0\, \Pi_s(x) = D^k \,|_0\, D\Pi_s(x) = D^k \,|_0\, \left[\left(\ln\left(1 + \Delta\right)\right) \Pi_s(x)\right] =$$

$$= D^k \,|_0 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}\Delta^l}{l} \Pi_s(x)\right] = D^k \,|_0 \left[\sum_{l=1}^{s} \frac{(-1)^{l-1}\Pi_{s-l}(x)}{l}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \frac{(-1)^{l-1} D^k|_0 P_{s-l}(x)}{l} = \sum_{l=1}^{s} \frac{(-1)^{l-1} b_{s-l,k}}{l}\,.$$

Таким образом, для коэффициентов $a_{s,k}$ и $b_{s,k}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$b_{s,k+1} = \sum_{l=0}^{s} \frac{(-1)^{l-1}}{l} b_{s-l,k} = \sum_{l=0}^{s} b_{l,1} b_{s-l,k}\,,$$

$$a_{s,k+1} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} a_{s-l,k} = \sum_{k=0}^{s} a_{l,1} a_{s-l,k}\,,$$

где $b_{l,1} = \frac{(-1)^{l-1}}{l}$, $a_{l,1} = \frac{1}{l!}$ находятся из (34) .

Для нахождения численных значений коэффициентов $a_{s,k}$ и $b_{s,k}$ используем производящие функции. Сначала докажем следующую теорему, из которой получим в качестве следствий нужные нам равенства.

Теорема 2. *Пусть есть два оператора A и B связанных отношением $A = f(B)$, то есть если $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varkappa_j x^j$, то $A = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varkappa_j B^j$. Пусть есть две последовательности многочленов U_n и V_n такие, что $AU_n = U_{n-1}$, $BV_n = V_{n-1}$, $AU_0 = 0$, $BV_0 = 0$ и $U_n(x) = V_n(x) = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n, & n \neq 0 \end{cases}$. Пусть $V_n = \sum\limits_k l_{nk} U_k$. Тогда $\sum\limits_{n,k} l_{nk} x^n y^k = \frac{1}{1-yf(x)}$ и $f^k(x) = \sum\limits_n l_{nk} x^n$.*

Пусть $\frac{1}{1-yf(x)} = \sum\limits_{n,k} d_{nk} x^n y^k$. Покажем индукцией по k, что $d_{nk} = l_{nk}$.

Основание индукции.

С одной стороны $\delta_{n,0} = V_n(0) = \sum\limits_k l_{nk} U_k(0) = \sum\limits_k l_{nk} \delta_{k,0} = l_{n,0}$.

С другой стороны из

$1 = \left.\frac{1}{1-yf(x)}\right|_{y=0} = \left.\sum\limits_{n,k} d_{nk} x^n y^k\right|_{y=0} = \sum\limits_n d_{n,0} x^n$ следует, что $d_{n,0} = \delta_{n,0}$.

Таким образом, $l_{n,0} = d_{n,0} = \delta_{n,0}$.

Шаг индукции.

Для многочленов U_n и V_n рассмотрим следующие две цепочки равенств

$$\left(A^{k+1} V_n\right)(0) = \left(A^{k+1} \sum_s l_{ns} U_{ks}\right)(0) = \sum_{ks} l_{ns} \left(A^{k+1} U_s\right)(0) =$$
$$= \sum_s l_{ns} U_{s-(k+1)}(0) = \sum_s l_{ns} \delta_{s,k+1} = l_{n,k+1}\,,$$
$$\left(A^{k+1} V_n\right)(0) = \left(A^k A V_n\right)(0) = \left(A^k \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa_j B^j V_n\right)(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa_j \left(A^k B^j V_n\right)(0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa_j \left(A^k V_{n-j}\right)(0) = \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \left(A^k V_{n-j}\right)(0) = \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \left(A^k \sum_s l_{n-j,s} U_s\right)(0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \sum_s l_{n-j,s} \left(A^k U_s\right)(0) = \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \sum_s l_{n-j,s} \delta_{s,k} = \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j l_{n-j,k}\,.$$

Из них следует, что $l_{n,k+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varkappa_j l_{n-j,k}$. Рассмотрим $\sum\limits_n d_{n,k+1} x^n = f^{k+1}(x) = f^k(x) f(x) = \sum\limits_s d_{s,k} x^s \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varkappa_j x^j = \sum\limits_{s,j} d_{s,k} \varkappa_j x^{s+j}$.

Здесь мы воспользовались равенством $f^k(x) = \sum\limits_s d_{s,k} x^s$, которое следует из сравнения правой и левой частей следующего выражения $\sum\limits_k f^k(x) y^k = \frac{1}{1-yf(x)} =$

$\sum\limits_{s,k} d_{sk} x^s y^k$. Откуда $d_{n,k+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varkappa_j d_{n-j,k}$.

Таким образом, получили, что l_{nk} и d_{nk} удовлетворяют одинаковым рекуррентным соотношениям при переходе от k к $k+1$и $l_{n,0} = d_{n,0}$. Поэтому по индукции $d_{nk} = l_{nk}$.

Следствие 2.1. *Если $A = \Delta$, $B = D$, $U_s = \Pi_s$, $V_s = P_s$ и $P_s(x) = \sum\limits_{k=0}^{s} a_{sk} \Pi_k(x)$, то $a_{sk} = \sum\limits_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{1}{j_1!\ldots.j_k!}$, где суммирование ведётся по всевозможным наборам натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k$ таким, что $j_1 + \ldots + j_k = s$.*

Так как $A = e^B - 1$, то из равенств

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_{sk} x^s = (e^x - 1)^k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right)^k$$

получаем для a_{sk} следующее выражение

$$a_{sk} = \sum_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{1}{j_1!\ldots.j_k!} ,$$

где суммирование ведётся по всевозможным наборам натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k$ таким, что $j_1 + \ldots + j_k = s$.

Следствие 2.2. *Если $A = D$, $B = \Delta$, $U_s = P_s$, $V_s = \Pi_s$ и $\Pi_s(x) = \sum\limits_{k=0}^{s} b_{sk} P_k(x)$, то $b_{sk} = \sum\limits_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{(-1)^{s-k}}{j_1\ldots.j_k}$, где суммирование ведётся по всевозможным наборам натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k$ таким, что $j_1 + \ldots + j_k = s$.*

Так как $A = \ln(B+1)$, то из равенств

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{sk} x^s = \ln^k(x+1) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \right)^k$$

получаем для b_{sk} следующее выражение

$$b_{sk} = \sum_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{(-1)^{s-k}}{j_1\ldots.j_k} ,$$

где суммирование ведётся по всевозможным наборам натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k$ таким, что $j_1 + \ldots + j_k = s$.

Таким образом, интересующие нас коэффициенты c_{sk} можно найти по формуле

$$c_{sk} = \frac{(-1)^{s-k}}{k!} \sum_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{1}{j_1\ldots.j_k} ,$$

где суммирование ведётся по всевозможным наборам натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k$ таким, что $j_1 + \ldots + j_k = s$.

Замечание. Отметим, что в представленных выше следствиях при получении выражений для a_{nk} и b_{nk} использовалось не представлением производящей функции $\frac{1}{1-yf(x)}$ для рассматриваемых коэффициентов, а равенство $f^k(x) = \sum\limits_n l_{nk}x^n$ между функцией для операторов $A = f(B)$ и коэффициентами l_{nk} из представления $V_n = \sum\limits_k l_{nk}U_k$ многочленов одного вида через многочлены другого вида.

Заключение

В статье исследованы различные формы асимптотических разложений в ЦПТ. Указано, как из разложений, построенных в [3], возможно получение разложений Грама-Шарлье и разложений Эджворта-Крамера. При этом сами разложения Грама-Шарлье и Эджворта-Крамера имеют новый на данный момент вид.

Автор выражает искреннюю благодарность В.В. Сенатову за постоянное внимание к данной работе.

Список литературы

[1] Кузьмин О.В. Обобщённые пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000.

[2] Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

[3] Сенатов В.В., Соболев В.Н. О новых формах асимптотических разложений в ЦПТ. Теория вероятн. и ее примен., в печати.