ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.5.015

КОНЦЕПЦИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Катулев А.Н.*, **Соломаха Г.М.****
*Кафедра математического моделирования
**Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 29.06.2010, после переработки 12.09.2010.

Разработана новая концепция идентифицируемости нелинейных многомерных систем обработки информации. Сущность концепции заключается в описании взаимосвязей между входами и выходами систем нелинейным операторным уравнением Гаммерштейна и несмещенном оценивании его ядер посредством минимизации статистически квадратичного функционала.

In this article a new conception of identification on nonlinear multivariate systems for treatment of data-in is elaborated. Essence of conception are a description of ties between inputs and outputs of systems by Hammerstein's nonlinear operator equation and unbiased estimating of Hammerstein's cores by means of statistical square functional too.

Ключевые слова: концепция, идентифицируемость, система обработки информации, интегральный оператор, ядро оператора.
Keywords: conception, identification, system of treatment, integral operator, core of operator.

Введение

К настоящему времени имеется достаточно много работ по научно-техническим проблемам систем обработки информации. В них рассмотрены и предложены для внедрения в основном линейные и линеаризованные методы [1-6], основанные на идеях канонического разложения, аппроксимации марковскими процессами или разложения нелинейностей в ряд Тейлора относительно номинальной траектории динамического объекта, либо относительно оценок параметров уравнений его состояния, получаемых непосредственно в процессе обработки информации. Эти подходы допустимы при малых отклонениях от номинальной траектории и для систем с сосредоточенными параметрами. На практике часто необходимо осуществлять обработку информации в системах с распределенными параметрами, т.е. в многомерных системах, например, в телевизионных системах, системах оптической и тепловизионной локации, радиолокации, геофизики, навигации, системах контроля пространственно-временного загрязнения воздушных и водных сред.

При сложных условиях функционирования обработка информации в названных системах должна осуществляться нелинейными методами. Однако, относительно последних предложены только частные решения и в основном для обработки одномерных случайных процессов. Поэтому существует актуальная необходимость их развития.

Цель статьи – обоснование концепции идентифицируемости нелинейных систем обработки информации без линеаризации и аппроксимации марковскими.

1. Концепция идентифицируемости

Воспользуемся операторным подходом. Так, для большинства реально встречающихся нелинейных систем зависимость их выхода $y(t)$, от входа $x(t)$, в общем виде описывается оператором Немыцкого [7] $y(t) = f(x(t), t)$, где $f(x, t)$- некоторая функция.

Для оператора Немыцкого получен ряд результатов, в частности, исследованы его свойства - вполне непрерывность и ограниченность [8,9], однако при исследовании сложных систем его применение в таком общем виде не приводит к практически важным результатам.

В [7] теоретически исследованы также и свойства оператора Урысона $y(t) = \int\limits_0^t K(t, \tau, x(\tau))d\tau$ в зависимости от свойств функции K(. . .). Однако этот оператор тоже имеет достаточно общий вид. Аналогичное утверждение относится и к оператору Заде, являющемуся обобщением оператора Урысона [10].

Поэтому используются более частные операторы. Для раскрытия их сущности рассмотрим систему из двух линейных звеньев, разделенных нелинейным звеном, осуществляющим преобразование вида $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z^i$.

Тогда зависимость «вход-выход» такой системы имеет вид

$$y(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int\limits_0^t K_2(t, \tau)(\int\limits_0^\tau K_1(\tau, s)x(s)ds)^i d\tau,$$

где $K_1(\tau, s)$ и $K_2(\tau, s)$ - ядра интегральных операторов соответственно для первого и второго линейных звеньев.

Обобщением такого оператора является оператор Ляпунова-Лихтенштейна $y(x(t), t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^T ... \int\limits_0^T K_i(t, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_i)x(\tau_1)x(\tau_2)...x(\tau_i)d\tau_1 d\tau_2...d\tau_i$, из которого непосредственно выписывается оператор Вольтерра [11,12]

$y(x(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{-T}^{T} ... \int\limits_{-T}^{T} h_i(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_i)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)...x(t - \tau_i)d\tau_1 d\tau_2...d\tau_i$, и тогда нелинейная система характеризуется ядрами Вольтерра

$$h_i(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_i), i = 1, 2, ..., n.$$

Для определения ядер Вольтерра как последовательности функций от одной до n переменных необходимо решать систему из n нелинейных многомерных интегральных уравнений с учетом смешанных моментов входного сигнала порядков до $2n$ в разные моменты (как последовательность моментных функций от двух до $2n$ переменных). В случае же применения полинома Вольтерра для обработки двумерных полей кратность многомерных интегралов и количество переменных в ядрах Вольтерра и смешанных моментах удваивается. Еще большие сложности возникают при обработке информации в случае трех и более переменных. Эти недостатки существенно затрудняют применение на практике нелинейного оператора Вольтерра в том числе и его обобщения в виде оператора Винера [10].

Анализ большого числа сложных систем состоящих из совместно работающих линейных и нелинейных элементов, позволяет установить, что для описания зависимости их выхода от входа можно воспользоваться оператором Гаммерштейна [7,13,14] n-го порядка $y(x(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{-T}^{T} K_i(\tau)x^i(t-\tau)d\tau$. Однако, до настоящего времени применение этого оператора ограничивается одномерными системами с сосредоточенными параметрами.

В связи с этим требуется сформировать концепцию идентифицируемости нелинейных систем, не связанную с имеющейся концепцией локальной идентифицируемости [13].

Содержательно идентифицируемость заключается в восстановлении взаимосвязей между входами и выходами систем при условии, что входы известны, а выходы представляются уравнениями наблюдения в виде операторных уравнений, ядра которых подлежат оцениванию. Определение ядер составляет математическую сущность проблемы идентификации при выполнении требования однозначных связей между входами и выходами систем. Существование решений нелинейных операторных уравнений есть условие идентифицируемости нелинейных многомерных систем.

Обоснованность принятой концепции исходит из следующих положений:

1.1. Нелинейные операторы в задачах нелинейной фильтрации рассматриваются в пространстве $L_2[0,T]$, в котором операторы Гаммерштейна, Вольтерра, Ляпунова-Лихтенштейна являются вполне непрерывными с неизвестными ядрами в силу того, что они представляются частными случаями вполне непрерывного оператора Немыцкого в $L_2[0,T]$ [7].

При этом два последних оператора в классе обобщенных функций ядер сводятся к оператору Гаммерштейна. Действительно, оператор Ляпунова-Лихтенштейна непосредственно приводится к оператору Вольтерра [12]. Так, сравнивая выражения для оператора Вольтерра

$y_1(x(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{T} \dots \int\limits_{0}^{T} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\dots x(t-\tau_i)d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i$ и оператора Гаммерштейна

$y_2(x(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{-T}^{T} K_i(\tau)x^i(t-\tau)d\tau$, (1) имеем, если принять

$h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = \delta(\tau_1 - \tau_2)\delta(\tau_2 - \tau_3)\dots\delta(\tau_{i-1} - \tau_i)K_i(\tau_i)$, где $\delta(\tau_s - \tau_{s+1})$ отлично от нуля и равно 1 только при $\tau_s = \tau_{s+1}$, что выражение для оператора Вольтерра приводится к выражению (1) для оператора Гаммерштейна.

Ясно, что свойства вполне непрерывности и ограниченности одномерных операторов очевидным образом распространяются и на многомерные операторы указанных видов.

1.2. При описании сложных систем названными операторами достаточно только непрерывности подынтегральных функций, что обусловливает важное преимущество по сравнению с описанием систем нелинейными дифференциальными уравнениями.

1.3. Оператор Гаммерштейна имеет простую структуру по сравнению с другими названными операторами, для его реализации требуется существенно меньших вычислительных затрат и априорных сведений.

1.4. Для отыскания ядер оператора Гаммерштейна допустимо введение критерия в виде среднеквадратической ошибки фильтрации. Процесс на его выходе будет несмещенным и эффективным.

2. Оценка ядер нелинейного оператора Гаммерштейна n-го порядка: синтез структуры фильтра

На основе принятой концепции построим многомерный нелинейный полиномиальный фильтр Гаммерштейна.

Будем полагать, что измеренное m- мерное входное поле $h(x_1, x_2, ..., x_m)$ представляется аддитивной смесью случайного полезного m-мерного поля $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ и случайного помехо-шумового поля $\eta(x_1, x_2, ..., x_m)$ без введения каких-либо предположений о законах распределения - задаются только моментные функции полей от m переменных до $2n$-го порядков, где n- фиксированное натуральное число.

Построение фильтра выполним по критерию минимума среднего квадрата ошибки фильтрации

$M\{[f(u_1, u_2, ...u_m) - F(h(u_1, u_2, ..., u_m))]^2\}$, (2) где $F[h(u_1, u_2, ..., u_m)] = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^{R_{x_1}} \int\limits_0^{R_{x_2}} ... \int\limits_0^{R_{x_m}} V_k(x_1, x_2, ...x_m) h^k(u_1 - x_1, u_2 - x_2, ..., u_m - x_m) dx_1 dx_2 ... dx_m$, (3)

$V_k(x_1, x_2, ..., x_m)$, $k = \overline{1, n}$ – неизвестные ядра оператора Гаммерштейна, подлежащие определению;

$R_{x_1}, R_{x_2}, ..., R_{x_m}$– заданные величины памяти фильтра по координатам $x_1, x_2, ..., x_m$ соответственно; $R_{x_j} \in X_j$, $j = \overline{1, m}$;

$(u_1, u_2, ..., u_m) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, $X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$– область задания поля;

$X_j, j = \overline{1, m}$ – подмножества множества действительных чисел.

Для нахождения ядер оператора Гаммерштейна $V_k(x_1, x_2, ..., x_m)$, $k = \overline{1, n}$ n-го порядка докажем теорему.

Теорема 1. Ядра - весовые функции m- мерного оператора Гаммерштейна n-го порядка для точки $(u_1, u_2, ..., u_m)$ являются решением системы m- мерных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{R_{x_1}} \int\limits_0^{R_{x_2}} ... \int\limits_0^{R_{x_m}} V_k(z_1, z_2, ..., z_m) M\{h^i(u_1 - x_1, ..., u_m - x_m) \cdot$$

$$\cdot h^k(u_1 - z_1, ..., u_m - z_m)\} dz_1 dz_2 ... dz_m =$$

$$= M\left\{f(u_1, u_2, ..., u_m) h^i(u_1 - x_1, u_2 - x_2, ..., u_m - x_m)\right\}, \quad (4)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad 0 \leqslant x_j \leqslant R_{x_j}, j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Минимальное значение (2) достигается для оператора $F[h(u_1, u_2, ..., u_m)]$, удовлетворяющего условию [4,15]

$$M\{[f(u_1, u_2, ...u_m) - F(h(u_1, u_2, ..., u_m))] \cdot F(h(u_1, u_2, ..., u_m)\} = 0. \qquad (1)$$

Затем, подставив (3) в (1), получим для точки $(u_1, u_2, ..., u_m)$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{R_{x_1}} \int_0^{R_{x_2}} ... \int_0^{R_{x_m}} V_i(x_1, x_2, ..., x_m) \times \times \sum_{k=1}^{n} \int_0^{R_{x_1}} \int_0^{R_{x_2}} ... \int_0^{R_{x_m}} V_k(z_1, z_2, ..., z_m) \cdot$$

$$\cdot M\{h^i(u_1 - x_1, ..., u_m - x_m) h^k(u_1 - z_1, ..., u_m - z_m)\} \times \times dz_1 dz_2 ... dz_m dx_1 dx_2 ... dx_m =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{R_{x_1}} \int_0^{R_{x_2}} ... \int_0^{R_{x_m}} V_i(x_1, x_2, ..., x_m) \times$$

$$\times M\left\{f(u_1, u_2, ..., u_m) h^i(u_1 - x_1, u_2 - x_2, ..., u_m - x_m)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_m. \qquad (2)$$

Естественно предположить, что функции $V_k(x_1, x_2, ..., x_m)$, $k = \overline{1, n}$ не равны тождественно нулю. Тогда из (4) приходим к системе m- мерных интегральных уравнений (4) типа уравнений Фредгольма первого рода с неизвестными весовыми функциями оператора Гаммерштейна. Теорема доказана.

Решение системы (4) отыскивается рекуррентным методом [16] .

Следствие. Из уравнений для оператора Гаммерштейна при $n = 1$ из теоремы 1 получаем уравнения Винера-Хопфа линейной фильтрации.

Действительно, приняв в (4) весовые функции $V_k(x_1, x_2, ..., x_m)$ равными нулю для значений k больших 1, приходим к уравнению

$$\int_0^{R_{x_1}} \int_0^{R_{x_2}} ... \int_0^{R_{x_m}} V_1(x_1, x_2, ..., x_m) M_1(x_1 - z_1, x_2 - z_2, ..., x_m - z_m) dz_1 dz_2 ... dz_m =$$

$$= M_2(x_1, x_2, ..., x_m), \qquad (7)$$

где

$$0 \leqslant x_j \leqslant R_{x_j}, j = \overline{1, m}, M_1(x_1 - z_1, x_2 - z_2, ..., x_m - z_m) =$$

$$= M\left\{h(u_1 - x_1, u_2 - x_2, ..., u_m - x_m) h(u_1 - z_1, u_2 - z_2, ..., u_m - z_m)\right\}$$

$$M_2(x_1, x_2, ..., x_m) = M\left\{f(z_1, z_2, ..., z_m) h(u_1 - x_1, u_2 - x_2, ..., u_m - x_m)\right\}.$$

Если теперь в уравнении (7) положить $m = 1$, то получим уравнение Винера-Хопфа линейной фильтрации.

Отметим, что оценка полезного сигнала на выходе фильтра, параметры которого находятся в соответствии с теоремой 1, является смещенной. Несмещенная оценка находится в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 2. Несмещенная оценка поля $f(u_1, u_2, ..., u_m)$ на выходе фильтра определяется выражением

$$F_1[h(u_1,u_2,...,u_m)] = F[h(u_1,u_2,...,u_m)] + M[f(u_1,u_2,...,u_m]-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\int_0^{R_{x_1}}\int_0^{R_{x_2}}...\int_0^{R_{x_m}} V_k(x_1,x_2,...,x_m)\cdot$$
$$\cdot M[h^k(u_1-x_1,u_2-x_2,...,u_m-x_m)]dx_1dx_2...dx_m \tag{8}$$

и является эффективной.

Доказательство. Воспользуемся математическим ожиданием поля $F[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ на выходе фильтра, параметры которого определяются теоремой 1 при принятых допущениях о полезном поле $f(u_1,u_2,...,u_m)$ и помехо-шумовом поле $\eta(u_1,u_2,...,u_m)$. Имеем

$$M\{F[h(u_1,u_2,...,u_m)]\} =$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{R_{x_1}}\int_0^{R_{x_2}}...\int_0^{R_{x_m}} V_k(x_1,x_2,...,x_m)\cdot$$
$$\cdot M[h^k(u_1-x_1,u_2-x_2,...,u_m-x_m)]dx_1dx_2...dx_m. \tag{3}$$

Видно, что $F[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ является смещенной оценкой $m-$мерного полезного поля $f(u_1,u_2,...,u_m)$ за исключением трудно осуществимого на практике случая равенства правой части (5) значению $M[f(u_1,u_2,...,u_m)]$. Для получения несмещенной оценки $F_1[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ полезного поля $f(u_1,u_2,...,u_m)$ добавим к $F[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ математическое ожидание полезного поля и вычтем правую часть равенства (5). В итоге получим выражение (8).

С учетом (5) имеем

$M\{F_1[h(u_1,u_2,...,u_m)]\} = 0$, то есть $F_1[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ является несмещенной оценкой полезного поля $f(u_1,u_2,...,u_m)$.

Эффективность оценки $F_1[h(u_1,u_2,...,u_m)]$ полезного поля $f(u_1,u_2,...,u_m)$ при этом непосредственно вытекает из критерия (2) оптимальности фильтра и следующего факта:

Дисперсия $D_\eta(x_1,x_2,...,x_m)$ ошибки фильтра Гаммерштейна с ядрами, полученными из решения системы уравнений в теореме 1, является минимальной и определяется выражением

$$D_\eta(x_1,x_2,...,x_m) =$$
$$= D_f(x_1,x_2,...,x_m) - M\left\{f(x_1,x_2,...,x_m)F[h(x_1,x_2,...,x_m)]\right\}, \tag{10}$$

причем для $n > 1$ (нелинейный случай) точность работы фильтра не ухудшается по сравнению с $n = 1$ (линейный случай) и всегда

$D_\eta(x_1,x_2,...,x_m) \leqslant D_f(x_1,x_2,...,x_m)$, (11)$D_f(x_1,x_2,...,x_m)$*- дисперсия полезного m- мерного поля $f(x_1,x_2,...,x_m)$ в точке $(x_1,x_2,...,x_m)$.*

Для доказательства этого найдем дисперсии $D_\eta(u_1,u_2,...,u_m)$**,** воспользовавшись соотношениями (4) и (1). Имеем

$$D_\eta(u_1,u_2,...,u_m) = M\{[f(u_1,u_2,...u_m) - F(h(u_1,u_2,...,u_m))]^2\} =$$

$=M\{[f(u_1,u_2,...,u_m)]^2\}-M\{f(u_1,u_2,...,u_m)F(h(u_1,u_2,...,u_m))\}=$

$$=D_f(u_1,u_2,...,u_m)-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{R_{x_1}}...\int\limits_0^{R_{x_m}}V_i(z_1,z_2,...,z_m)\cdot$$

$$\cdot M\{f(u_1,u_2,...,u_m)h^i(u_1-z_1,u_2-z_2,...,u_m-z_m)dz_1dz_2...dz_m=$$

$$=D_f(u_1,u_2,...,u_m)-\quad M\{f(u_1,u_2,...,u_m)F(h(u_1,u_2,...,u_m)\}$$

и, таким образом, для доказательства (11) достаточно установить верность неравенства

$M\{f(u_1,u_2,...,u_m)F(h(u_1,u_2,...,u_m))\}\geqslant 0$ при всех натуральных n.

Для этого каждое i-ое, $i=\overline{1,n}$, уравнение в (4) умножим на соответствующую ему функцию $V_i(z_1,z_2...,z_m)$, сложим полученные уравнения и проинтегрируем в области $[0,R_{x_1}]\times[0,R_{x_2}]\times...\times[0,R_{x_m}]$. В результате получим

$$M\{f(u_1,u_2,...,u_m)F(h(u_1,u_2,...,u_m))\}=$$

$$=M\{[\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{R_{x_1}}...\int\limits_0^{R_{x_m}}V_i(z_1,z_2,...,z_m)\cdot$$

$$\cdot h^i(u_1-z_1,u_2-z_2,...,u_m-z_m)dz_1dz_2...dz_m]^2\}\geqslant 0.$$

Из последнего неравенства и (10) следует справедливость неравенства (11). Отметим, что соотношения (10) и (11) выполняются и для несмещенной оценки полезного поля $F_1(h(u_1,u_2,...,u_m))$.

Тем самым все положения утверждаемого факта, а также и теоремы доказаны.

В случае фильтрации одномерных сигналов в качестве переменной обычно используется время t, тогда из теорем 1 и 2 как следствие получаем следующую теорему.

Теорема 3. Несмещенная эффективная оценка полезного сигнала $f(t)$ на выходе фильтра Гаммерштейна, оптимального по критерию (2), определяется выражением

$F_1[h(t)]=F[h(t)]+M[f(t)]-\sum\limits_{k=1}^{n}V_k(x)M\left[h^k(t-x)\right]dx$, *где весовые функции одномерного оператора Гаммерштейна n- го порядка для момента t являются решением системы одномерных интегральных уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{R_t}V_k(z)M[h^i(t-x)h^k(t-z)]dz=M[f(t)h^i(t-x)],$$

$$i=\overline{1,n};\quad 0\leqslant x\leqslant R_t.$$

Для решения уравнений (4), определяющих искомые весовые функции, можно воспользоваться стандартными численными методами решения интегральных уравнений [17].

Заключение

Обоснована концепция идентифицируемости нелинейных многомерных систем с использованием для описания взаимосвязей между их входами и выходами нелинейного операторного уравнения Гаммерштейна. Она является развитием принципов идентифицируемости нелинейных систем и не связана с их линеаризацией.

Синтезирован по критерию минимума статистически квадратичного функционала нелинейный полиномиальный фильтр n-го порядка для обработки двумерных полей при заданных моментах до $2n$ порядков входного сигнала и аддитивной помехи. Фильтр обеспечивает получение несмещенных и эффективных с минимальной дисперсией оценок полезного входного поля и, в отличие от известных, использует моментные функции для существенно меньшего числа переменных и минимальную априорную информацию о вероятностных характеристиках входного поля. Показано, что с увеличением порядка фильтра точность его работы улучшается.

Уравнения Винера-Хопфа линейной фильтрации непосредственно вытекают как частный случай из полученных уравнений многомерной нелинейной фильтрации.

Список литературы

[1] Катковник В.Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М.: Наука, 1976.

[2] Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Наука, 2007.

[3] Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Сойфера. М.: Физматлит, 2003.

[4] Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: ГИТТЛ, 1957.

[5] Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Радио и связь, 1976.

[6] Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.

[7] Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М.: Наука, 1967.

[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М. Физматгиз, 1959.

[9] Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956.

[10] Райбман Н.С., Капитоненко В.В., Овсепян Ф.А., Варлаки П.М. Дисперсионная идентификация. М.: Наука, 1981.

[11] Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.

[12] Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. М.: Мир, 1964.

[13] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.

[14] Функциональный анализ / Под ред. С.Г.Крейна. М.: Наука, 1964.

[15] Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.

[16] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.3. М.: Сов. радио, 1976.

[17] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.