УДК 517.95

# ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСИ

**Мейрманов А.М., Гриценко С.А.**
Кафедра прикладной математики и механики
Белгородский государственный университет, г. Белгород

*Поступила в редакцию 23.06.2010, после переработки 20.09.2010.*

Математическая модель диффузии и медленной конвекции примеси в абсолютно упругой пористой среде выводится как усреднение системы уравнений Стокса, дополненной конвективным уравнением диффузии.

We derive the mathematical model of diffusion and slow convection of an admixture in the absolutely rigid porous medium as the homogenization of the Stokes equations, supplemented by the convective diffusion equation.

**Ключевые слова:** усреднение периодических структур, конвективное уравнение диффузии, уравнения Стокса.
**Keywords:** homogenization of the periodical structures, convective diffusion equation, Stokes equations.

## 1. Постановка задачи

Пусть ограниченная связная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, $Y_s$ — твердая часть $Y$, $Y_f$ — жидкая часть, $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$. Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon Y_f$, твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon Y_s$, граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \backslash \partial\Omega$ — периодическое повторение в $\Omega$ границы $\varepsilon\gamma$.

В безразмерных (не отмеченных звездочкой) переменных

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}L, \qquad t_* = t\tau, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}L, \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F}g, \quad p_* = pp_0$$

изучаемая система уравнений для скорости жидкости $\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}(x,t)$, давления $\tilde{p}^{\,\varepsilon}(x,t)$ и концентрации примеси $\tilde{c}^{\,\varepsilon}(x,t)$ в области $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$ состоит из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которых кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\tilde{c}^{\,\varepsilon})\nabla \tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon} + (\alpha_\nu \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon} - \tilde{p}^{\,\varepsilon})\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^{\,\varepsilon}}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

и конвективного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{c}^{\,\varepsilon}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon} \cdot \nabla \tilde{c}^{\,\varepsilon} = \alpha_D \, \Delta \tilde{c}^{\,\varepsilon}. \tag{3}$$

На границе $\Gamma^\varepsilon$ скорость жидкости удовлетворяет однородному условию Дирихле

$$\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{4}$$

а концентрация примеси – однородному условию Неймана

$$\frac{\partial \tilde{c}^{\,\varepsilon}(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon. \tag{5}$$

Задача замыкается начальными условиями:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}(x,0) = 0, \quad \tilde{p}^{\,\varepsilon}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon_f, \tag{6}$$

$$\tilde{c}^{\,\varepsilon}(x,0) = c_0(x), \; 0 \leqslant c_0(x) \leqslant c^{(0)} \leqslant 1, \quad x \in \Omega^\varepsilon_f. \tag{7}$$

В (1) – (7) $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\Gamma$, $\mu(c)$ – безразмерная вязкость, $\mathbf{F}$ – заданная плотность внешних массовых сил, $\mathbb{I}$ – единичная матрица, безразмерные положительные постоянные $\alpha_i$ $(i = \tau, \nu, \mu, \ldots)$ определяются формулами

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\nu = \frac{\nu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu_0}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_p = \frac{p_0}{L g \rho_0}, \quad \alpha_D = \frac{D\tau}{L},$$

где $L$ – характерный макроскопический размер (диаметр рассматриваемой физической области), $\tau$ – характерное время данного физического процесса, $\rho_0$ – средняя плотность воздуха при атмосферном давлении, $g$ – ускорение силы тяжести, $p_0$ – атмосферное давление, $\mu_0$ – вязкость жидкости при нулевой концентрации примеси, $D$ – коэффициент диффузии.

Математическая модель (1) – (7) содержит малый параметр $\varepsilon$, равный отношению среднего размера пор $l$ к размеру $L$ рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$. Поэтому естественным упрощением модели (1) – (7), сохраняющим основные свойства задачи, являются всевозможные предельные режимы модели при $\varepsilon \to 0$.

Чтобы говорить о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, необходимо рассматривать все функции и последовательности в фиксированной области ($\Omega^\varepsilon_f$ зависит от $\varepsilon$). Поэтому мы продолжаем все функции из области $\Omega^\varepsilon_f \subset \Omega$ в $\Omega$. Скорость $\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}$ и давление $\tilde{p}^\varepsilon$ продолжаются в $\Omega$ тривиально – нулем (на границе $\Gamma^\varepsilon$ $\tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon} = 0$).

Положим $\mathbf{v}^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{\mathbf{v}}^{\,\varepsilon}, & y \in \Omega^\varepsilon_f. \end{cases}$ Аналогично, $p^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{p}^{\,\varepsilon}, & y \in \Omega^\varepsilon_f. \end{cases}$

Концентрацию $\tilde{c}^{\,\varepsilon}$ можно продолжить, используя известные методы продолжения, но при этом для продолженной функции теряется важное для нас свойство — ограниченность производной $\partial c^\varepsilon/\partial t$ в некотором сопряженном пространстве, необходимое для предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Поэтому мы воспользуемся достаточно естественной аппроксимацией, предполагающей наличие диффузии в твердом скелете, характеризующейся малым параметром $\lambda > 0$:

$$\frac{\partial c^\varepsilon_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda \nabla c^\varepsilon_\lambda = \operatorname{div}\big( (\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)) \, \nabla c^\varepsilon_\lambda \big), \quad x \in \Omega. \tag{3'}$$

Здесь $\chi^\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ — характеристическая функция $\Omega_f^\varepsilon$ в $\Omega$, $\chi(\mathbf{y})$ — характеристическая функция $Y_f$ в $Y$:

$$\chi(y) = \begin{cases} 0, & y \in Y_s, \\ 1, & y \in Y_f. \end{cases}$$

Таким образом, вместо уравнения (3) мы рассмотрим уравнение (3'), вместо краевого условия (5) — краевое условие

$$\frac{\partial c_\lambda^\varepsilon(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in S. \tag{5'}$$

Исходная задача получается после предельного перехода при $\lambda \to 0$ (уже после усреднения).

## 2. Основные результаты

Для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ справедлива следующая

**Теорема 1.** *Задача (1),(2),(3'),(4),(5'),(6),(7) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p_\lambda^{\varepsilon\, 2})\, dx + \int_{\Omega_T} \Big(\alpha_\nu (div\, \mathbf{v}_\lambda^\varepsilon)^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{v}_\lambda^\varepsilon|^2\Big)\, dx\, dt \leqslant M^2 F^2, \tag{2.1}$$

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega |c_\lambda^\varepsilon|^2\, dx + \int_{\Omega_T} (\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)) |\nabla c_\lambda^\varepsilon|^2\, dx\, dt \leqslant M^2 F^2, \tag{2.2}$$

*где $M$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon$, $\lambda$ и $F^2 = \int_{\Omega_T} |\mathbf{F}(x,t)|^2\, dx\, dt$.*

Подробное доказательство теоремы 1 изложено в работах [3] и [5].

Пусть выполнено следующее предположение:

**Предположение 1.** *При $\varepsilon \to 0$*

$$\alpha_\mu \to 0, \quad \alpha_\tau \to 0,$$
$$\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \to \mu_1, \quad 0 < \mu_1 < \infty,$$
$$\alpha_\nu \to \nu_0, \quad 0 < \nu_0 < \infty,$$
$$\alpha_p \to \eta_0, \quad 0 < \eta_0 < \infty,$$
$$\alpha_D \to D_0, \quad 0 < D_0 < \infty.$$

Для фиксированного положительного числа $\lambda$ справедлива

**Теорема 2.** *Решение $(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon, p_\lambda^\varepsilon, c_\lambda^\varepsilon)$ задачи (1) – (7) сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ усредненной системы:*

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}^{(f)} \Big( \frac{1}{\mu(c_\lambda)} \big(-\frac{\nabla q_\lambda}{m} + \mathbf{F}\big)\Big), \\ &q_\lambda = p_\lambda + \frac{\nu_0}{\eta_0} \frac{\partial p_\lambda}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} + \eta_0\, div\, \mathbf{v}_\lambda = 0, \\ &\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla c_\lambda = div\, (\mathbb{B}_\lambda^{(c)} \nabla c_\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

*где $\mathbb{B}^{(f)}$ и $\mathbb{B}_\lambda^{(c)}$ — симметричные и положительно определенные матрицы, вычисляемые по формулам (4.10) и (4.17).*

**Теорема 3.** *Пусть* $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ *есть решение системы (2.3) для фиксированного* $\lambda > 0$*. Тогда при* $\lambda \to 0$ *функции* $\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda$ *сходятся к решению* $(\mathbf{v}, p, c)$ *усредненной системы:*

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v} = \mathbb{B}^{(f)}\Big(\frac{1}{\mu(c)}\big(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F}\big)\Big),\\ &q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \eta_0 div\, \mathbf{v} = 0,\\ &\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = div\,(\mathbb{B}_0^{(c)}\nabla c), \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

*где матрица* $\mathbb{B}_0^{(c)}$ *определяется формулой (4.17) для* $\lambda = 0$.

## 3. Вспомогательные сведения

**Определение 1.** *Двухмасштабная сходимость.*

*Последовательность* $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ *называется двухмасштабно сходящейся к пределу* $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$*, если для любой гладкой 1-периодической по* $y$ *функции* $\sigma(\mathbf{x}, t, y)$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\varphi^\varepsilon(\mathbf{x},t)\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega_T}\int_Y \varphi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}dt.$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой:

**Теорема 4.** *(теорема Нгуетсенга)*

*1. Из любой ограниченной последовательности в* $L_2(\Omega_T)$ *можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу* $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$.

*2. Пусть последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ *равномерно ограничены в* $L_2(\Omega_T)$*. Тогда существуют 1-периодическая по* $y$ *функция* $\varphi(\mathbf{x}, t, y)$ *и подпоследовательность из* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *такие, что* $\varphi, \nabla_y\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$*, а*

$$\{\varphi^\varepsilon\} \to \varphi, \quad \{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\} \to \nabla_y\varphi \quad \textit{двухмасштабно.}$$

*3. Пусть последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ *равномерно ограничены в* $L_2(\Omega_T)$*. Тогда существуют функции* $\varphi \in L_2(\Omega_T), \psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$ *и подпоследовательность из* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *такие, что* $\psi$ *1-периодична по* $y$, $\nabla_y\psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$*, а*

$$\{\varphi_\varepsilon\} \to \varphi, \quad \{\nabla_x\varphi_\varepsilon\} \to \nabla_x\varphi(\mathbf{x},t) + \nabla_y\psi(\mathbf{x},t,y) \quad \textit{двухмасштабно.}$$

**Следствие 1.** *Пусть* $\sigma \in L_2(Y)$ *и* $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ *означает* $\sigma(\mathbf{x}/\varepsilon)$*. Пусть последовательность* $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L_3(\Omega_T)$ *двухмасштабно сходится к некоторому пределу* $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$*. Тогда последовательность* $\{\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon\}$ *двухмасштабно сходится к* $\sigma\varphi$.

### 4. Доказательство теоремы 2

Фиксируем положительное число $\lambda$.

Используя оценку (8):

$$\int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\, dx\, dt \leqslant \frac{MF^2}{\alpha_\mu}$$

и неравенство Фридрихса-Пуанкаре в периодической структуре [2, с.653]:

$$\int_{\Omega^\varepsilon_T} |\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\, dx\, dt \leqslant C\varepsilon^2 \int_{\Omega^\varepsilon_T} |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\, dx\, dt,$$

получаем

$$\int_{\Omega_T} |\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\, dx\, dt \leqslant C\varepsilon^2 \frac{MF^2}{\alpha_\mu} = M_1 F^2. \tag{4.1}$$

Таким образом, из последовательностей $\{\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda\}$, $\{\operatorname{div}(\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda)\}$, $\{p^\varepsilon_\lambda\}$ можно извлечь подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ и двухмасштабно в $L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda \rightharpoonup \mathbf{v}_\lambda, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda) \to \operatorname{div} \mathbf{v}_\lambda, \quad p^\varepsilon_\lambda \rightharpoonup p_\lambda \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda \to \mathbf{V}_\lambda(x,t,y), \quad p^\varepsilon_\lambda \to P_\lambda \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y),$$

$$\mathbf{v}_\lambda = \langle \mathbf{V}_\lambda \rangle_Y = \int_Y \mathbf{V}_\lambda(x,t,y)\, dy, \quad p_\lambda = \langle P_\lambda \rangle_Y.$$

Кроме того, если положим

$$q^\varepsilon_\lambda = p^\varepsilon_\lambda + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_p} \frac{\partial p^\varepsilon_\lambda}{\partial t},$$

то уравнение (1) примет вид

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha_\mu \mu(c^\varepsilon_\lambda) \nabla \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda) - \nabla q^\varepsilon_\lambda + \mathbf{F}, \tag{1$'$}$$

тогда

$$q^\varepsilon_\lambda \rightharpoonup q_\lambda = p_\lambda + \frac{\nu_0}{\eta_0} \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$q^\varepsilon_\lambda \to Q_\lambda(x,t,y) = P_\lambda + \frac{\nu_0}{\eta_0} \frac{\partial P_\lambda}{\partial t} \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y), \quad q_\lambda = \langle Q_\lambda \rangle_Y.$$

Оценка (2.2) позволяет нам из последовательности $\{c^\varepsilon_\lambda\}$ извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$. Имеем компактное вложение $\mathbb{W}^1_2(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}^1_2(\Omega))^*$. Обозначим $W = \{v | v \in \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T); \partial v/\partial t \in (\mathbb{W}^1_2(\Omega))^*\}$. Очевидно, что $c^\varepsilon_\lambda \in W$. По теореме о компактности [4, с.70, теорема 5.1 ] вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что

$$c^\varepsilon_\lambda \to c_\lambda \ \text{сильно в} \ \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Кроме того,

$$\nabla c^\varepsilon_\lambda \to \nabla c_\lambda + \nabla_y C_\lambda(x,y,t) \quad \text{двухмасштабно в} \quad \mathbb{L}_2(\Omega_T \times Y).$$

Далее доказательство теоремы основывается на сформулированных ниже леммах. Доказательство лемм 1 — 3 приведено в работе [2].

Справедливы следующие утверждения:

**Лемма 1.**

$$P_\lambda(x,t,y) = \frac{1}{m}p_\lambda(x,t)\chi(y), \quad Q_\lambda(x,t,y) = \frac{1}{m}q_\lambda(x,t)\chi(y), \tag{4.2}$$

*где*

$$m = \int_Y \chi(y)\,dy;$$

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial t} + \eta_0 \ div\ \mathbf{v}_\lambda = 0, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{\textit{при} } x \in S. \tag{4.4}$$

**Лемма 2.** *Функция $\mathbf{V}_\lambda(x,t,y)$ есть решение периодической краевой задачи:*

$$\mu_1 \Delta_y \mathbf{V}_\lambda - \nabla R + \mathbf{z} = 0, \tag{4.5}$$

$$div\ \mathbf{V}_\lambda = 0, \quad y \in Y_f, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{V}_\lambda|_\gamma = 0, \tag{4.7}$$

$$\text{\textit{где} } \mathbf{z}(x,t) = \frac{1}{\mu(c_\lambda)}\Big(-\frac{\nabla q_\lambda}{m} + \mathbf{F}\Big), \tag{4.8}$$

**Лемма 3.** *Функция $\mathbf{v}_\lambda(x,t) = \int_{Y_f} \mathbf{V}_\lambda(x,t,y)\,dy$ есть решение усредненного уравнения*

$$\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}^{(f)}\mathbf{z}, \tag{4.9}$$

$$\text{\textit{где} } \mathbb{B}^{(f)} = \langle \sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i \rangle_{Y_f}, \tag{4.10}$$

*а функции $\mathbf{V}^{(i)}$ определяются из периодических краевых задач:*

$$\mu_1 \Delta_y \mathbf{V}^{(i)} - \nabla R^{(i)} + \mathbf{e}_i = 0,$$

$$div\ \mathbf{V}^{(i)} = 0, \quad y \in Y_f,$$

$$\mathbf{V}^{(i)}|_\gamma = 0. \tag{4.11}$$

**Лемма 4.** *Функция $C_\lambda(x,t,y)$ является решением периодической краевой задачи*

$$div_y\Big(D_{(\lambda)}(y)\big(\nabla c_\lambda(x,t) + \nabla_y C_\lambda(x,t,y)\big)\Big) = 0, \quad y \in Y, \tag{4.12}$$

*с условием нормировки*

$$\int_Y C_\lambda\,dy = 0,$$

*где*

$$D_{(\lambda)}(y) = \chi(y)D_0 + \lambda\big(1-\chi(y)\big).$$

*Доказательство.* Индекс $\lambda$ опускаем. Пользуясь равенством $\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon = \operatorname{div}(\mathbf{v}^\varepsilon c^\varepsilon) - c^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon$, запишем уравнение (3') в следующем виде:

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}^\varepsilon c^\varepsilon) - c^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon = \operatorname{div}\Big(\big(\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\big)\nabla c^\varepsilon\Big), \tag{4.13}$$

затем умножим его на произвольную гладкую функцию $\varphi(x,t)$, такую что $\varphi(x,0)=\varphi(x,T)=0$, и проинтегрируем по области $\Omega_T$:

$$\int_{\Omega_T}\Big(-c^\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} - c^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon\cdot\nabla\varphi - c^\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{v}^\varepsilon\varphi + \big(\chi^\varepsilon\alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\big)\nabla c^\varepsilon\cdot\nabla\varphi\Big)\,dx\,dt = 0, \tag{4.14}$$

Пробную функцию $\varphi$ выберем в виде:

$$\varphi(x,t) = \varepsilon h(x,t)\Phi(x/\varepsilon),$$

тогда (4.14) примет вид:

$$\int_{\Omega_T}\Big(-c^\varepsilon\,\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t}\Phi - \mathbf{v}^\varepsilon c^\varepsilon(\varepsilon\Phi\nabla h + h\nabla_y\Phi) - c^\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{v}^\varepsilon \varepsilon h(x,t)\Phi +$$

$$+\big(\chi^\varepsilon\alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\big)\nabla c^\varepsilon\cdot(\varepsilon\Phi\nabla h + h\nabla_y\Phi)\Big)\,dx\,dt = 0.$$

Переходя к двухмасштабным пределам при $\varepsilon\to 0$ и учитывая, что $c^\varepsilon \to c$ сильно в $L_2(\Omega_T)$, получаем:

$$\int_{\Omega_T}\big(-\mathbf{v}^\varepsilon c^\varepsilon(\varepsilon\Phi\nabla h + h\nabla_y\Phi)\big)\,dx\,dt \to \int_{\Omega_T}\int_Y\big(-c\,h\mathbf{V}\cdot\nabla_y\Phi(y)\big)\,dy\,dx\,dt,$$

$$\int_{\Omega_T}\big(\chi^\varepsilon\alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\big)\nabla c^\varepsilon\cdot(\varepsilon\Phi\nabla h + h\nabla_y\Phi)\,dx\,dt \to$$

$$\int_{\Omega_T}\int_Y\big(\chi D_0 + \lambda(1-\chi)\big)(\nabla c + \nabla_y C)\cdot h\nabla_y\Phi)\,dy\,dx\,dt,$$

остальные слагаемые стремятся к нулю, в итоге

$$\int_Y\big(-\mathbf{V}c + D_{(\lambda)}(y)(\nabla c + \nabla_y C)\big)\cdot\nabla_y\Phi\,dy = 0$$

для любой 1-периодической функции $\Phi$, поэтому выполнив интегрирование по частям, получаем

$$\operatorname{div}_y\big(-\mathbf{V}c + D_{(\lambda)}(y)(\nabla c + \nabla_y C)\big) = 0.$$

Равенство $\operatorname{div}_y\mathbf{V} = 0$ приводит к требуемому микроскопическому уравнению:

$$\operatorname{div}_y\big(D_{(\lambda)}(y)(\nabla c + \nabla_y C)\big) = 0, \quad y\in Y.$$

□

**Лемма 5.** *Функции $c_\lambda(x,t)$ и $C_\lambda(x,t,y)$ являются решениями макроскопического уравнения*

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \nabla c_\lambda\cdot\mathbf{v}_\lambda = div_x\big(\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\nabla c_\lambda + \langle D_{(\lambda)}\nabla_y C\rangle_Y\big) \tag{4.15}$$

*Доказательство.* Индекс $\lambda$ опускаем.

Переходя в интегральном тождестве (4.14 ) к слабым и двухмасштабным пределам при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int_{\Omega_T} -c^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt \rightharpoonup -\int_{\Omega_T} c\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt,$$

$$\int_{\Omega_T} -c^{\varepsilon}\mathbf{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt \rightharpoonup -\int_{\Omega_T} c\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt,$$

$$\int_{\Omega_T} -c^{\varepsilon}\mathrm{div}\ \mathbf{v}^{\varepsilon}\varphi\,dx\,dt \rightharpoonup -\int_{\Omega_T} c\ \mathrm{div}\mathbf{v}\,\varphi\,dx\,dt,$$

$$\int_{\Omega_T}\big(\chi^{\varepsilon}\alpha_D+\lambda(1-\chi^{\varepsilon})\big)\,\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt \to$$

$$\to \int_{\Omega_T}\int_Y D_{(\lambda)}(y)\big(\nabla c(x,t)+\nabla_y C(x,t,y)\big)\cdot\nabla\varphi\,dy\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega_T}\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\nabla c\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt+\int_{\Omega_T}\langle D_{(\lambda)}\nabla_y C\rangle_Y\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt,$$

$$\int_{\Omega_T}\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\mathrm{div}\ (\mathbf{v}c)-c\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}-\ \mathrm{div}_x\big(\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\nabla c+\langle D_{(\lambda)}\nabla_y C\rangle_Y\big)\right)\varphi\,dx\,dt=0\quad\forall\varphi,$$

а следовательно, выполняется макроскопическое уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\nabla c\cdot\mathbf{v}-\ \mathrm{div}_x\big(\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\nabla c+\langle D_{(\lambda)}\nabla_y C\rangle_Y\big)=0.$$

□

**Лемма 6.** *Функция $c_{\lambda}(x,t)$ есть решение усредненного уравнения*

$$\frac{\partial c_{\lambda}}{\partial t}+\nabla c_{\lambda}\cdot\mathbf{v}_{\lambda}=div_x\big(\mathbb{B}_{\lambda}{}^{(c)}\nabla c_{\lambda}\big), \tag{4.16}$$

*где*

$$\mathbb{B}_{\lambda}{}^{(c)}=\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\mathbb{I}+\sum_{i=1}^{3}\langle D_{(\lambda)}(\nabla C_{\lambda}^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y, \tag{4.17}$$

*а функции $C_{\lambda}^{(i)}(x,t,y)$ определяются из следующих периодических краевых задач:*

$$div_y\big(D_{(\lambda)}(\nabla C_{\lambda}^{(i)}+\mathbf{e_i})\big)=0,\quad y\in Y \tag{4.18.$i.\lambda$}$$

*с условием нормировки*

$$\int_{Y_f} C_{\lambda}^{(i)}dy=0.$$

*При этом для $\lambda=0$*

$$div_y\big(\chi(y)D_0(\nabla C_0^{(i)}+\mathbf{e_i})\big)=0,\quad \int_{Y_f} C_0^{(i)}\,dy=0,\quad y\in Y. \tag{4.18.$i.0$}$$

*Доказательство.* Представим функции $\nabla c$ и $C$ в следующем виде:

$$\nabla c(x,t)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(x,t)\mathbf{e}_i,\quad C(x,t,y)=\sum_{i=1}^{3}C_\lambda^{(i)}(y)\alpha_i(x,t),$$

тогда из леммы 4

$$\operatorname{div}_y\Big(D_{(\lambda)}(y)\big(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\mathbf{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\nabla C_\lambda^{(i)}\alpha_i\big)\Big)=0,$$

или, что то же самое

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\operatorname{div}_y\Big(D_{(\lambda)}(y)\big(\mathbf{e}_i+\nabla C_\lambda^{(i)}\big)\Big)=0.$$

Очевидно, что функция $C(x,t,y)$ есть решение (4.12), если $C_\lambda^{(i)}$ есть решение (4.18.$i.\lambda$).

Умножим (4.18.$i.\lambda$) на $C_\lambda^{(i)}$ и проинтегрируем по области $Y$:

$$\int_Y D_{(\lambda)}(y)|\nabla C_\lambda^{(i)}(y)|^2\,dy=-\int_Y D_{(\lambda)}(y)\mathbf{e}_i\cdot\nabla C_\lambda^{(i)}(y)\,dy,$$

тогда из неравенства Коши

$$|-\int_Y D_{(\lambda)}\mathbf{e}_i\cdot\nabla C_\lambda^{(i)}\,dy|\leqslant\frac{1}{2}\int_Y D_{(\lambda)}|\nabla C_\lambda^{(i)}|^2\,dy+\frac{1}{2}\int_Y D_{(\lambda)}\,dy,$$

и окончательно,

$$\int_Y D_{(\lambda)}|\nabla C_\lambda^{(i)}|^2\,dy|\leqslant\int_Y D_{(\lambda)}\,dy=D_0m+\lambda(1-m)=M_\lambda. \tag{4.19}$$

Оценка (4.19) гарантирует однозначную разрешимость (4.12).

Далее,

$$C(x,t,y)=\sum_{i=1}^{3}C_\lambda^{(i)}(y)\alpha_i(x,t)=\sum_{i=1}^{3}C_\lambda^{(i)}\mathbf{e_i}\cdot\nabla c,$$

$$D_{(\lambda)}(y)\nabla_yC=\big(D_{(\lambda)}(y)\sum_{i=1}^{3}\nabla_yC_\lambda^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\big)\nabla c,$$

$$\langle D_{(\lambda)}(y)\nabla_yC\rangle_Y=\langle D_{(\lambda)}(y)\sum_{i=1}^{3}\nabla_yC_\lambda^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y\nabla c,$$

$$\operatorname{div}_x\Big(\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\nabla c+\langle D_{(\lambda)}\nabla_yC\rangle_Y\Big)=\operatorname{div}_x\Big(\big(\langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\mathbb{I}+\langle D_{(\lambda)}\sum_{i=1}^{3}\nabla_yC_\lambda^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y\big)\nabla c\Big)=$$

$$=\operatorname{div}_x\big(\mathbb{B}_\lambda^{(c)}\nabla c\big),$$

где

$$\mathbb{B}^{(c)}_\lambda = \langle D\rangle_Y \mathbb{I} + \langle D\sum_{i=1}^3 \nabla_y C^{(i)}_\lambda \otimes \mathbf{e_i}\rangle_Y.$$

$\square$

**Лемма 7.** *Матрицы* $\mathbb{B}^{(f)}$ *и* $\mathbb{B}^{(c)}_\lambda$ *являются симметричными и положительно определенными.*

*Доказательство.* Индекс $\lambda$ опускаем. Умножим уравнение $(4.18.i.\lambda)$ на $C^{(j)}$ и проинтегрируем по области $Y$:

$$\int_Y \operatorname{div}_y\big(D(\nabla C^{(i)} + \mathbf{e_i})\big)C^{(j)}\,dy = 0,$$

$$-\int_Y \big(D\nabla C^{(i)}\cdot\nabla C^{(j)} + D\mathbf{e}_i\cdot\nabla C^{(j)}\big)\,dy = 0,$$

далее умножим на $\xi_i\eta_j$ и просуммируем по $i$ и по $j$:

$$\int_Y D\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\big(\nabla C^{(i)}\cdot\nabla C^{(j)}\xi_i\eta_j + \mathbf{e}_i\cdot\nabla C^{(j)}\xi_i\eta_j\big)\,dy = 0.$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^3 \nabla C^{(i)}\xi_i \equiv \widetilde{C}_\xi,\quad \sum_{i=1}^3 \nabla C^{(i)}\eta_i \equiv \widetilde{C}_\eta,\quad \sum_{i=1}^3 \xi_i\mathbf{e}_i \equiv \xi,\quad \sum_{i=1}^3 \eta_i\mathbf{e}_i \equiv \eta,$$

тогда в этих обозначениях

$$\int_Y \big(D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\nabla\widetilde{C}_\eta + D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\eta\big)\,dy = 0$$

или, что то же самое,

$$\int_Y \big(D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\nabla\widetilde{C}_\eta + D\nabla\widetilde{C}_\eta\cdot\xi\big)\,dy = 0. \tag{4.20}$$

$$(\mathbb{B}^{(c)}\xi)\cdot\eta = \left(\big(\langle D\rangle_Y\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3\langle D(\nabla C^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y\big)\xi\right)\cdot\eta =$$

$$= \langle D\rangle_Y(\xi\cdot\eta) + \sum_{i=1}^3\left(\langle D(\nabla C^{(i)}\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y\xi\right)\cdot\eta = \langle D\rangle_Y(\xi\cdot\eta) + \sum_{i=1}^3\langle D\nabla C^{(i)}(\mathbf{e_i}\cdot\xi)\rangle_Y\cdot\eta =$$

$$= \langle D\rangle_Y(\xi\cdot\eta) + \sum_{i=1}^3\langle D\nabla C^{(i)}\xi_i\rangle_Y\cdot\eta = \langle D\rangle_Y(\xi\cdot\eta) + \langle D\nabla\widetilde{C}_\xi\rangle_Y\cdot\eta. \tag{4.21}$$

Сложив (4.21) и (4.20), получаем

$$(\mathbb{B}^{(c)}\xi)\cdot\eta = \langle D\rangle_Y(\xi\cdot\eta) + \langle D\nabla\widetilde{C}_\xi\rangle_Y\cdot\eta + \langle D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\nabla\widetilde{C}_\eta\rangle_Y + \langle D\nabla\widetilde{C}_\eta\cdot\xi\rangle_Y =$$

$$= \langle D(\xi\cdot\eta)\rangle_Y + \langle D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\eta\rangle_Y + \langle D\nabla\widetilde{C}_\xi\cdot\nabla\widetilde{C}_\eta\rangle_Y + \langle D\nabla\widetilde{C}_\eta\cdot\xi\rangle_Y =$$
$$= \langle D(\eta+\nabla\widetilde{C}_\eta)\cdot(\xi+\nabla\widetilde{C}_\xi)\rangle_Y.$$

При $\xi=\eta$ имеем положительную определенность:

$$(\mathbb{B}^{(c)}\xi)\cdot\xi > 0.$$

Симметричность и положительная определенность матрицы $\mathbb{B}^{(f)}$ доказывается аналогично. □

## 5. Доказательство теоремы 3

Сходимость решения задачи (2.3) к решению задачи (2.4) определяется поведением матрицы $B^{(c)}_\lambda$ при $\lambda\to 0$. По построению

$$B^{(c)}_\lambda = \langle D_{(\lambda)}\rangle_Y\mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3}\langle D_{(\lambda)}(\nabla C^{(i)}_\lambda\otimes\mathbf{e_i}\rangle_Y,$$

где

$$D_{(\lambda)} = D_0\chi(y) + \lambda(1-\chi(y)).$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 0} D_{(\lambda)} = D_0\chi(y),$$

то поведение матрицы $B^{(c)}_\lambda$ при $\lambda\to 0$, в свою очередь, определяется поведением $\nabla C^{(i)}_\lambda$.

Оценка (4.19) и условие нормировки для $C^{(i)}_\lambda$ обеспечивают слабую в $W^1_2(Y_f)$ и сильную в $L_2(Y_f)$ компактность последовательности $\{C^{(i)}_\lambda\}$ при $\lambda\to 0$:

$$C^{(i)}_\lambda \rightharpoonup \tilde{C}^{(i)}.$$

Кроме того,

$$\nabla C^{(i)}_\lambda \rightharpoonup \nabla\tilde{C}^{(i)} \quad \text{при } \lambda\to 0 \text{ слабо в } L_2(Y_f).$$

Уравнение $(4.18.i.\lambda)$ эквивалентно интегральному тождеству

$$\int_Y \big(D_{(\lambda)}(\nabla C^{(i)}_\lambda + \mathbf{e_i})\big)\cdot\nabla\varphi dy = 0,$$

справедливому для произвольной гладкой периодической функции $\varphi$. Переходя в нем к пределу при $\lambda\to 0$ убеждаемся, что функция $\tilde{C}^{(i)}$ является решением задачи $(4.18.i.0)$. В силу единственности последней $\tilde{C}^{(i)} = C^{(i)}_0$. Таким образом

$$B^{(c)}_\lambda \to B^{(c)}_0 \text{ при } \lambda\to 0. \tag{5.1}$$

Из положительной определенности матрицы $B^{(c)}_0$ следует неравенство:

$$(B^{(c)}_0\cdot\xi)\cdot\xi \geq \beta_0|\xi|^2,$$

это же свойство справедливо и для матрицы $B_\lambda^{(c)}$:

$$(B_\lambda^{(c)} \cdot \xi) \cdot \xi \geq \frac{1}{2}\beta_0 |\xi|^2, \tag{5.2}$$

для достаточно малых $\lambda$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

Далее воспользуемся ранее полученными оценками $\mathbf{v}_\lambda$, $p_\lambda$, $c_\lambda$, не зависящими от параметра $\lambda$:

$$\int_{\Omega_T} \Big( |\mathbf{v}_\lambda|^2 + p_\lambda^2 + \big(\frac{\partial p_\lambda}{\partial t}\big)^2 + (\mathrm{div}\, \mathbf{v}_\lambda)^2 \Big)\, dx\, dt \leqslant M^2 F^2, \tag{5.3}$$

$$0 \leqslant c_\lambda(x,t) \leqslant c^{(0)}. \tag{5.4}$$

Равномерная по параметру $\lambda$ оценка

$$\int_{\Omega_T} |\nabla c_\lambda|^2\, dx\, dt \leqslant M^2 (F^2 + |c^{(0)}|^2), \tag{5.5}$$

следует из уравнения диффузии в (2.3), оценок (5.3), (5.4) и неравенства (5.2).

Как и выше, полученные оценки позволяют выделить слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ подпоследовательности:

$$\mathbf{v}_\lambda \rightharpoonup \mathbf{v}, \quad p_\lambda \rightharpoonup p, \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}_\lambda \rightharpoonup \mathrm{div}\mathbf{v}, \quad \nabla c_\lambda \rightharpoonup \nabla c, \tag{5.6}$$

и сильно сходящуюся в $L_2(\Omega_T)$ подпоследовательность

$$c_\lambda \to c. \tag{5.7}$$

Теорема будет доказана, если после предельного перехода в уравнениях(2.3) при $\lambda \to 0$ мы придем к системе уравнений (2.4).

Предельный переход в уравнениях для $\mathbf{v}_\lambda$ очевиден.

Для предельного перехода в уравнении диффузии в (2.3) для $c_\lambda$ запишем его в форме:

$$\int_{\Omega_T} \Big( c_\lambda \big( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla\xi \cdot \mathbf{v}_\lambda + \xi \mathrm{div}\mathbf{v}_\lambda \big) - \big(\mathbb{B}_0^{(c)} \cdot \nabla c_\lambda\big) \cdot \nabla \xi \Big)\, dx\, dt =$$

$$\int_{\Omega_T} \Big( \big(\mathbb{B}_\lambda^{(c)} - \mathbb{B}_0^{(c)}\big) \cdot \nabla c_\lambda \Big) \cdot \nabla \xi\, dx\, dt.$$

В силу (5.1) и (5.3) – (5.7) это интегральное тождество сходится при $\lambda \to 0$ к тождеству

$$\int_{\Omega_T} \Big( c\big( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla\xi \cdot \mathbf{v} + \xi \mathrm{div}\mathbf{v} \big) - \mathbb{B}_0^{(c)} \nabla c \cdot \nabla \xi \Big)\, dx\, dt = 0,$$

что эквивалентно уравнению диффузии в усредненной системе (2.3).

### Список литературы


[1] Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, 608–623.

[2] Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах. Сибирский математический журнал, май-июнь 2007, том 48, Но.3, 645 - 667.

[3] Гриценко С.А. О задаче нелинейной диффузии в слабосжимаемой вязкой жидкости. Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию отв. ред. С.Б. Климентов, Е.С. Каменецкий.— Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009, с. 31-42.

[4] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 588 с.

[5] Гриценко С.А., Зимин Р.Н. Об одной вспомогательной задаче нелинейной диффузии в слабосжимаемой вязкой жидкости. Научные ведомости БелГУ, серия Физика. Математика. Принято к публикации.