УДК 51-71:530.12, 519.6

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СКАЛЯРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Никонов В.В., Цирулев А.Н.
Кафедра математических методов современного естествознания

Поступила в редакцию 20.09.2010, после переработки 25.09.2010.

В рамках общей теории относительности изучается устойчивость статической сферически-симметричной самогравитирующей скалярной конфигурации с минимальной связью относительно радиальных (монопольных) линеаризованных возмущений соответствующего скалярного поля. Рассматривается самосогласованная задача, в которой фоновая геометрия не статична и учитываются индуцированные метрические возмущения, вызванные флуктуациями скалярного поля. Задача сводится к одному основному волновому уравнению и ассоциированному уравнению Шредингера для квазинормальных мод. Получен общий вид эффективного потенциала для произвольного потенциала самодействия скалярного поля, рассмотрена устойчивость вакуумных черных дыр относительно флуктуаций скалярного поля.

Within general relativity the stability of a static spherically symmetric minimally coupled selfgravitating scalar configuration to linear radial (monopole) perturbations of the corresponding scalar field is studying. We consider the self-consistently posed problem in which the geometric background is not static and metric perturbations, induced by the scalar field fluctuations, are taken into account. The problem is reduced to a single wave equation and the associated Schrödinger equation for the quasinormal modes. We obtain a general form of the effective potential for an arbitrary selfinteracting scalar field potential and consider the stability of vacuum black holes for scalar field fluctuations.

Ключевые слова: гравитирующее скалярное поле, устойчивость, квазинормальные моды.
Keywords: gravitating scalar field, stability, quasinormal modes.

Введение

В континуальной механике изучение линейных возмущений компактной системы (например, струны с закрепленными концами, мембраны, гравитирующей звезды) вблизи положения равновесия дает важную информацию об устойчивости и некоторых характеристических свойствах системы, вплоть до ее геометрической формы. Для системы в общем положении, находящейся вдали от точек бифуркации, малые возмущения удовлетворяют уравнению колебаний с компактной областью изменения пространственных переменных, причем решение соответствующей спектральной задачи определяет полный набор собственных функций, называемых нормальными модами. Изучение малых возмущений метрики асимптотически плоского пространства-времени и гравитирующих полей в общей теории относительности также приводит нас к спектральным задачам, собственные функции которых, однако, не образуют полной системы и поэтому называются квазинормальными модами [1, 2]. Неполнота системы собственных функций связана с некомпактностью области пространства и диссипативным характером задачи [3, 4], поскольку уходящие волны рассеиваются на пространственной бесконечности. В последние годы интерес к изучению квазинормальных мод существенно возрос, во-первых, в связи с реальной возможностью в ближайшем будущем наблюдений собственных колебаний релятивистских астрофизических объектов как в электромагнитном, так и в гравитационно-волновом диапазоне. Во-вторых, критерии устойчивости гравитирующей конфигурации относительно линеаризованных возмущений также тесно связаны с исследованием спектра квазинормальных мод. Вывод о неустойчивости или, наоборот, устойчивости вытекает из присутствия или, соответственно, отсутствия в спектре колебаний частот с отрицательной мнимой частью (при нашем выборе временной зависимости $\sim \mathrm{e}^{i\omega t}$), причем в некоторых случаях этот вывод может быть сделан только на основании свойств эффективного потенциала без явного решения спектральной задачи. Несмотря на неполноту системы квазинормальных мод, а также наличие чисто степенного закона затухания при больших значениях времени, в настоящее время общепринята и хорошо обоснована точка зрения [1, 3, 4, 5], что спектр квазинормальных мод содержит полную информацию об устойчивости сферически-симметричной конфигурации, если начальные условия для возмущений ограничены и локализованы. Современное состояние теории устойчивости черных дыр и метода квазинормальных мод, вместе с полной библиографией по проблеме скалярных возмущений, отражено в обзорах [5, 6, 7].

Целью данной работы является исследование устойчивости для сферически-симметричных самогравитирующих скалярных конфигураций. В нашей постановке задачи (Раздел 1) рассматриваются линеаризованные радиальные возмущения скалярного поля вблизи статической скалярной конфигурации, но не в фоновой геометрии пространства-времени, а в рамках самосогласованной системы уравнений Эйнштейна, в которой метрические и полевые возмущения зацеплены друг с другом. В Разделе 2 проведена редукция задачи к одному волновому уравнению и ассоциированному с ним уравнению Шредингера для квазинормальных мод, получено удобное выражение для эффективного потенциала. Отметим, что ранее [5, 8, 9, 10, 11] устойчивость и квазинормальные моды для возмущений скалярного поля рассматривались исключительно на фоне фиксированной геометрии статической скалярной конфигурации, что оправдано при условии, что интенсивность скалярного поля невелика и массивная черная дыра близка к вакуумной. Возможность преобразования эффективного потенциала в самом общем случае, т. е. при произвольном потенциале самодействия скалярного поля, является следствием ранее полученного авторами общего решения обратной задачи для сферически-симметричного самогравитирующего скалярного поля [12]. В конечном счете, именно выражение для эффективного потенциала только через полевую функцию статического решения и ее производные придает качественно иной смысл проведенной редукции задачи. В Разделе 3 на основе критерия положительной определенности эффективного потенциала изучается устойчивость черных дыр Шварцшильда–де Ситтера относительно вакуумных флуктуаций скалярного поля с произвольным потенциалом самодействия.

Для сферически-симметричных скалярных конфигураций линеаризованные возмущения инвариантным образом разделяются на полярные и аксиальные так же, как в случае вакуумных черных дыр. Наш подход к исследованию устойчивости заключается в изучении на первом этапе спектра радиальных или, другими словами, монопольных полярных возмущений, сохраняющих сферическую симметрию и нулевой момент импульса конфигурации. На втором этапе конфигурации, устойчивые относительно радиальных квазинормальных мод, могут быть исследованы на устойчивость относительно аксиальных возмущений, в которых возмущения скалярного поля не входят явно, так что они сводятся к чисто метрическим возмущениям при любом потенциале поля [8]; в последнюю очередь изучаются мультипольные полярные возмущения с нетривиальной зависимостью от угловых координат. Такой подход оправдан тем, что в известных к настоящему времени практических исследованиях устойчивости сферически-симметричных полевых конфигураций обнаружено затухание всех мод полярного типа, если радиальные моды затухают. Для полей спина ноль, в частности, скалярных полей, это наблюдение справедливо и в отношении аксиальных возмущений, однако строгое математическое доказательство данных фактов отсутствует. Для уточнения аналогий и сравнения с результатами авторов, впервые применивших метод квазинормальных мод к изучению чисто гравитационных возмущений вакуумных черных дыр, отметим, что уравнения для полярных и аксиальных возмущений называются соответственно уравнением Зерилли [13] и уравнением Редже-Уилера [14].

1. Определяющие уравнения и линеаризация возмущений

В геометрической системе единиц ($G = 1, c = 1$) действие (1) имеет вид

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi}\int \big(-S/2 \,-\, \Lambda \,+\, \langle d\phi, d\phi\rangle - 2V(\phi)\big)\sqrt{|\,g|}\, d^4x\,, \tag{1}$$

где S — скалярная кривизна, Λ – космологическая постоянная, $V(\phi)$ - потенциал самодействия, угловые скобки $\langle\ ,\rangle$ обозначают скалярное произведение относительно метрики.

Метрику сферически-симметричного пространства-времени запишем в координатах кривизны в форме

$$ds^2 = A^2dt^2 - B^2dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2}$$

где метрические функции A и B зависят только от координат r и t. Штрих и точка будут обозначать производные соответственно по r и t. В сферически-симметричном пространстве-времени в данной калибровке полная система уравнений Эйнштейна, определяемая действием (1), содержит только три неизвестных функции: метрические функции A, B и полевую функцию $\phi(t,r)$. Одно из алгебраически независимых уравнений Эйнштейна, а именно, уравнение для компоненты

{22} тензора Эйнштейна, автоматически является следствием остальных в силу тождеств Бианки и консервативности тензора энергии-импульса. Остальные четыре уравнения имеют вид

$$2\,\frac{B'}{rB^3}-\frac{1}{r^2B^2}+\frac{1}{r^2} \;=\; \frac{\dot\phi^{\,2}}{A^2}+\frac{{\phi'}^2}{B^2}+2V\,, \tag{3}$$

$$2\,\frac{A'}{rAB^2}+\frac{1}{r^2B^2}-\frac{1}{r^2} \;=\; \frac{\dot\phi^{\,2}}{A^2}+\frac{{\phi'}^2}{B^2}-2V\,, \tag{4}$$

$$\frac{\dot B}{rAB^2} \;=\; \frac{\dot\phi\,\phi'}{AB}\,, \tag{5}$$

$$\frac{\ddot\phi}{A^2}-\frac{\dot\phi\,\dot A}{A^3}-\frac{\phi''}{B^2}+\frac{\phi'B'}{B^3}+\frac{\dot\phi\,\dot B}{A^2B}-\frac{\phi'A'}{AB^2}-\frac{2\phi'}{rB^2}+\frac{dV}{d\phi} \;=\; 0\,. \tag{6}$$

Далее тождества Бианки позволяют исключить из рассмотрения или уравнение (5), или (6), в зависимости от постановки задачи. Для наших целей важен сам факт совместности системы (3) – (6), а не выбор независимой подсистемы, поскольку в конечном счете задача сводится к исследованию одного основного уравнения для возмущений. Имея это ввиду, мы рассматриваем далее все четыре уравнения на равных правах.

Флуктуации скалярного поля вблизи статического решения $A_0(r)\,,\ B_0(r)\,,\phi_0(r)$ индуцируют возмущения метрики, так что

$$A(t,r)=A_0(r)\,+\,a(t,r)\quad B(t,r)=B_0(r)\,+\,b(t,r)\quad \phi(t,r)=\phi_0(r)\,+\,\phi_1(t,r)\,.$$

Линеаризация уравнений для возмущений дает систему

$$-\frac{b'}{rB_0^3}+\left(\frac{3B_0'}{rB_0^4}-\frac{1}{r^2B_0^3}-\frac{{\phi_0'}^2}{B_0^3}\right)b+\frac{\phi_0'}{B_0^2}\,\phi_1'+\frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\,\phi_1 \;=\; 0\,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}-\,\frac{a'}{rA_0B_0^2}+\frac{A_0'}{rA_0^2B_0^2}\,a+\left(\frac{2A_0'}{rA_0B_0^3}+\frac{1}{r^2B_0^3}-\frac{{\phi_0'}^2}{B_0^3}\right)b\\ +\,\frac{\phi_0'}{B_0^2}\,\phi_1'-\frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\,\phi_1 \;=\; 0\,,\end{aligned} \tag{8}$$

$$-\frac{\dot b}{rB_0}+\phi_0'\dot\phi_1 \;=\; 0\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\ddot\phi_1}{A^2}-\frac{\phi_1''}{B^2}-\left(\frac{2}{rB_0^2}+\frac{A_0'}{A_0B_0^2}-\frac{B_0'}{B_0^3}\right)\phi_1'\\ &\quad+\frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\,\phi_1-\frac{\phi_0'}{A_0B_0^2}\,a'+\frac{\phi_0'A_0'}{A_0^2B_0^2}\,a+\frac{\phi_0'}{B_0^3}\,b'\\ &\qquad+\left(\frac{4\phi_0'}{rB_0^3}-\frac{3\phi_0'B_0'}{B_0^4}+\frac{2\phi_0''}{B_0^3}+\frac{2\phi_0'A_0'}{A_0B_0^3}\right)b \;=\; 0\,,\end{aligned} \tag{10}$$

которая имеет третий порядок по производным по времени, поскольку первые два уравнения вообще их не содержат. Такая структура уравнений практически однозначно предопределяет схему редукции системы (7) – (10): исключение метрических возмущений $a(t,r)$ и $b(t,r)$ из уравнения для $\phi_1(t,r)$.

2. Волновое уравнение для возмущений и эффективный потенциал

Задача исследования возмущений статической конфигурации в положении равновесия считается формально решенной для возмущений определенного типа, если для них получено волновое уравнение *на вещественной прямой* в стандартной форме с эффективным потенциалом, достаточно быстро убывающим на положительной и отрицательной бесконечности. Решение спектральных задач для таких уравнений основывается на хорошо развитой теории, включающей аналитические, численные и качественные методы исследования [6, 9, 10, 15, 16]. В теории устойчивости систем в общей теории относительности и классической теории поля волновое уравнение указанного типа, равно как и соответствующее уравнение Шредингера для отдельных квазинормальных мод, называется *основным уравнением (master equation)*. Отметим, что сам факт существования основного уравнения для радиальных возмущений гравитирующих скалярных конфигураций с произвольным потенциалом самодействия, в том числе возможность эффективного "расщепления" системы (7) – (10) и дальнейшего преобразования одного из уравнений к стандартной форме, не является очевидным или предопределенным заранее, а скорее указывает на высокую степень скрытой симметрии и, в некотором смысле, фундаментальный характер проблемы.

2.1 Основное уравнение

Редукция системы (7) – (10) к основному уравнению проводится в два этапа. На первом этапе мы проинтегрируем уравнение (9), получив

$$b(t,r) = rB_0\phi_0'\phi_1(t,r) + h(r)\,, \tag{11}$$

и далее докажем, что произвольная функция $h(r)$ тождественно равна нулю. Для этого исключим функцию b из уравнения (7) с помощью формулы (11). Из преобразованного уравнения

$$\begin{aligned} h' &- \left(\frac{3B_0'}{B_0} - \frac{1}{r} - r{\phi_0'}^2\right)h \\ &- \left(2rB_0'\phi_0' - 2B_0\phi_0' - rB_0\phi_0'' - r^2B_0{\phi_0'}^3 + rB_0^3\frac{dV(\phi_0)}{d\phi}\right)\phi_1 \;=\; 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

можно далее исключить и ϕ_1 следующим образом. Положив в уравнениях (3) – (6) все производные по времени равными нулю, из уравнения (6) и из суммы уравнений (3) и (4) непосредственно получим соотношения

$$\phi_0'' \;=\; \frac{\phi_0'B_0'}{B_0} - \frac{\phi_0'A_0'}{A_0} - \frac{2\phi_0'}{r} + B_0^2\frac{dV(\phi_0)}{d\phi}\,, \qquad {\phi_0'}^3 \;=\; \frac{\phi_0'B_0'}{rB_0} + \frac{\phi_0'A_0'}{rA_0}\,, \tag{13}$$

которым удовлетворяет любое статическое решение (учет членов с производными по t привел бы к появлению в (12) членов второго порядка по возмущениям). Подставив их в уравнение (12), найдем, что выражение в скобках при ϕ_1 обращается в нуль, а общее решение этого уравнения имеет вид

$$h(r) = \lambda \frac{B_0(r)^3}{r} \exp\left\{ -\int\limits_r^\infty {\phi'_0}^2 r dr \right\}. \qquad (14)$$

Только тривиальное решение с $\lambda = 0$ удовлетворяет условиям ограниченности, поскольку при $\lambda \neq 0$ решение (14) расходится и для регулярных конфигураций, при $r \to 0$, и для черных дыр на горизонте событий, когда $B_0 \to \infty$ при $r \to r_0$, где r_0 – радиус горизонта событий.

На втором этапе, во-первых, выразим a' из уравнения (13) и подставим в (10); в результате неизвестная a вообще исчезает из уравнения. Во-вторых, исключим из преобразованного уравнения b' и b с помощью соотношений (9) и (11) (с $h = 0$). Кроме того, для дальнейшего исследования удобно исключить также производную $dV(\phi_0)/d\phi$, выразив ее из первого соотношения в (13), а затем умножить уравнение на A_0^2. В результате мы получим уравнение

$$\ddot{\phi}_1 - \frac{A_0^2}{B_0^2}\phi''_1 - \frac{A_0^2}{B_0^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{A'_0}{A_0} - \frac{B'_0}{B_0}\right)\phi'_1 + A_0^2\left(\frac{6{\phi'_0}^2}{B_0^2} - \frac{3r{\phi'_0}^2 B'_0}{B_0^3}\right.$$
$$\left. + \frac{4r\phi'_0\phi''_0}{B_0^2} + \frac{r^2{\phi'_0}^4}{B_0^2} + \frac{r{\phi'_0}^2 A'_0}{A_0 B_0^2} + \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\right)\phi_1 = 0. \qquad (15)$$

Дальнейшие преобразования, приводящие уравнение (15) к обычной форме волнового уравнения, являются вполне стандартными. Переходя к новой неизвестной функции и новой независимой переменной ("черепашьей" радиальной координате) по формулам

$$\psi = r\phi_1, \qquad r^* = \int\limits_r^\infty \frac{B_0}{A_0} dr, \qquad (16)$$

мы получим основное уравнение для исследования возмущений статической гравитирующей скалярной конфигурации в форме

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial {r^*}^2} + U\psi = 0, \qquad (17)$$

где эффективный потенциал U определяется формулой

$$U = A_0^2\left(\frac{6{\phi'_0}^2}{B_0^2} - \frac{3r{\phi'_0}^2 B'_0}{B_0^3} + \frac{4r\phi'_0\phi''_0}{B_0^2} + \frac{r^2{\phi'_0}^4}{B_0^2} + \frac{r{\phi'_0}^2 A'_0}{A_0 B_0^2} + \right.$$
$$\left. \frac{A'_0}{rA_0B_0^2} - \frac{B'_0}{rB_0^3} + \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\right). \qquad (18)$$

Уравнению (17) удовлетворяют радиальные (т. е. монопольные, с $l = 0$) моды полярных возмущений, вызванных флуктуациями скалярного поля, а все индуцированные возмущения метрических функций имеют вид $p(r)\psi(t,r)$, где p не зависит от времени, поэтому по своему физическому содержанию (17) соответствует уравнению Зерилли [13] для чисто гравитационных полярных возмущений.

2.2 Преобразование эффективного потенциала

Запишем метрику сферически-симметричного пространства-времени в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,, \tag{19}$$

удобном для дальнейшего исследования основного уравнения. Координатная функция r и характеристическая функция f инвариантны относительно преобразований вида $t, r \to \tau, \rho$, не затрагивающих угловых координат, причем, очевидно, $f = -\langle dr, dr\rangle$. Поскольку 1-форма dr дуальна вектору градиента гиперповерхности $r = const$, то изотропность dr (при условиях $dr \neq 0$, $f' > 0$) на некоторой гиперповерхности $r = r_0$ указывают на то, что эта гиперповерхность является горизонтом событий (или горизонтом Коши, если при этом $f' < 0$). Условие изотропности 1-формы dr эквивалентно обращению в нуль характеристической функции f.

При согласовании с метрикой в форме (2) и формулой (16) для статического решения получим следующие соотношения:

$$A_0^2 = \mathrm{e}^{2F} f\,, \qquad B_0^2 = \frac{1}{f}\,, \qquad r^* = r + \int\limits_r^\infty \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-F}}{f}\right) dr\,. \tag{20}$$

Для преобразования и исследования эффективного потенциала в самой общей форме, т. е. без конкретизации решения и потенциала самодействия скалярного поля, мы используем метод обратной задачи. Общее решение обратной задачи для метрики в форме (19), полученное впервые в [12], можно записать в виде

$$F = -\int\limits_r^\infty \phi'^2 r dr\,, \qquad f = 2r^2 \mathrm{e}^{-2F}\left(-\frac{\Lambda}{6} + \int\limits_r^\infty \frac{Q - 3m}{r^4}\,\mathrm{e}^F dr\right)\,, \tag{21}$$

$$\widetilde{V}(r) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - f - r^2\phi'^2 f - r f'\right)\,, \tag{22}$$

где m и Λ — постоянные интегрирования, имеющие очевидный смысл шварцшильдовой массы и космологической постоянной, $\widetilde{V}(r) = V(\phi(r))$, а функция Q определяется формулой

$$Q = r + \int\limits_r^\infty \left(1 - \mathrm{e}^F\right) dr\,. \tag{23}$$

Выбирая произвольную монотонную функцию ϕ или знакопостоянную функцию ϕ', можно получать конкретные решения прямым интегрированием [17], вычисляя вначале метрические функции, затем потенциал самодействия $\widetilde{V}$ как функцию радиальной координаты, а затем – как функцию $V(\phi)$. Заметим, что формулы (21) верны для любого статического решения, без предположения о монотонности функции ϕ, а проверить эти формулы можно прямой подстановкой в статические уравнения поля, т. е. в уравнения (3) – (6) с равными нулю производными по времени.

Эффективный потенциал имеет более простой вид относительно старой радиальной координаты. Подставляя формулы (21) – (23) в эффективный потенциал (18), после длинных, но прямых вычислений, получим

$$U = \left(4r\phi_0'\phi_0'' - 2r^2{\phi_0'}^4 + 9{\phi_0'}^2 + \frac{2}{r^2}\right)\mathrm{e}^{2F}f^2 + \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2}\,\mathrm{e}^{2F}f + (3m - Q)\left(\frac{2}{r^3} + \frac{4{\phi_0'}^2}{r}\right)\mathrm{e}^{F}f\,. \quad (24)$$

Посредством исключения производной $d^2V(\phi_0)/d\phi^2$ с помощью очевидной формулы

$$\frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi^2} = \frac{1}{\phi_0'}\left(\frac{\widetilde{V}\,'}{\phi_0'}\right)' = \frac{\widetilde{V}\,''}{\phi_0'} - \frac{\phi_0'\widetilde{V}\,'}{2{\phi_0'}^2}\,,$$

а также явной формулы (22) для потенциала поля как функции координаты r, эффективный потенциал (24) может быть преобразован к форме, вообще не содержащей членов с потенциалом самодействия скалярного поля, в которой единственными варьируемыми величинами являются напряженность поля ϕ_0' и шварцшильдова масса m:

$$U = \left(\frac{6}{r^2} + \frac{6\phi_0''}{r\phi_0'} + \frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - r\phi_0'\phi_0'' - 2{\phi_0'}^2\right)\mathrm{e}^{2F}f^2 - \frac{2}{r^2}\,\mathrm{e}^{2F}f + (3m - Q)\left(\frac{6}{r^3} + \frac{4\phi_0''}{r^2\phi_0'}\right)\mathrm{e}^{F}f\,. \quad (25)$$

Приведем также выражение

$$U'(r_0) = \left\{-(3m - Q)\frac{4\mathrm{e}^F}{r^4} + (3m - Q)^2\left(\frac{8\phi_0''}{r^4\phi_0'} + \frac{12}{r^5}\right)\right\}_{r=r_0}$$

для производной эффективного потенциала на горизонте событий. Вследствие неравенства $3m - Q(r_0) > 0$, которое непосредственно следует из (21), условие $U'(r_0) > 0$ возрастания эффективного потенциала на горизонте эквивалентно условию

$$\big(3m - Q(r_0)\big)\left(\frac{2\phi_0''}{\phi_0'} + \frac{3}{r}\right) - \mathrm{e}^F > 0\,. \quad (26)$$

Если условие (26) нарушено, то эффективный потенциал не может быть всюду положительным и мы не можем использовать сформулированный ниже критерий устойчивости, основанный на положительной определенности гамильтониана. С другой стороны, эффективный потенциал может принимать отрицательные значения только вблизи горизонта, где отрицателен потенциал самодействия скалярного поля. Поэтому, если условие (26) выполнено, то проверка положительности U должна быть следующим шагом в анализе устойчивости.

2.3 Граничные условия для черных дыр

Далее всюду мы будем считать, что $\phi_0 = O(r^{-1/2-\epsilon})$ $(\epsilon > 0)$ при $r \to +\infty$. Такая асимптотика обеспечивает достаточно общую и при этом физически осмысленную постановку задач.

Вблизи горизонта событий новая радиальная координата имеет асимптотическое поведение $r^* \to -\infty$ при $r \to r_0$ (точнее, $r^* \sim \alpha \ln(r - r_0)$, $\alpha > 0$), где r_0 – радиус горизонта событий. Для черных дыр $f \to 0$ и, следовательно, $U \to 0$ (точнее, $U = O(\mathrm{e}^{r^*/\alpha})$) при $r^* \to -\infty$ (при $r \to r_0$). Кроме того, в асимптотически плоском пространстве-времени также верно условие $U \to 0$ при $r^* \to +\infty$ (при $r \to +\infty$). Таким образом, мы приходим к частному случаю стандартной задачи теории одномерного потенциального рассеяния на вещественной прямой (отметим, что для регулярных решений и голых сингулярностей r^* стремится к конечному положительному значению при $r \to 0$, причем эффективный потенциал, вообще говоря, отличен от нуля в центре конфигурации или даже сингулярен, поэтому задача приобретает качественно иной характер).

Непосредственно из уравнения (17) легко найти асимптотическое поведение решений и сформулировать в асимптотически плоском пространстве-времени стандартные граничные условия

$$\psi(t, r^*) \to \lambda_\pm \exp(i\omega(t \mp r^*)), \quad r^* \to \pm\infty, \tag{27}$$

которые учитывают физическую постановку задачи в том смысле, что запрещают появление решений с волнами возмущений, исходящих от пространственной бесконечности и горизонта событий.

Соответствующие волновому уравнению (17) и граничным условиям (27) основное уравнение (уравнение Шредингера) и граничные условия для амплитуды отдельной квазинормальной моды $\widetilde{\psi}(\omega, r^*) \exp(i\omega t)$ имеют вид

$$\frac{d^2\widetilde{\psi}}{dr^{*2}} + (\omega^2 - U)\,\widetilde{\psi} = 0, \qquad \widetilde{\psi}(\omega, r^*) \to \lambda_\pm \exp(\mp i\omega r^*), \quad r^* \to \pm\infty, \tag{28}$$

Покажем, что для черных дыр с асимптотикой пространства-времени де Ситтера с $f = 1 - 2m/r - \Lambda r^2/3$ и космологическим горизонтом радиуса $r = r_c$ (связанным с космологической постоянной соотношением $r_c^2 = 3/\Lambda$) граничные условия имеют тот же самый вид (27). Интеграл в (20) должен быть асимптотически регуляризован вблизи космологического горизонта, например так, что

$$r^* = -\int_r^p \frac{\mathrm{e}^{-F}}{f}\,dr, \quad r_0 \le r \le p \quad \text{и} \quad r^* = \int_p^r \frac{\mathrm{e}^{-F}}{f}\,dr, \quad p < r < r_c,$$

где p – произвольная промежуточная точка между горизонтом событий и космологическим горизонтом. Поскольку $f \sim \alpha(r_c^2 - r^2)$ при $r \to r_c$, то новая радиальная координата при $r \to r_c - 0$ имеет асимптотическое поведение $r^* \to +\infty$, точнее, $r^* \sim -\beta \ln(r_c - r)$, где постоянные α и β положительны. Поэтому, аналогично асимптотически плоскому пространству-времени, $U \to 0$ при $r^* \to +\infty$.

3. Устойчивость вакуумных черных дыр относительно флуктуаций скалярного поля

Можно считать, не теряя общности в рамках физически осмысленной постановки задачи, что начальные возмущения $\psi(0, r^*)$ принадлежат пространству $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ гладких функций с компактным носителем на вещественной прямой, в котором гамильтониан $-d^2/dr^{*2} + U$ симметричен. Если эффективный потенциал U положительно определен (т. е. не принимает отрицательных значений) и квадратично интегрируем на $\mathbb{R}$, то гамильтониан может быть стандартным образом продолжен до положительно определенного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$, что гарантирует выполнение условия $\omega^2 > 0$ и, следовательно, устойчивость. Существует прямое доказательство ограниченности возмущений в любой момент времени [1], без ссылок на общие теоремы и при тех же предположениях относительно начальных условий для возмущений $\psi(t, r^*)$, которое основывается на существовании интеграла энергии

$$\mathcal{E} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \right|^2 + U\psi \right) dr^* , \tag{29}$$

постоянного на решениях волнового уравнения. Эта сохраняющаяся величина может быть получена непосредственно умножением уравнения (17) на ψ и последующим интегрированием по частям. Предположение об ограниченности в начальный момент времени второго и третьего слагаемых в подынтегральном выражении приводит к ограниченности производной $\partial\psi/\partial t$ и невозможности экспоненциального роста возмущений.

В стандартной краевой задаче для уравнения Шредингера на вещественной прямой, имеющей формальную аналогию с рассматриваемой задачей, связанные состояния возможны только тогда, когда эффективный потенциал отрицателен на некотором интервале; при этом ω^2 принимает отрицательные значения. Однако отрицательность U не является достаточным условием для существования квазинормальных мод с $\operatorname{Im}\omega < 0$, поэтому исследование устойчивости в этом случае требует явного решения спектральной задачи.

В текущем разделе критерий положительной определенности эффективного потенциала будет использован для исследования устойчивости вакуумных черных дыр относительно радиальных флуктуаций скалярного поля с произвольным потенциалом самодействия. Для вакуумных конфигураций $\phi_0 = 0$, $Q = r$, так что эффективный потенциал (24) принимает вид

$$U_{(\phi=0)} = \frac{2f^2}{r^2} + \left(\frac{6m}{r^3} - \frac{2}{r^2} + \frac{d^2V(0)}{d\phi^2} \right) f . \tag{30}$$

Анализ ситуации зависит от асимптотики пространства-времени и поведения потенциала самодействия скалярного поля вблизи точки $\phi = 0$. Далее будем полагать, что потенциал является четной функцией поля, а вакуумное состояние $\phi = 0$ соответствует локальному экстремуму потенциала с нулевым значением, т. е.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + O(\phi^4) , \qquad \frac{d^2V(0)}{d\phi^2} = \mu^2 . \tag{31}$$

В квантовой теории μ имеет смысл массы скалярной частицы – кванта поля. Первое предположение физически обосновано и является стандартным, а второе не уменьшает общности, поскольку ненулевое значение $V(0)$ всегда может быть внесено в космологическую постоянную Λ, природа которой не существенна при исследовании устойчивости.

Для плоского пространства-времени ($m = 0$) или черной дыры Шварцшильда ($m > 0$) имеем

$$f \,=\, 1 - \frac{2m}{r}\,, \qquad U_{Sch} \,=\, \left(\frac{2m}{r^3} \,+\, \mu^2\right) f\,, \tag{32}$$

причем при $\mu \neq 0$ необходимы уточнения. Во-первых, в отличие от метрических, т. е. чисто гравитационных по своей природе возмущений, флуктуации скалярного поля приводят к эффективному потенциалу (32), который имеет асимптотику $U \to \mu^2$ при $r^* \to \,+\infty$ и не является квадратично интегрируемым. Во-вторых, изменение граничных условий (28) на пространственной бесконечности так, что $\widetilde{\psi}(\omega, r^*) \to \exp(-i\chi r^*)$ при $r^* \to \,+\infty\,$, $\chi = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, приводит к сдвигу спектра и изменению формы квазинормальных мод. Тем не менее, если $\psi(0, r^*) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, то и $U\psi(0, r^*) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, поэтому все рассуждения, связанные с положительной определенностью эффективного потенциала и существованием интеграла энергии (29) остаются в силе.

При $m \geq 0$ и $\mu^2 \geq 0$ эффективный потенциал U_{Sch} положительно определен, поэтому плоское пространство-время и черные дыры Шварцшильда устойчивы относительно флуктуаций скалярного поля при любой форме потенциала самодействия, совместимого со вторым условием. Если $m \geq 0$ и $\mu^2 < 0$ (тахионный сектор), то эффективный потенциал имеет потенциальную яму на бесконечности; в этом случае в спектре квазинормальных мод обязательно имеются неустойчивые моды (существуют связанные состояния, если говорить на языке квантовой механики). Как показано в [5, 6, 18] голые сингулярности ($m < 0$) имеют неустойчивые аксиальные моды чисто метрических возмущений, в линейном приближении не зацепленных со скалярным полем, поэтому исследование устойчивости относительно флуктуаций поля не представляет интереса.

В пространстве-времени Шварцшильда–де Ситтера ($\Lambda > 0$)

$$f \,=\, 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\,, \qquad U_{SdS} \,=\, \left(\frac{2m}{r^3} - \frac{2\Lambda}{3} \,+\, \mu^2\right) f.$$

Эффективный потенциал U_{SdS} положительно определен, если

$$\mu^2 \,\geq\, \frac{2\Lambda}{3} \,-\, \frac{2m}{r_c^3} \,=\, \frac{2\Lambda}{3}\left(1 - \frac{m}{r_c}\right), \quad r_c \,=\, \sqrt{3/\Lambda}\,.$$

Таким образом, принимая современную оценку $\Lambda \sim 10^{-57}$см$^{-2}$, находим, что черные дыры Шварцшильда–де Ситтера с массой $m \sim 10^{-1}$ г и более устойчивы при любой положительной массе кванта скалярного поля. При достаточно большой массе черной дыры, когда $m > r_c$, устойчивость имеет место и в диапазоне чисто мнимых масс скалярных частиц, т. е. в тахионном секторе.

В пространстве-времени Шварцшильда– анти де Ситтера ($\Lambda < 0$) эффективный потенциал квадратично растет при больших r^* и рассмотренные выше граничные условия не применимы. Если принять для потенциального барьера на бесконечности "не отражающие" граничные условия [5] $\widetilde{\psi}(\omega, r^*) = O({r^*}^{-4})$ при $r^* \to +\infty$, то мы все еще можем пользоваться критерием положительной определенности эффективного потенциала и сделать вывод, что эти черные дыры устойчивы при $\mu^2 > 2\Lambda/3$, т. е. при всех положительных μ^2 и частично в тахионном секторе.

Подчеркнем, что проведенный в данном разделе анализ имеет место для любых нелинейных скалярных полей; ранее устойчивость вакуумных черных дыр относительно скалярных флуктуаций изучалась иными методами только *на фоне* пространства-времени черной дыры [5, 10, 11, 16], когда индуцированные возмущения метрических функций считаются пренебрежимо малыми и не учитываются, и только для массивных скалярных полей, т. е. при отсутствии в разложении (31) нелинейных членов порядка выше двух.

Заключение

Основным результатом данной работы является редукция линеаризованной самосогласованной задачи устойчивости относительно возмущений скалярного поля для сферически-симметричных статических самогравитирующих скалярных конфигураций с минимальной связью к спектральной краевой задаче (28) для одного уравнения Шредингера, в которой эффективный потенциал выражен только через производные статического скалярного поля по радиальной координате с помощью формул (25) (или (24)) и (21) – (23). Этот результат в основной своей части, т. е. в преобразовании эффективного потенциала к указанной форме, основывается на общем решении обратной задачи для статических скалярных полей. Исследование ограничено только полярными монопольными возмущениями, чтобы избежать значительного усложнения изложения и добиться максимально ясной демонстрации метода; при этом достаточно просто увидеть, что вся схема редукции будет работать для мультипольных возмущений любого порядка при разделении переменных (в линеаризованных уравнениях), например, с помощью сферических функций. Основные направления развития полученных результатов связаны, во-первых, с численными решениями сформулированной краевой задачи для конкретных скалярных конфигураций, а во-вторых с исследованием обратной задачи устойчивости: найти полевую функцию и потенциал самодействия скалярного поля, которые дают устойчивую самогравитирующую конфигурацию. Второе направление более важно, поскольку до сих пор неизвестно существуют ли устойчивые скалярные черные дыры или регулярные конфигурации.

Список литературы

[1] Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр. М.: Наука, 1989.

[2] Ching E.S.C. et al. Wave propagation in gravitational systems: Completeness of quasinormal modes. Phys. Rev. D, 54, 1996, pp. 3778 – 3791 (arXiv: gr-qc 9507034).

[3] Nollert H.P., Price R.H. Quantifying excitations of quasinormal mode systems. J. Math. Phys., 40, 1999, pp. 980 – 1010 (arXiv: gr-qc 9810074).

[4] Persides S. On the radial wave equation in Schwarzschild space-time. J. Math. Phys., 14, 1973, pp. 1017 – 1021.

[5] Berti E., Cardoso V., Starinets A.O. Quasinormal modes of black holes and black branes. Class. Quantum Grav. 26, 2009, 163001 (arXiv:gr-qc 0905.2975).

[6] Kokkotas K.D., Schmidt B.G. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. Living Rev. Relativity, 2, 1999, 1 – 72 (www.livingreviews.org).

[7] Фролов В.П., Новиков И.Д. Физика чёрных дыр. М.: Наука, 1991.

[8] Dennhardt H., Lechtenfeld O. Scalar deformations of Schwarzschild holes and their stability Int. J. Mod. Phys., A13, 1998, pp. 741-764 (arXiv: gr-qc 9612062).

[9] Cardoso V., Lemos J.P.S., Yoshida S. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes in four and higher dimensions. Phys. Rev. D, 69, 2004, 044004 (arXiv: gr-qc 0309112).

[10] Zhidenko A. Quasi-normal modes of Schwarzschild-de Sitter black holes. Class. Quantum Grav., 21, 2004, pp. 273-280 (arXiv: gr-qc 0307012).

[11] Barack L. Late time dynamics of scalar perturbations outside black holes. II. Schwarzschild geometry. Phys. Rev. D, 59, 1999, 044017 (arXiv: gr-qc 9811028).

[12] Никонов, Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Асимптотически-плоские решения уравнений Эйнштейна для гравитирующего сферически-симметричного скалярного поля. Вестник ТвГУ, серия "Прикладная математика 2007, N5(33), с. 11 - 20.

[13] Zerilli F.J. Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analysed in tensor harmonics. Phys. Rev. D, 2, 1970, pp. 2141 – 2160.

[14] Regge T., Wheeler J.A. Stability of a Schwarzschild singularity. Phys. Rev., 108, 1957, pp. 1063 – 1069.

[15] Chandrasekhar S. On the equations governing the perturbations of the Schwarzschild black hole. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 343, 1975, pp. 289 – 298.

[16] Cho H.T. et al. Black hole quasinormal modes using the asymptotic iteration method. Class. Quantum Grav., 27, 2010, 155004 (arXiv: gr-qc 0912.2740).

[17] Nikonov V.V., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations. Class. Quantum Grav., 25, 2008, 138001.

[18] Gleiser R.J., Dotti G. Instability of the negative mass Schwarzschild naked singularity. Class. Quantum Grav. 23, 2006, pp. 5063-5078 (arXiv: gr-qc 0604021).