

УДК 539.3

**ОБ УЧЕТЕ НЕМЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ
ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Кукушкин А.В.

Кафедра математического анализа,
Тульский государственный университет, г. Тула

Поступила в редакцию 15.11.2010, после переработки 25.11.2010.

Предлагается способ учета немеханических воздействий на твердое тело. Приведено решение задачи о цилиндре с учетом неоднородного распределения модуля упругости.

The way to account non-mechanical influence at solids is considered. The solution of hollow cylinder problem with account of non-mechanical influence is presented.

Ключевые слова: немеханическое воздействие, твердое тело, метод конечных элементов, линейная теория упругости.

Keywords: non-mechanical influence, solid, finite element method, linear elasticity.

1. Введение

В процессе эксплуатации конструкций на них оказывают воздействие различные немеханические факторы, которые могут существенно изменить как механические свойства, так и напряженно-деформированное состояние. К таким факторам можно отнести температуру, радиацию, изменение внутренней структуры материала (образование пор и включений [1]). Учет этих факторов важен, например, для изделий из резины, для конструкций, используемых в атомной промышленности. Используя метод конечных элементов, можно учесть влияние этих факторов.

2. Математическая постановка

Будем рассматривать статическую задачу для случая малых деформаций. Тело находится в равновесии. Уравнение равновесия:

$$\nabla \sigma = 0. \quad (1)$$

Связь деформаций и напряжений:

$$\sigma = \lambda(\varepsilon \cdot \cdot I)I + 2G\varepsilon, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T \right). \quad (3)$$

Здесь $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$ - коэффициенты Лямэ, σ - тензор напряжений, ε - тензор деформаций, \bar{u} - вектор перемещений, I - единичный тензор, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Если необходимо учесть температурное расширение, то тензор деформаций получит добавку [2] и примет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T \right) + \alpha T I, \quad (4)$$

а тензор напряжений примет вид

$$\sigma = \lambda(\varepsilon \cdot \cdot I)I + 2G\varepsilon \quad (5)$$

Здесь α - коэффициент температурного расширения.

Если тело длительное время находилось под действием радиации или температуры, то происходит изменение его внутренней структуры, что сказывается на его механических свойствах. Учесть это влияние можно, считая константы материала зависящими от пространственных координат.

Тогда выражение для тензора деформаций будет иметь вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T \right) + \alpha(\bar{r}) T I, \quad (6)$$

а зависимость между напряжениями и деформациями запишется в виде

$$\sigma = \lambda(\bar{r}) (\varepsilon \cdot \cdot I)I + 2G(\bar{r}) \varepsilon \quad (7)$$

где \bar{r} - радиус-вектор точки.

3. Дискретизация

При решении задачи методом конечных элементов уравнения равновесия сводятся к системе линейных уравнений [3-6].

В общем случае для линейной задачи связь напряжений и деформаций можно представить в таком виде:

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (8)$$

Здесь $[D]$ - матрица упругости [3]. $\{\varepsilon_0\}$ и $\{\sigma_0\}$ представляют собой собственные деформации и напряжения, задавая которые можно учесть влияние температуры, радиации и других немеханических факторов. В случае неоднородного материала матрица $[D]$ будет зависеть от пространственных координат. Для трехмерной задачи если

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

то

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Матрица жесткости элемента [3]

$$[k]^e = \int [B]^T [D] [B] dV, \quad (11)$$

где

$$[B] = [B_i, B_j, B_m, B_p], \quad (12)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

N_i - функция формы в узле i . $\{\varepsilon_0\}$ и $\{\sigma_0\}$ учитываются через узловые силы, вычисляемые по формулам

$$\{F\}_{\varepsilon_0} = \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV, \quad (14)$$

$$\{F\}_{\sigma_0} = - \int [B]^T \{\sigma_0\} dV. \quad (15)$$

Таким образом, зависимость коэффициентов материала от пространственных координат нужно учесть при интегрировании (10), (13) и (14). Это можно сделать с помощью квадратурных формул Гаусса [7].

4. Задача о полом цилиндре

Рассмотрим следующую задачу. Имеется толстостенный полый цилиндр, нагруженный по внутренней и внешней поверхности давлением $P = 0.1$. Внешний

радиус цилиндра $R=6$, радиус отверстия $R/6$, высота $2R$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$. Приводится сравнение решений для однородного распределения модуля упругости $E = 2$ и случая, когда модуль упругости зависит от координат по закону $E(r) = 0.1 + 0.06r^2$.

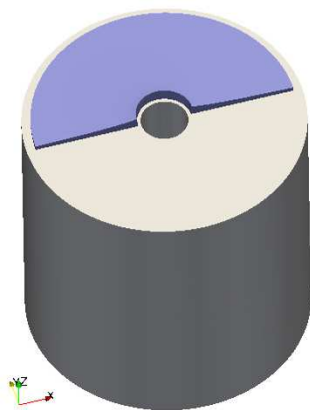


Рис. 1: Цилиндр в начальном состоянии и в деформированном (половина)

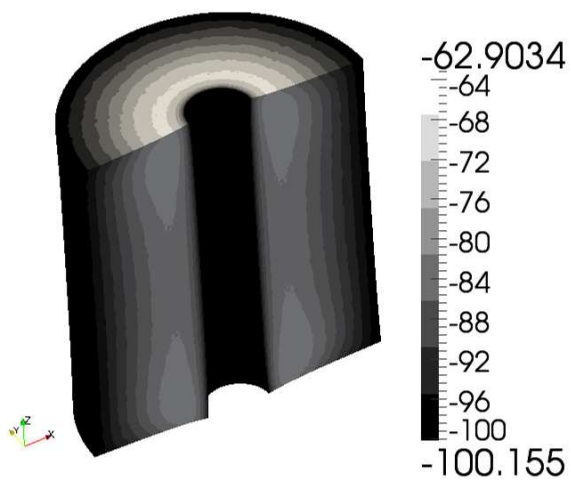


Рис. 2: Распределение радиального напряжения на поверхности цилиндра

На графиках 5-8 пунктиром обозначены напряжения в случае однородного материала, сплошной линией – в случае неоднородного материала.

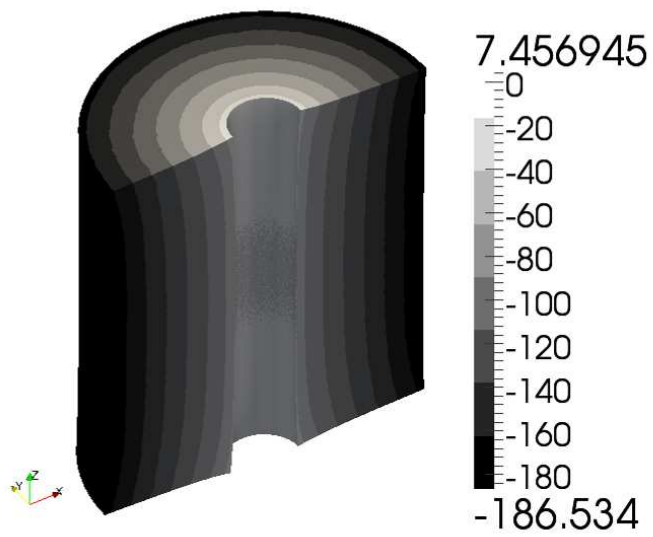


Рис. 3: Распределение кругового напряжения на поверхности цилиндра

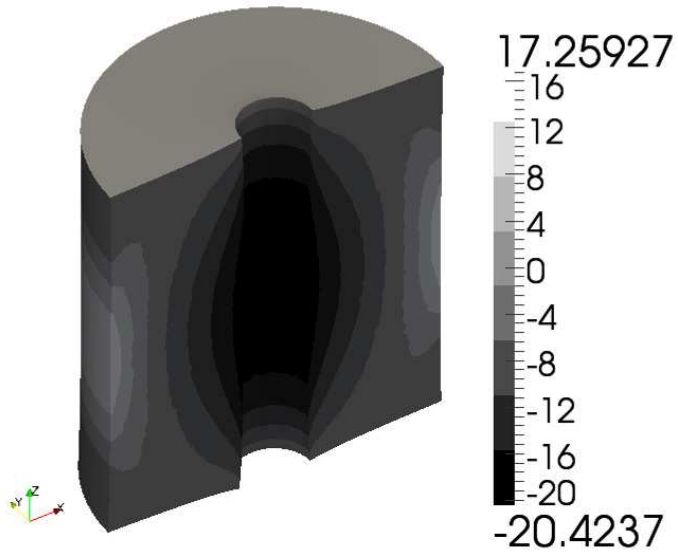


Рис. 4: Распределение напряжения вдоль оси Z на поверхности цилиндра

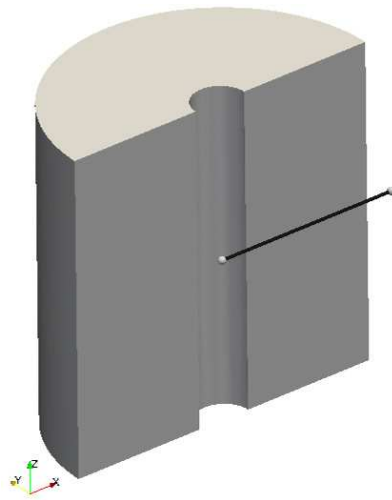


Рис. 5: Линия, вдоль которой приведены графики

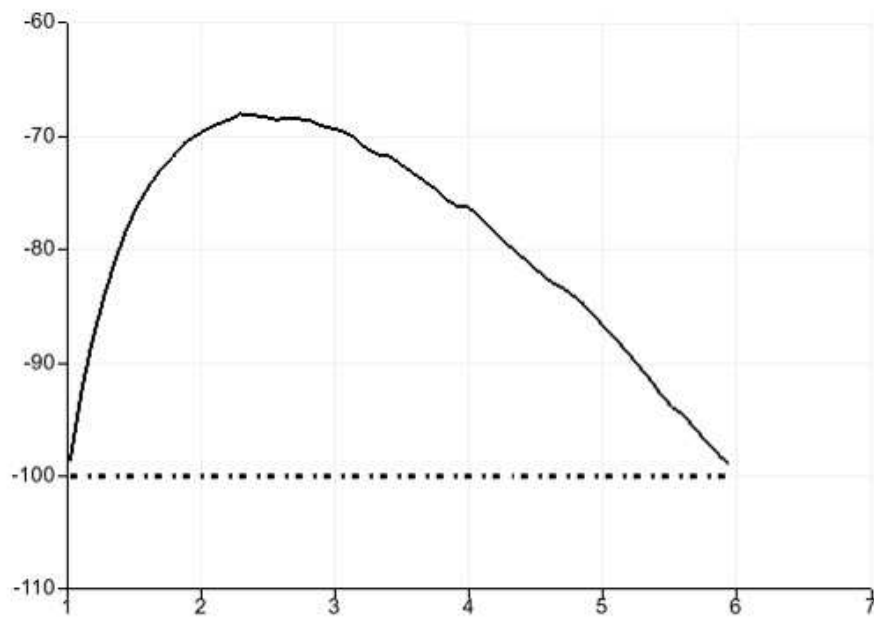


Рис. 6: Радиальное напряжение

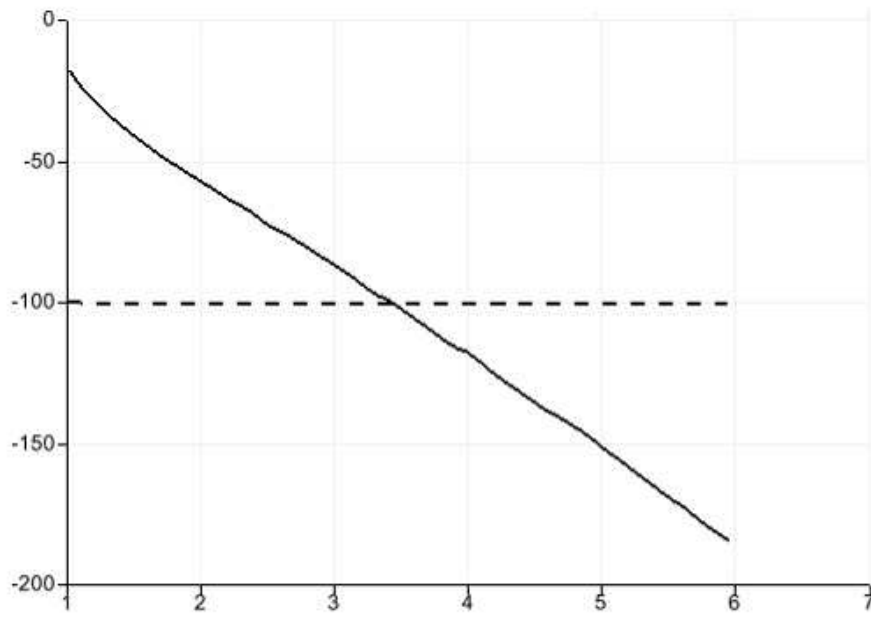


Рис. 7: Круговое напряжение

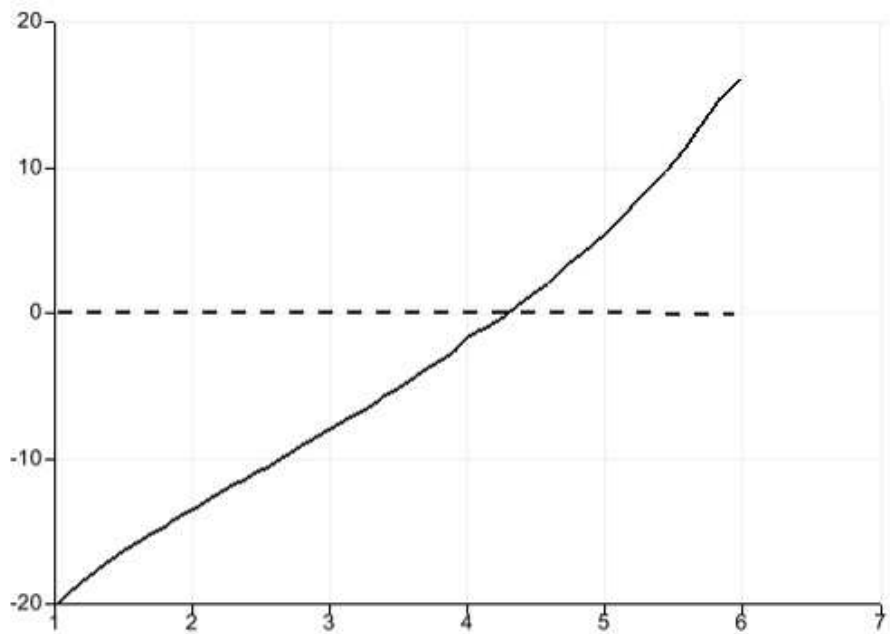


Рис. 8: Напряжение вдоль оси Z

Заключение

Рассмотренный пример показывает, что немеханические воздействия могут оказать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние. Поэтому их учет, несомненно, важен. В статье предлагается простой для понимания и реализации способ учета этих факторов при решении задач механики деформируемого твердого тела.

Разрабатываемый программный модуль и результаты расчетов могут быть использованы при разработке отраслевых кодов в различных отраслях промышленности.

Список литературы

- [1] Зингерман К.М., Левин В.А. Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 6. С. 983-1001.
- [2] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
- [3] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
- [4] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
- [5] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007 - 392 с.
- [6] Levin V.A., Vershinin A.V. Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. Issue 12. P. 2229-2239.
- [7] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. М.: Высш. Школа, 1994.