УДК 519.21

АНАЛИЗ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И ПЕРЕУПОРЯДОЧИВАНИЕМ ЗАЯВОК

Матюшенко С.И.
Кафедра теории вероятностей и математической статистики,
Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 20.11.2010, после переработки 03.12.2010.

Рассматривается многоканальная экспоненциальная система обслуживания с ограниченным накопителем и переупорядочиванием заявок на выходе в соответствии с порядком их поступления. Разработан алгоритм для расчёта стационарных распределений длин очередей в рассматриваемой системе.

The multichannel exponential system of service is examined with the limited store and resequence of requests on an output in accordance with the order of their receipt. An algorithm is developed for the calculation of the stationary distributing of lengths of turns in the examined system.

Ключевые слова: система массового обслуживания, переупорядочивание заявок, стационарное распределение.
Keywords: queueing system, resequence of requests, stationary distributing.

1. Введение

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания (СМО) с m обслуживающими приборами, $2 \leqslant m < \infty$, и общим накопителем ограниченной ёмкости. На систему поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ. Заявки имеют случайную длину, при этом предполагается, что все длины заявок независимы в совокупности и имеют общую функцию распределения $G(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, $x \geqslant 0$. Времена обслуживания на приборе j независимы между собой, а также не зависят от времени обслуживания на других приборах и от длины обслуживаемой заявки и распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_j, $j = \overline{1,m}$.

Ёмкость накопителя системы характеризуется двумя параметрами: максимальным числом r мест для ожидания, $r < \infty$, и числом v, $v > 0$, ограничивающим суммарный объём заявок в очереди. Заявка, поступающая на систему, когда в ней находится $m + r$ заявок, или же, когда суммарный объём ожидающих в очереди заявок и данной заявки превышает v теряется и в дальнейшем не влияет на функционирование системы.

Далее, без ограничения общности, примем, что $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_m$, т. е интенсивность обслуживания заявок с возрастанием номера прибора не возрастает. Примем также, что заявка, имеющая возможность выбора прибора, выбирает из всех свободных приборов тот, который имеет наименьший порядковый номер. Заявки выбираются из очереди на обслуживание в порядке их прибытия в систему, т. е. согласно дисциплине FCFS.

Предполагается, что всем заявкам в момент поступления в систему присваивается порядковый номер. При этом, если в момент окончания обслуживания заявки с номером n (заявки n) продолжается обслуживание хотя бы одной заявки с номером, меньшим n, то заявка n помещается в буфер переупорядочивания (БП). В противном случае заявка n сразу покидает систему, и вслед за ней из БП уходят все заявки с номерами, отличающимися друг от друга на единицу, начиная с номера $n+1$ (если таковые в этом буфере имеются).

Последнее предположение позволяет моделировать механизм сохранения порядка заявок на выходе из системы, в соответствии с которым заявки поступают в нее. Поясним это на примере следующей последовательности событий.

i. Первая заявка поступает в пустую систему. Ей присваивается порядковый номер 1, и она занимает прибор 1.

ii. Следующая заявка поступает в систему. Ей присваивается номер 2, и она занимает прибор 2.

iii. Заявка 2 завершает обслуживание. В силу того, что в системе находится заявка с меньшим номером, заявка 2 помещается в БП.

iv. Третья заявка поступает в систему и занимает прибор 2, ей присваивается номер 3.

v. Четвертая заявка поступает в систему и занимает прибор 3 (предполагаем, что $m \geqslant 3$) эта заявка имеет номер 4.

vi. Заявка 4 завершает обслуживание и помещается в БП.

vii. Заявка 1 завершает обслуживание и покидает систему. Вслед за ней из БП уходит заявка 2, а заявка 4, по-прежнему остаётся в БП.

viii. Заявка 3 завершает обслуживание и покидает систему. Вслед ней из БП уходит заявка 4.

Таким образом, заявки 1, 2, 3 и 4 покидают систему в том же порядке, в каком поступили в неё.

В соответствии с обозначениями Кендалла рассматриваемую СМО будем кодировать как $M/M/m/(r,v)/res$, где буквы res являются сокращением от английского *resequence* — переупорядочивание.

2. Построение математической модели

Для построения математической модели прежде всего проанализируем механизм поступления заявок в рассматриваемую систему. Для этого введём вероятность f_k, с которой заявка будет принята в систему при условии, что в момент

$t-0$ её поступления в системе имеется k заявок, $k=\overline{0,m+r}$, и покажем, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Вероятности f_k, $k=\overline{0,m+r}$, определяются соотношениями*

$$f_k=\begin{cases}1, & k=\overline{0,m-1};\\ G_{k-m+1}(v)/G_{k-m}(v), & k=\overline{m,m+r-1};\\ 0, & k=m+r;\end{cases} \tag{1}$$

где $G_0(v)=1$, $G_s(v)=1-e^{-\gamma v}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(\gamma v)^j}{j!}$, $s=\overline{1,r}$.

Доказательство. Соотношения (1) для $k=\overline{0,m-1}$ и $k=m+r$ вполне очевидны, поэтому сразу перейдём к случаям, когда $k=\overline{m,m+r-1}$. Рассмотрим некоторое фиксированное значение $k=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+r-1$ и предположим, что в момент $t-0$ поступления некоторой заявки на систему в ней уже имеется ровно k заявок. Обозначим через ξ_0 длину поступающей на систему заявки, а через ξ_n — длину n-ой по порядку заявки в очереди, $n=\overline{1,k-m}$, $k=\overline{m+1,m+r-1}$. Ясно, что поступающая заявка будет принята в систему, если сумма длин заявок в очереди и данной заявки не превосходит v, поэтому

$$f_k=\begin{cases}P\{\xi_0<v\}, & k=m,\\ P\{\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_{k-m}<v|\xi_1+\cdots+\xi_{k-m}<v\}, & k=\overline{m+1,m+r-1}.\end{cases} \tag{2}$$

Применяя в (2) для $k=\overline{m+1,m+r-1}$ формулу условной вероятности и учитывая, что все ξ_n, $n=\overline{0,k-m}$, независимы и имеют общую функцию распределения $G(x)$, приходим к следующим соотношениям:

$$f_k=\begin{cases}G(v), & k=m,\\ G_{k-m+1}(v)/G_{k-m}(v), & k=\overline{m+1,m+r-1},\end{cases}$$

где $G_s(x)$ означает s–кратную свёртку ФР $G(x)$, $s=\overline{1,r}$.

Учитывая теперь, что ФР $G(x)$ является экспоненциальной с параметром γ, $\gamma>0$, и полагая $G_0(v)=1$, получим (1) для $k=\overline{m,m+r-1}$. Таким образом, утверждение доказано. □

Рассмотрим теперь промежутки времени между поступлением заявок в незаполненный накопитель СМО, заканчивающиеся их присоединением к очереди, и назовём эти промежутки эффективными. Кроме того, положим

$$\lambda_k=\lambda f_k\,,\quad k=\overline{0,m+r}. \tag{3}$$

Известно [1], что для фиксированного k, $k=\overline{0,m+r-1}$, распределение эффективного интервала между поступлением заявок, является экспоненциальным с параметром λ_k. Следовательно, анализ рассматриваемой СМО можно свести к анализу m-канальной экспоненциальной системы с накопителем ёмкости r, $r<\infty$, и переупорядочиванием заявок, на которую поступает пуассоновский поток с интенсивностью, зависящей от числа k заявок в системе. Эту систему будем кодировать как $M(k)/M/m/r/res$.

Перейдем к описанию пространства состояний СМО $M(k)/M/m/r/res$. Для этого предположим, что в любой момент времени заявки, находящиеся в системе (в накопителе и на приборах), пронумерованы в порядке их поступления, начиная с единицы. Тогда стохастическое поведение рассматриваемой СМО можно описать однородным марковским процессом (МП) $X(t)$, $t \geqslant 0$, над пространством состояний

$$\mathcal{X}^m = \bigcup_{k=0}^{m+r} \mathcal{X}_k^m\,,$$

$$\mathcal{X}_k^m = \big\{(k, i_1, \ldots, i_m), \quad i_j = \overline{0,k}, \quad \sum_{j=1}^{m} u(i_j) = k,$$

$$\text{при этом, если } i_j i_s > 0, \text{ то } i_j \neq i_s,\ j,s = \overline{1,m}\big\}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\mathcal{X}_k^m = \big\{(k, i_1, \ldots, i_m), \quad i_j = \overline{1,m}, i_j \neq i_s,\ j,s = \overline{1,m}\big\}, \quad k = \overline{m, m+r},$$

где $u(x)$ — функция Хевисайда.

Здесь для некоторого момента времени t: $X(t) = (k, i_1, \ldots, i_m)$, если в системе находится k заявок, $k = \overline{0, m+r}$, $i_j = 0$ означает, что прибор j пуст, в противном случае i_j есть номер заявки, обслуживаемой прибором j, $j = \overline{1,m}$.

В дальнейшем подмножество $\mathcal{X}_k^m$ множества $\mathcal{X}^m$ будем называть k-ой группой состояний, $k = \overline{0, m+r}$. Нетрудно заметить, что

$$|\mathcal{X}_k^m| = \begin{cases} (m)_k, & k = \overline{0,m}, \\ m!, & k = \overline{m, m+r}, \end{cases}$$

где $(m)_k$ — число размещений из m по k. Следовательно,

$$|\mathcal{X}^m| = \sum_{k=0}^{m} (m)_k + rm!\,.$$

Очевидно, что размерность пространства $\mathcal{X}^m$ с ростом m быстро возрастает. Так уже при $m \geqslant 5$ и $k \geqslant 10$ она превосходит 10^3. Поэтому для построения матрицы интенсивностей переходов МП $X(t)$, а также вывода и решения системы уравнений равновесия (СУР) необходимо алгоритмизовать процесс построения пространства $\mathcal{X}^m$. Для этого введём ряд определений.

Пусть Y_s — множество различных последовательностей длины $s+1$ из неотрицательных целых чисел.

Определение 1. *Оператор L_j будем называть оператором j-вставки, определённым на множестве Y_s, если для $(i_0, i_1, \ldots, i_s) \in Y_s$*

$$L_j(i_0, i_1, \ldots, i_s) = (i_0 + 1, i_1, \ldots, i_{j-1}, \max\{i_1, \ldots, i_s\} + 1, i_j, \ldots, i_s), \quad j = \overline{1, s+1}.$$

Далее пусть $Y_{s,\nu}$ — некоторое подмножество множества Y_s мощности ν, $\nu < \infty$, т. е. $Y_{s,\nu} = \{y_s^1, \ldots, y_s^\nu\}$, где $y_s^n = (i_0^n, \ldots, i_s^n)$, $n = \overline{1,\nu}$.

Определение 2. *Оператор L будем называть оператором вставки, определённом на множестве различных конечных подмножеств множества Y_s, если для $Y_{s,\nu} \subset Y_s$*

$$L(Y_{s,\nu}) = \{L_1 y_s^1, \ldots, L_1 y_s^\nu, L_2 y_s^1, \ldots, L_2 y_s^\nu, \ldots, L_{s+1} y_s^1, \ldots, L_{s+1} y_s^\nu\}.$$

Определение 3. *k-ой степенью L^k оператора L будем называть оператор, действие которого состоит в k последовательных применениях оператора L, $k = 1, 2, \dots$. Под нулевой степенью оператора L будем понимать тождественный оператор.*

Определение 4. *Оператор L_j^{-1} будем называть оператором j-удаления, определённым на множестве Y_s, $s \geqslant 1$, если для $(i_0, i_1, \dots, i_s) \in Y_s$*

$$L_j^{-1}(i_0, \dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_s) = (i_0 - 1, i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_s), \quad j = \overline{1, s}.$$

Определим подмножество $\tilde{Y}_s$ множества Y_s такое, что для $(i_0, i_1, \dots, i_s) \in \tilde{Y}_s$ среди чисел $i_1, \dots, i_s$ есть хотя бы одно, не равное нулю, и все отличные от нуля числа различны.

Определение 5. *Оператор M будем называть оператором выделения максимума, определённым на множестве $\tilde{Y}_s$, если для $(i_0, i_1, \dots, i_s) \in \tilde{Y}_s$ $M(i_0, i_1, \dots, i_s) = l$, где l такое, что $i_l = \max\{i_1, \dots, i_s\}$.*

И, наконец, пусть $\hat{Y}_s$ подмножество множества Y_s такое, что $(i_0, i_1, \dots, i_s) \in \hat{Y}_s$, если среди чисел $i_1, \dots, i_s$ есть хотя бы одно, равное нулю.

Определение 6. *Оператор Z будем называть оператором выделения нуля, определённым на множестве $\hat{Y}_s$, если для $(i_0, i_1, \dots, i_s) \in \hat{Y}_s$, $Z(i_0, i_1, \dots, i_s) = n$, где n — номер первого нулевого элемента в последовательности $i_1, \dots, i_s$.*

Обратимся теперь к построению пространства состояний и докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого фиксированного m, $m \geqslant 2$,*

$$\mathcal{X}_k^m = \begin{cases} L^k(0, 0^{m-k}), & k = \overline{0, m-1}, \\ L^{m-1}(k - m + 1, 1), & k = \overline{m, m+r}, \text{ где } 0^s = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{s \text{ раз}}. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство проведём с помощью метода математической индукции. Пусть $m = 2$, тогда

$$\mathcal{X}_k^2 = \begin{cases} (0,0,0), & k = 0; \\ L^1(0,0), & k = 1; \\ L^1(k-1, 1), & k = \overline{2, r+2}. \end{cases}$$

Следовательно, $\mathcal{X}^2 = \{(0,0,0); (1,1,0); (1,0,1); (k,1,2), (k,2,1), k = \overline{2, r+2}\}$. Полученное множество является пространством состояний для процесса $X(t)$ при $m = 2$ [2]. Пусть (4) справедливо для $m = l$. Тогда для $m = l + 1$ получаем

$$\mathcal{X}_k^{l+1} = \begin{cases} L^k(0, 0^{l+1-k}), & k = \overline{0, l}; \\ L^l(k - l, 1), & k = \overline{l+1, l+r+1} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (0, 0^{l+1}), & k = 0; \\ L(L^{k-1}(0, 0^{l+1-k})), & k = \overline{1, l}; \\ L(L^{l-1}(k - l, 1)), & k = \overline{l+1, l+r+1}. \end{cases}$$

Произведём замену $k \to k+1$. Тогда

$$\mathcal{X}_{k+1}^{l+1} = \begin{cases} (0, 0^{l+1}), & k=-1; \\ L(L^k(0, 0^{l-k})), & k=\overline{0, l-1}; \\ L(L^{l-1}(k-l+1, 1)), & k=\overline{l, l+r} \end{cases} = \begin{cases} (0, 0^{l+1}), & k=-1; \\ L(\mathcal{X}_k^l), & k=\overline{0, l-1}; \\ L(\mathcal{X}_k^l), & k=\overline{l, l+r}. \end{cases}$$

Далее заметим, что если $(k, i_1, \ldots, i_l) \in \mathcal{X}_k^l$, то

$$\max\{i_1, \ldots, i_l\} = \begin{cases} k, & k=\overline{0, l-1}; \\ l, & k=\overline{l, l+r}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathcal{X}_{k+1}^{l+1} = \begin{cases} (0, 0^{l+1}), & k=-1; \\ \{(k+1, k+1, i_1^1, \ldots, i_l^1);\ (k+1, k+1, \ldots, i_l^2); \ldots; & \\ (k+1, i_1^{\nu}, \ldots, k+1)\}, & k=\overline{0, l-1}; \\ \{(k+1, l+1, i_1^1, \ldots, i_l^1);\ (k+1, l+1, \ldots, i_l^2); \ldots; & \\ (k+1, i_1^{\nu}, \ldots, l+1)\}, & k=\overline{l, l+r}, \text{ где } \nu = |\mathcal{X}_k^l|. \end{cases}$$

Учитывая определение группы состояний $\mathcal{X}_k^l$, можно записать последние соотношения в следующем виде:

$$\mathcal{X}_{k+1}^{l+1} = \begin{cases} \{(k+1, i_1, \ldots, i_{l+1}): & \\ \ i_j = \overline{0, k+1},\ \sum_{j=1}^{l+1} u(i_j) = k+1, \text{ при этом}, & \\ \ \text{если } i_j i_s > 0, \text{ то } i_j \neq i_s,\ j, s = \overline{1, l+1}\}, & k = \overline{-1, l-1}; \\ \{(k+1, i_1, \ldots, i_{l+1}): & \\ \ i_j = \overline{1, l+1}, i_j \neq i_s,\ j, s = \overline{1, l+1}\}, & k = \overline{l, l+r}. \end{cases}$$

И, наконец, произведя обратную замену $k \to k-1$, приходим к определению k-ой группы состояний для случая $m = l+1$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Из леммы 1 очевидным образом вытекает, что предложенный способ построения $\mathcal{X}^m$ является рекурсивным по m. Кроме того, в пространстве состояний задаётся определённый порядок элементов этого пространства. Для наглядности рассмотрим диаграмму построения пространства состояний в случае, когда $m = 4$ и $r = 1$ (рис. 1).

Анализ диаграммы помогает заметить, что для любого фиксированного m, $m \geqslant 2$, k-ая группа состояний $\mathcal{X}_k^m$, $k = \overline{1, m+r}$, разбивается на m подгрупп одинаковой размерности. Признаком принадлежности состояния к n-ой подгруппе k-ой группы является то, что заявка с наибольшим номером обслуживается на приборе n, $n = \overline{1, m}$. (На диаграмме для $m = 4$ подгруппы отделены пунктирными линиями). Обозначим через $\mathcal{X}_{k,n}^m$ n-ую подгруппу k-ой группы $\mathcal{X}_k^m$. Нетрудно подсчитать, что

$$|\mathcal{X}_{k,n}^m| = (m-1)_{\min\{k, m-1\}-1}, \quad n = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m+r}. \tag{5}$$

Рекурсивный принцип построения пространства $\mathcal{X}^m$ и разбиение групп состояний на отдельные подгруппы дает возможность определить порядковый номер состояния в $\mathcal{X}^m$.

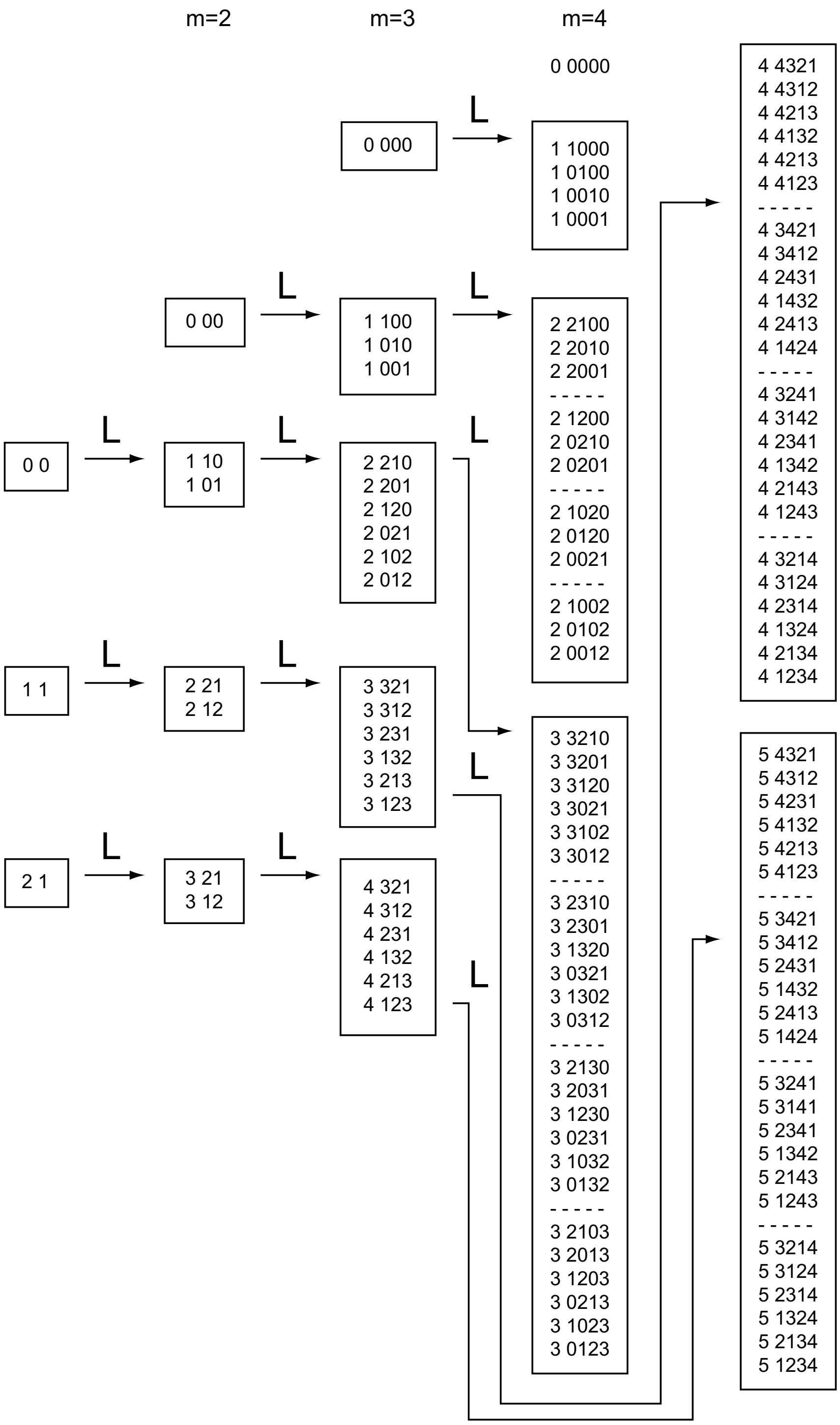

Рис. 1: Диаграмма процесса построения пространства состояний для СМО $M(k)/M/4/1/res$

Лемма 2. *Порядковый номер n состояния $(k, i_1, \dots, i_m)$ в пространстве состояний $\mathcal{X}^m$ определяется выражением*

$$n = \sum_{j=0}^{\min\{k-1,m-1\}} (m)_j + u(k-m)m! + \sum_{j=1}^{\min\{k,m-1\}} (s_j - 1)(m-j)_{\min\{k,m\}-j} + 1, \quad (6)$$

где $s_1 = M(k, i_1, \dots, i_m)$, $s_j = M\big(L^{-1}_{s_{j-1}} \dots L^{-1}_{s_2} L^{-1}_{s_1}(k, i_1, \dots, i_m)\big)$, $j = \overline{2, \min\{m-1, k\}}$.

Доказательство. Очевидно, что первые два слагаемых в (6) определяют суммарное количество состояний в группах $\mathcal{X}^m_0$, $\mathcal{X}^m_1$, ..., $\mathcal{X}^m_{k-1}$. Следовательно, остаётся показать, что $\sum_{j=1}^{\min\{k,m-1\}} (s_j - 1)(m-j)_{\min\{k,m\}-j}$ определяет количество состояний k-ой группы, предшествующих данному состоянию. Для этого необходимо выяснить смысл каждого слагаемого этой суммы.

Заметим, что $s_1 = M(k, i_1, \dots, i_m)$ является номером подгруппы в группе x^m_k, которой принадлежит состояние $(k, i_1, \dots, i_m)$, а размер каждой из подгрупп, согласно (5), равен $(m-1)_{\min\{k,m\}-1}$. Следовательно, выражение $(s_1 - 1)(m-1)_{\min\{k,m\}-1}$ определяет суммарное количество состояний в подгруппах $\mathcal{X}^m_{k,1}, \dots, \mathcal{X}^m_{k,s_1-1}$, предшествующих подгруппе $\mathcal{X}^m_{k,s_1}$. При этом, если $k = 1$ либо $m = 2$, то каждая из подгрупп содержит по одному элементу, и, следовательно, процесс вычислений завершится. В противном случае необходимо определить номер состояния в подгруппе $\mathcal{X}^m_{k,s_1}$.

Заметим, что в процессе рекуррентного построения пространства состояний подгруппа $\mathcal{X}^m_{k,s_1}$ получена как результат действия оператора L_{s_1} на группу $\mathcal{X}^{m-1}_{k-1}$. Следовательно, порядковый номер состояния $(k, i_1, \dots, i_m)$ в подгруппе $\mathcal{X}^m_{k,s_1}$ равен порядковому номеру состояния $L^{-1}_{s_1}(k, i_1, \dots, i_m)$ в группе $\mathcal{X}^{m-1}_{k-1}$. Для его определения найдём $s_2 = M\big(L^{-1}_{s_1}(k, i_1, \dots, i_m)\big)$ — номер подгруппы в группе $\mathcal{X}^{m-1}_{k-1}$, которой принадлежит состояние $L^{-1}_{s_1}(k, i_1, \dots, i_m)$. Размер каждой из этих подгрупп равен $(m-2)_{\min\{k,m\}-2}$. Следовательно, выражение $(s_2 - 1)(m-2)_{\min\{k,m\}-2}$ определит суммарное количество состояний в подгруппах $\mathcal{X}^{m-1}_{k-1,1}, \dots, \mathcal{X}^{m-1}_{k-1,s_2-1}$, предшествующих подгруппе $\mathcal{X}^{m-1}_{k-1,s_2}$. При этом, если $k = 2$ либо $m = 3$, то каждая из подгрупп содержит по одному элементу и, следовательно, процесс вычисления завершится. В противном случае надо продолжить аналогичные рассуждения, которые в конечном итоге приведут нас к искомому результату. Таким образом, лемма доказана. □

В дальнейшем нам потребуется не только формула для вычисления порядкового номера состояния, но и алгоритм обратного действия — восстановления состояния по его порядковому номеру. Эта задача разделяется на два этапа. Сначала необходимо установить номер группы, которой принадлежит данное состояние, а затем вычислить порядковый номер состояния в этой группе.

Первый этап достаточно прост. Пусть n — порядковый номер состояния, а $N = |\mathcal{X}^m|$, тогда необходимо устроить разбиение отрезка $[0; N]$ на $m + r + 1$ интервал $(n_k, n_{k+1}]$, $k = \overline{0, m+r}$, таким образом, чтобы условие $n \in (n_k, n_{k+1}]$ означало, что состояние с номером n принадлежит k-ой группе.

Очевидно, что в качестве границ указанных интервалов необходимо взять числа

$$n_s = \begin{cases} 0, & s = 0; \\ n_{s-1} + (m)_{s-1}, & s = \overline{1, m}; \\ n_{s+1} + m!, & s = \overline{m+1, m+r+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Далее, производя рассуждения, аналогичные тем, что имели место при доказательстве леммы 2, нетрудно получить следующий результат.

Лемма 3. *Пусть n — порядковый номер состояния, а k — номер группы, которой принадлежит данное состояние и пусть определена последовательность чисел $s_1, \ldots, s_{\min\{k,m-1\}}$ следующими рекуррентными соотношениями:*

$$\begin{gathered} l_j = \begin{cases} n - n_k, & j = 1; \\ l_{j-1} - (s_{j-1} - 1)t_{j-1}, & j = \overline{2, \min\{m-1, k\}}; \end{cases} \\ t_j = (m-j)_{\min\{k,m\}-j}, \quad s_j = \left\lceil \frac{l_j}{t_j} \right\rceil, \quad j = \overline{1, \min\{m-1, k\}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тогда состояние системы определяется выражением

$$(k, i_1, \ldots, i_m) = \begin{cases} L_{s_1} \ldots L_{s_k}(0, 0^{m-k}), & k = \overline{0, m-1}; \\ L_{s_1} \ldots L_{s_{m-1}}(k - m + 1, 1), & k = \overline{m, m+r}; \end{cases} \tag{9}$$

Приведём пример восстановления состояния по его порядковому номеру.

Пусть $m = 4$, $r = 2$, $n = 61$. Тогда $N = \sum_{j=0}^{6}(4)_j = 1+4+12+24+24+24 = 89$, и отрезок [0;89] разбивается на следующие интервалы:

$$\begin{aligned} &(n_0, n_1] \equiv (0, 1]; \quad &&(n_1, n_2] \equiv (1, 5]; \quad &&(n_2, n_3] \equiv (5, 17]; \\ &(n_3, n_4] \equiv (17, 41]; \quad &&(n_4, n_5] \equiv (41, 65]; \quad &&(n_5, n_6] \equiv (65, 89]. \end{aligned}$$

Число 61 принадлежит интервалу $(n_4, n_5]$, следовательно, номер группы $k = 4$. Далее вычисляется последовательность чисел

$$\begin{aligned} &l_1 = 61 - 41 = 20, &&t_1 = (4-1)_{4-1} = 6, &&s_1 = \lceil 20/6 \rceil = 4; \\ &l_2 = 20 - (4-1)*6 = 2, &&t_2 = (4-2)_{4-2} = 2, &&s_2 = \lceil 2/2 \rceil = 1; \\ &l_3 = 2 - (1-1)*2 = 2, &&t_3 = (4-3)_{4-3} = 1, &&s_3 = \lceil 2/1 \rceil = 2. \end{aligned}$$

И, наконец, искомое состояние определяется выражением

$$(4, i_1, i_2, i_3, i_4) = L_4 L_1 L_2(1, 1) = L_4 L_1(2, 1, 2) = L_4(3, 3, 1, 2) = (4, 3, 1, 2, 4).$$

Используя лемму 2, произведём проверку полученного результата:

$$\begin{aligned} s_1 &= M(4, 3, 1, 2, 4) = 4; \\ s_2 &= M\big(L_4^{-1}(4, 3, 1, 2, 4)\big) = M(3, 3, 1, 2) = 1; \\ s_3 &= M\big(L_1^{-1}(3, 3, 1, 2)\big) = M(2, 1, 2) = 2; \\ n &= \sum_{j=0}^{3}(4)_j + \sum_{j=1}^{3}(s_j - 1)(4-j)_{4-j} + 1 = 41 + 20 = 61. \end{aligned}$$

3. Построение матрицы интенсивностей переходов

В этом разделе мы опишем алгоритм построения матрицы интенсивностей переходов МП $X(t)$.

Прежде всего заметим, что алгоритм построения пространства состояний таков, что состояния каждой из групп $\mathcal{X}_k^m$ следуют друг за другом, а сами группы упорядочены по возрастанию k, $k = \overline{0, m+r}$. При этом, переходы МП $X(t)$ возможны лишь между состояниями соседних групп: переход из группы $\mathcal{X}_{k-1}^m$ в группу $\mathcal{X}_k^m$ происходит за счёт поступления заявки, а переход из группы $\mathcal{X}_{k+1}^m$ в группу $\mathcal{X}_k^m$ за счёт обслуживания заявки на одном из приборов, $k = \overline{1, m+r}$. Следовательно, матрица A интенсивностей переходов МП $X(t)$ будет иметь трёхдиагональный вид.

Введём обозначения для ненулевых блоков матрицы A. Наддиагональные блоки обозначим через $\Lambda_{k-1,k}$, поддиагональные — через $M_{k,k-1}$, $k = \overline{1, m+r}$, а диагональные — через N_{kk}, $k = \overline{0, m+r}$ (см. табл. 1).

Нетрудно заметить, что в каждом столбце блока $\Lambda_{k-1,k}$, $k = \overline{1, m+r}$, может быть всего один ненулевой элемент, равный λ_{k-1}. В каждой строке блока $M_{k,k-1}$, $k = \overline{1, m+r}$, соответствующей состоянию $(k, i_1, \ldots, i_m)$ будет не более m элементов μ_j для j таких, что $i_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$. Наконец, блоки N_{kk} являются диагональными матрицами, при этом, диагональный элемент, соответствующий состоянию $(k, i_1, \ldots, i_m)$ равен $\sum_{j=1}^m u(i_j)\mu_j - u(m+r-k)\lambda_k$.

Таким образом, для построения матрицы A необходимо: а) построить алгоритм, определяющий для любого состояния системы условия перехода и состояние системы, из которого можно попасть в данное за счёт поступления заявки (обозначим этот алгоритм E_0); б) уметь для любого состояния определять условия перехода и состояние, в которое можно перейти из данного за счёт обслуживания на приборе j (обозначим соответствующий алгоритм через E_j), $j = \overline{1, m}$. Следовательно, реализация алгоритмов E_j, $j = \overline{0, m}$, позволит для любого состояния $(k, i_1, \ldots, i_m)$ определить ненулевые элементы соответствующего столбца матрицы $\Lambda_{k-1,k}$ и соответствующей строки матрицы $M_{k,k-1}$, $k = \overline{1, m+r}$.

Таблица 1: Матрица интенсивностей переходов МП $X(t)$

A	$\mathcal{X}_0^m$	$\mathcal{X}_1^m$	$\ldots$	$\mathcal{X}_{k-1}^m$	$\mathcal{X}_k^m$	$\mathcal{X}_{k+1}^m$	$\ldots$	$\mathcal{X}_{m+r}^m$
$\mathcal{X}_0^m$	N_{00}	Λ_{01}						
$\mathcal{X}_1^m$	M_{10}	N_{11}						
$\mathcal{X}_2^m$		M_{21}						
$\vdots$								
$\mathcal{X}_{k-1}^m$				$N_{k-1,k-1}$	$\Lambda_{k-1,k}$			
$\mathcal{X}_k^m$				$M_{k,k-1}$	$N_{k,k}$	$\Lambda_{k,k+1}$		
$\mathcal{X}_{k+1}^m$					$M_{k+1,k}$	$N_{k+1,k+1}$		
$\vdots$								
$\mathcal{X}_{m+r-1}^m$								$\Lambda_{m+r-1,m+r}$
$\mathcal{X}_{m+r}^m$								$N_{m+r,m+r}$

Прежде чем перейти к пошаговому описанию алгоритма E_0, дадим пояснение одному из условий, проверка которого будет производиться в алгоритме. Речь идет о том, в каких случаях невозможен переход в состояние $(k, i_1, \ldots, i_m)$ из любого другого состояния за счёт прихода заявки в систему за исключением тривиального случая $k = 0$.

В описании системы было сказано, что заявка, имеющая возможность выбора прибра, выбирает прибор с наименьшим порядковым номером. Следовательно, за счёт поступления заявки невозможно попасть в такое состояние, для которого номер прибора, занятого обслуживанием заявки с максимальным порядковым номером больше, чем номер первого из свободных приборов. Формально для любого состояния $(k, i_1, \ldots, i_m)$ это условие можно записать следующим образом:

$$M(k, i_1, \ldots, i_m) > Z(k, i_1, \ldots, i_m),$$

где M и Z — соответственно оператор выделения максимума и оператор выделения нуля. Причем, выполнение этого условия следует проверять в тех случаях, когда $k < m$. Иначе, проверка тривиальна.

Смысл остальных шагов алгоритма очевиден, поэтому их пояснение опускаем.

Итак, алгоритм E_0 можно записать в следующем виде.

Начало алгоритма. Ввести состояние $(k, i_1, \ldots, i_m)$.

Шаг 1. Проверить условие $k > m$. Если условие выполнено, то переход к шагу 5.

Шаг 2. Проверить условие $k = m$. Если условие выполнено, то переход к шагу 4.

Шаг 3. Проверить условие $M(k, i_1, \ldots, i_m) > Z(k, i_1, \ldots, i_m)$. Если условие выполнено, то конец алгоритма.

Шаг 4. $l := Z(k, i_1, \ldots, i_m), i_l := 0$.

Шаг 5. $k := k - 1$.

Шаг 6. Вывести значения k, i_1, $\ldots$, i_m.

Конец алгоритма.

Теперь перейдем к алгоритмам E_j, $j = \overline{1, m}$. Прежде чем переходить к пошаговому описанию алгоритмов заметим, что из любого состояния $(k, i_1, \ldots, i_m)$ можно перейти в другое за счёт обслуживания на приборе j, если прибор j занят обслуживанием, т. е. если выполнено условие $i_j \neq 0$. После завершения обслуживания заявки на приборе j количество заявок в системе уменьшается на единицу. Кроме этого, на единицу уменьшаются порядковые номера тех заявок, которые поступили в систему позже, чем обслуженная заявка. Далее, если в момент окончания обслуживания заявки на приборе j в очереди имелись заявки, ожидающие обслуживания, то первая из них поступит на прибор j, и ей будет присвоен порядковый номер m. В противном случае, прибор j станет свободным.

Таким образом, алгоритмы E_j, $j = \overline{1, m}$, можно записать в следующем виде.

Начало алгоритма. Ввести состояние $(k, i_1, \ldots, i_m)$.

Шаг 1. Проверить условие $i_j = 0$. Если условие выполнено, то конец алгоритма.

Шаг 2. $k := k - 1$, $l := 0$.

Шаг 3. $l := l + 1$.

Шаг 4. Проверить условие $(i_l > 0) \vee (i_l < i_j)$. Если условие выполнено, то переход к шагу 6.

Шаг 5. $i_l := i_l - 1$.

Шаг 6. Проверить условие $l \neq m$. Если условие выполнено, то переход к шагу 3.

Шаг 7. $i_j := 0$.

Шаг 8. Проверить условие $k < m$. Если условие выполнено, то переход к шагу 10.

Шаг 9. $i_j := m$.

Шаг 10. Вывести значения k, i_1, …, i_m.

Конец алгоритма.

Теперь остаётся заметить, что для построения матрицы A необходимо для всех порядковых номеров состояний системы n, $n = \overline{1, N}$, выполнить следующие действия.

i. С помощью формул (7)–(9) по порядковому номеру n восстановить соответствующее состояние системы $(k, i_1, \ldots, i_m)$.

ii. С помощью алгоритма E_0 (алгоритмов E_j, $j = \overline{1, m}$) определить условия перехода, а в случае их выполнения — соответствующее состояние $(k^j, i_1^j, \ldots, i_m^j)$, $j \in J_{(k,i_1,\ldots,i_m)}$, из которого (в которое) можно попасть в данное (из данного). Здесь через $J_{(k,i_1,\ldots,i_m)}$ обозначено множество номеров алгоритмов E_j, $j = \overline{0, m}$, в которых проверка условий соответствующего перехода для состояния $(k, i_1, \ldots, i_m)$ дала положительный результат.

iii. С помощью формул (6) определить порядковые номера n_j состояний $(k^j, i_1^j, \ldots, i_m^j)$, $j \in J_{(k,i_1,\ldots,i_m)}$ и выполнить следующие операции присваивания: $a_{n_0,n} := \lambda_{k-1}$, если $0 \in J_{(k,i_1,\ldots,i_m)}$; $a_{n,n_j} := \mu_j$,если $j \in J_{(k,i_1,\ldots,i_m)}$; $a_{nn} := -\sum_{j=1}^{m} u(i_j)\mu_j - u(m+r-k)\lambda_k$.

4. Стационарное распределение вероятностей состояний системы

В данном параграфе будет разработан алгоритм расчёта стационарных вероятностей МП $X(t)$.

Обозначим через x_n состояние МП $X(t)$, порядковый номер которого в пространстве $\mathcal{X}^m$ равен n, $n = \overline{1, N}$. Так как все состояния процесса $X(t)$ сообщаются и $N < \infty$, то существует

$$\lim_{t \to \infty} P\{X(t) = x_n\} = p_n, \quad n = \overline{1, N},$$

при этом вероятности $p_n > 0$, $n = \overline{1, N}$, и совпадают со стационарными вероятностями.

Стационарное распределение вероятностей $\{p_n,\ n = \overline{1, N}\}$ является единственными решением системы уравнений равновесия (СУР)

$$\begin{aligned} &\vec{p}^{\,T} A = \vec{0}^{\,T}, \\ &\vec{p}^{\,T} \vec{1} = 1, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\vec{p}^{\,T} = (p_1, \ldots, p_N)$, а $\vec{1}$ — вектор из единиц.

Для решения СУР (10) будем использовать принцип последовательного вложения марковских цепей [3]. С этой целью рассмотрим моменты t_s, $s \geqslant 0$, скачков МП $X(t)$ и построим цепь Маркова (ЦМ) $\{\mathcal{X}_s^N,\ s \geqslant 0\}$, вложенную в $X(t)$ по моментам t_s.

Обозначим через $\mathcal{X}_N$ множество состояний ЦМ $\{\mathcal{X}_s^N,\ s \geqslant 0\}$, а через $Q_n = \{q_{ij}^N\}_{i,j=\overline{1,N}}$ — матрицу переходных вероятностей этой цепи. Очевидно, что X_N совпадает с $\mathcal{X}^m$, а элементы матрицы Q_N определяются из следующих соотношений [1]:

$$q_{ij}^N = \begin{cases} -a_{ij}/a_{ii}, & i \neq j; \\ 0, & i = j, \quad i,\ j = \overline{1,N}. \end{cases} \tag{11}$$

Далее, построим последовательность цепей Маркова $\{\mathcal{X}_s^{N-1},\ s \geqslant 0\}, \ldots, \{\mathcal{X}_s^1,\ s \geqslant 0\}$, вложенных в цепь $\{\mathcal{X}_s^N,\ s \geqslant 0\}$ путём поочередного исключения элементов множества $\mathcal{X}_N$, начиная с последнего по порядку элемента. Множество состояний ЦМ $\{\mathcal{X}_s^n,\ s \geqslant\}$ обозначим через $\mathcal{X}_n$, а матрицу переходных вероятностей этой цепи обозначим через $Q_n = \{q_{ij}^n\}_{i,j=\overline{1,n}}$, $n = \overline{1, N-1}$.

В соответствии с рассматриваемым здесь способом вложения цепей множества состояний $\mathcal{X}_{N-1}, \ldots, \mathcal{X}_1$ определяются по следующему правилу:

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_{n+1} \backslash \{x_{n+1}\}, \quad n = N-1, N-2, \ldots, 1, \tag{12}$$

а элементы матриц $Q_{N-1}, \ldots, Q_1$ можно определить, опираясь на результаты [3, гл. 2], непосредственно из которых вытекает

Теорема 1. *Для любого фиксированного* $n = 1, 2, \ldots, N-1$*, элементы матрицы* Q_n *определяются через элементы матрицы* Q_{n+1} *соотношениями*

$$q_{ij}^n = q_{ij}^{n+1} + \frac{q_{i,n+1}^{n+1} q_{n+1,j}^{n+1}}{1 - q_{n+1,n+1}^{n+1}}, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Обозначим теперь через q_n стационарную вероятность состояния x_n ЦМ $\{\mathcal{X}_s^N,$ $s \geqslant 0\}$ и покажем, что наличие матриц $Q_1, \ldots, Q_N$ позволяет вычислить стационарное распределение $\{q_n,\ n = \overline{1,N}\}$.

Теорема 2. *Стационарное распределение* $\{q_n,\ n = \overline{1,N}\}$ *определяется соотношениями*

$$q_n = q_n^* / \sum_{j=1}^{N} q_j^*, \tag{14}$$

где

$$q_n^* = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ \sum_{i=1}^{n} q_j^* q_{in}^n / (1 - q_{nn}^n), & n = \overline{2,N}, \end{cases} \tag{15}$$

а q_{in}^n*,* $i = \overline{1,n}$*, определяются в соответствии с* (13).

Доказательство. Стационарное распределение $\{q_n,\ n = \overline{1,N}\}$ является единственным решением системы уравнений

$$\vec{q}^{\,T}(Q_n - E) = \vec{0}^{\,T}, \tag{16}$$

$$\vec{q}^{\,T}\vec{1} = 1, \tag{17}$$

где $\vec{q}^{\,T} = (q_1, \ldots, q_N)$, а E — единичная матрица.

Матрица $Q_N - E$ является неразложимой I-матрицей [4], поэтому на основании [4, теорема 2.2.1], можно утверждать, что существует единственное представление этой матрицы в виде произведения правой треугольной матрицы на левую треугольную матрицу, у которой все диагональные элементы равны единице.

Определим компоненты треугольного разложения матрицы $Q_N - E$, используя метод Гаусса. Для этого умножим матрицу $Q_N - E$ справа на произведение квадратных матриц следующего вида:

$$L_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^N & l_2^N & & l_{N-1}^N & 1 \end{bmatrix}, \quad L_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{N-1} & l_2^{N-1} & \ldots & l_{N-1}^{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad , \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ l_1^2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

где

$$l_j^n = q_{nj}^n/(1 - q_{nn}^n), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad n = \overline{2, N},$$

а величины q_{nj}^n, $j = \overline{1, n}$, $n = \overline{2, N}$, определяются в соответствии с (13).

В результате умножения с учетом (13) получим

$$(Q_N - E)L_N \cdot \ldots \cdot L_2 = \tilde{Q}_N, \tag{19}$$

где

$$\tilde{Q}_N = \begin{bmatrix} q_{11}^1 - 1 & q_{12}^2 & q_{13}^3 & \ldots & q_{1N}^N \\ 0 & q_{22}^2 - 1 & q_{23}^3 & \ldots & q_{2N}^N \\ 0 & 0 & q_{33}^3 - 1 & \ldots & q_{3N}^N \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{NN}^N - 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Далее положим

$$L = L_N \cdot \ldots \cdot L_2. \tag{21}$$

Из (18) и (21) следует, что L — левая треугольная матрица с диагональными элементами, равными единице.

Поскольку L — невырождена, из (19) находим

$$Q_N - E = \tilde{Q}_N L^{-1}, \tag{22}$$

причём L^{-1} также является левой треугольной матрицей с диагональными элементами, равными единице.

Таким образом, мы представили матрицу $Q_N - E$ в виде произведения правой треугольной матрицы $\tilde{Q}_N$ с элементами, определяемыми в соответствии с (13) на левую треугольную матрицу L^{-1}.

Теперь подставляя (22) в СУР (16) и умножая полученную систему справа на матрицу L, приходим к следующей системе:

$$\vec{q}^{\,T}\tilde{Q}_N = \vec{0}^{\,T}. \tag{23}$$

И, наконец, учитывая в (23) вид (20) матрицы $\tilde{Q}_N$ и используя условие нормировки (17) путем несложных алгебраических преобразований приходим к соотношениям (14)–(15). Таким образом, теорема доказана. □

Итак, нами получены выражения, позволяющие рассчитать стационарное распределение ЦМ $\{\mathcal{X}_s^N,\ s \geqslant 0\}$, вложенной в МП $X(t)$ по моментам скачков этого процесса. Теперь, используя известные соотношения между стационарными вероятностями состояний МП и соответствующих состояний ЦМ, вложенной в этот процесс по моментам его скачков [5], мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Стационарное распределение* $\{p_n,\ n = \overline{1,N}\}$ *определяется соотношениями*

$$p_n = \frac{a_{nn}}{\sum_{j=1}^{N} q_j/a_{jj}} q_n,$$

где q_n *вычисляются по формулам* (14).

Таким образом, нами получен алгоритм для решения СУР (10). Решение этой системы фактически основано на применении метода Гаусса для треугольного разложения матриц, а то обстоятельство, что решаемая система является СУР, позволило придать вычислениям наглядную вероятностную интерпретацию. Однако при разработке алгоритма для решения (10) мы нигде не учитывали, что матрица коэффициентов A этой системы является блочной трёхдиагональной. Данное обстоятельство позволяет значительно сократить объем производимых вычислений, о чем свидетельствует

Теорема 4. *Для любого фиксированного* $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, *матрица* Q_n *имеет блочный трёхдиагональный вид и все её элементы, за исключением лишь может элементов, стоящих на пересечении двух последних блочных строк и двух последних блочных столбцов, совпадают с соответствующими элементами матрицы* Q_N.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем с помощью метода математической индукции.

Пусть $n = N$. В этом случае достаточно показать, что матрица Q_N является блочной трёхдиагональной. Справедливость этого утверждения очевидным образом вытекает из (11) и того факта, что матрица A имеет блочный трёхдиагональный вид.

Далее предположим, что теорема верна для $n = l$, $N > l > 1$, и докажем её справедливость для $n = l-1$. Согласно (13) элементы матрицы Q_{l-1} определяются через элементы матрицы Q_l следующим образом:

$$q_{ij}^{l-1} = q_{ij}^{l} + \frac{q_{il}^{l} q_{lj}^{l}}{1 - q_{ll}^{l}}, \quad i,\ j = \overline{1, l-1}. \tag{24}$$

Следовательно, из (24) для всех i, j таких, что $q^l_{il} = 0$ либо $q^l_{lj} = 0$, получаем $q^{l-1}_{ij} = q^l_{ij}$.

Учитывая предположение индукции о структуре матрицы Q_l, приходим к выводу о том, что q^l_{il} (q^l_{lj}) равны нулю для всех $i < l - i_0$ ($j < l - j_0$), где $i_0(j_0)$ — суммарная высота (ширина) двух последних блочных строк (столбцов) матрицы Q_l. Последнее означает, что все элементы матрицы Q_{l-1}, за исключением лишь элементов, стоящих на пересечении двух последних блочных строк и двух последних блочных столбцов, будут совпадать с соответствующими элементами матрицы Q_l, а следовательно, и с соответствующими элементами матрицы Q_N. Таким образом, теорема доказана. □

Из теоремы 4 вытекает очевидное

Следствие 1. *Матрица $\tilde{Q}_N$ в разложении (22) является блочной двухдиагональной.*

Замечание 1. Теорема 4 фактически утверждает, что для вычисления элементов матрицы Q_n будут использоваться элементы не более, чем четырёх блоков матрицы Q_{n+1}, $n = \overline{1, N-1}$. Элементы же остальных блоков матрицы Q_{n+1} совпадают с соответствующими элементами матрицы Q_N и на данном этапе вычислений не используются. В свою очередь, элементы матрицы Q_N определяются в соответствии с (11) через элементы матрицы A. Таким образом, генерация блоков матрицы A может производиться поэтапно, по мере их использования в вычислениях. Другими словами, существует возможность построения алгоритма одновременной генерации матрицы A и расчёта стационарного распределения МП $X(t)$. Реализация такого алгоритма позволит эффективно использовать память ЭВМ.

Заключение

Итогом проведенного исследования является алгоритм для расчета стационарных характеристик многоканальной экспоненциальной системы обслуживания с переупорядочиванием заявок. Можно утверждать, что данный алгоритм является оптимальным с точки зрения памяти ЭВМ и времени счета.

Список литературы

[1] Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А. Анализ очередей в вычислительных сетях. — М.: Наука, 1989.

[2] Бочаров П. П., Матюшенко С.И. Анализ двухканальной экспоненциальной системы обслуживания конечной ёмкости с учётом переупорядочивания заявок. // Модели и методы информационных сетей. — М.: Наука, 1990. — С. 3–9.

[3] Пранявичюс Г. И. Модели и методы исследования вычислительных систем. — Вильнюс: Моклас, 1982.

[4] Наумов В. А. Численные методы анализа марковских цепей. — М.: Университет дружбы народов, 1985.

[5] Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. — М.: Мир, 1964.