

СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 510.676, 519.7

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КРИЗИСНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ¹

Цветков И.В.

Лаборатория математического моделирования

Поступила в редакцию 18.02.2010, после переработки 03.03.2010.

В работе приводятся краткие сведения о теории катастроф. Предложен новый метод исследования катастрофы сборки A_3 . Кратко изложена фрактальная модель кризисных социально-экономических процессов. Показано наличие в этой модели катастрофы A_3 вблизи критических точек.

This work presents the summary of catastrophism. The work offers a new method of A_3 -type catastrophe and sets out the main principles of construction of the fractal model of crisis socio-economic processes. The work also proves the presence of A_3 -type catastrophe near the critical points in this model.

Ключевые слова: теория катастроф, фрактальная модель, критические точки, социально-экономические процессы.

Keywords: catastrophism, fractal model, critical points, socio-economic processes.

Введение

Построение математических моделей, адекватно отражающих динамику кризисных социально-экономических процессов на сегодня является крайне актуальной задачей. В работах [1, 2] построена математическая модель кризисных процессов, описываемых мультифрактальными кривыми. Возникает естественный вопрос о связи этой модели с теорией катастроф [3, 4], новой, бурно развивающейся ветвью математики.

Цель данной работы – показать наличие катастрофы A_3 вблизи критических точек (точек бифуркации) фрактальной модели [1, 2].

1. Элементарная теория катастроф

Единая стройная теория, которая получила название теории катастроф, возникла благодаря работам Т.Тома [3]. В экономике и социологии в настоящее время

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-01-97508-р_центр_a).

ощущается недостаток в моделях, основанных на системе разумных гипотез, на которой в свою очередь, могла бы базироваться теория катастроф. Общепринято считать [4], что теория катастроф возникла на основе исследования особенностей гладких отображений Уитни и теории бифуркации динамических систем Пуанкаре и Андронова.

Предметом теории катастроф является изучение зависимости качественной природы решений уравнений

$$F_i(X_j, C_\alpha) = 0 \quad (1)$$

$$1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq N; 1 \leq \alpha \leq k,$$

от значений параметров C_α , присутствующих в этих уравнениях.

Решения X_j описывают состояния некоторой системы, поэтому их называют переменными состояниями. Уравнения (1) зависят от k параметров C_α , которые, естественно, называются управляющими параметрами. Особый интерес представляет уравнение состояния равновесия градиентных динамических систем, которые можно описать с помощью системы уравнений:

$$F_i(X_i, C_\alpha) = \frac{\partial V(X_j, C_\alpha)}{\partial X_i} = 0. \quad (2)$$

Функция $V(X_i, C_\alpha)$ в (2) называется потенциальной функцией. Элементарная теория катастроф – это наука о том, как меняются состояния равновесия $X_i(C_\alpha)$ потенциальной функции $V(X_i, C_\alpha)$ при изменении управляющих параметров.

Остановимся более подробно на изучении функциональных свойств потенциальной функции V . Точки, в которых $V_i = \frac{\partial V}{\partial X_i} = 0$ называются критическими. Критические точки в которых $\det V_{ij} \neq 0$; ($V_{ij} = \frac{\partial V}{\partial X_i \cdot \partial X_j}$) называются морсовыми, а в которых $\det V_{ij} = 0$ – неморсовскими.

В дальнейшем нас будет интересовать случай одной переменной $i = 1$ и $X_1 = X$. Теорема Тома [3] гарантирует существование гладкой замены переменных, такой, что в окрестности неморсовской критической точки V может быть записана в канонической форме ($C_\alpha = 0$)

$$V = X^{k+1}. \quad (3)$$

Функцию $X_{k+1} = CG(1)$ называют ростком катастрофы типа A_k . Росток катастрофы $CG(1)$ есть неморсовская функция X . С учетом наличия управляющих параметров C_α в окрестности неморсовской критической точки V имеет вид

$$V = \frac{1}{k+1} X^{k+1} + \sum_{\alpha=1}^{k-1} C_\alpha X^\alpha = Cat(1, k). \quad (4)$$

Для удобства в ростке катастрофы мы выделили множитель $1/(1+k)$. Функцию $Cat(1, k)$ называют функцией катастрофы или просто катастрофой.

Далее ограничимся случаем катастрофы $A_3(k = 3)$, который для нас представляет интерес в дальнейшем. Тогда (4) для этого случая можно записать как:

$$V = \frac{1}{4} X^4 + \frac{a}{2} X^2 + bX. \quad (5)$$

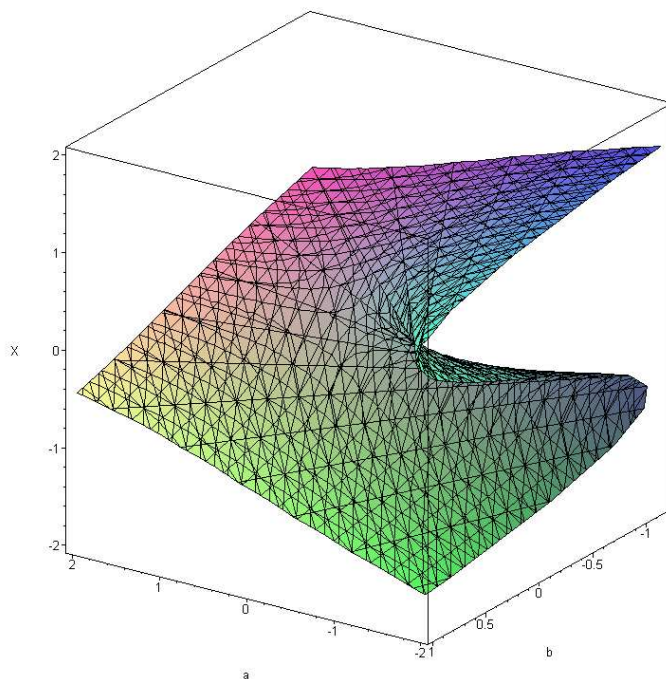


Рис. 1: Зависимость переменной состояния X от управляющих параметров a и b

В (5) мы положили для удобства $C_2 = a/2$, $C_1 = b$.

Катастрофа A_3 получила название катастрофы сборки и задается семейством функций (5), зависящих от двух управляющих параметров a и b . Любая точка пространства управляющих параметров $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, за исключением точек сепаратрисы

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0. \quad (6)$$

параметризует функции с одной или тремя изолированными критическими точками. Положение критических точек находится путем решения кубического уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial X} = X^3 + aX + b = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) задает двумерное многообразие, расположенное в трехмерном пространстве с координатными осями $X - a - b$. Графически оно представлено на Рис.1.

Из Рис.1 ясно, почему катастрофа A_3 носит название катастрофы сборки. В данной работе представим другой, намного более простой, чем стандартный [3] метод исследования катастрофы сборки A_3 . Заменой $X = b^{1/3}\xi$ уравнение (7) приводится к виду:

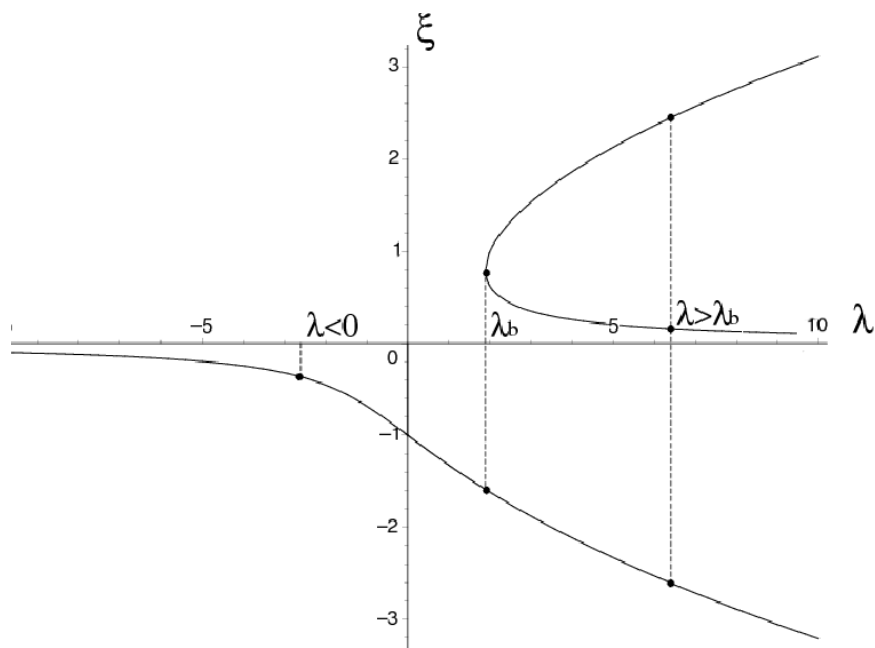


Рис. 2: График зависимости корня уравнения (8) ξ от параметра λ

$$\xi^2 + \frac{1}{\xi} = \lambda, \lambda = \frac{a}{b^{2/3}}. \quad (8)$$

Вместо управляющих параметров (a, b) будем иметь управляющие параметры (λ, b) . Причем зависимость X от b сводится лишь к изменению масштаба. $X = b^{1/3}\xi$. В новых переменных $\xi - \lambda - b$ параметр λ становится существенным, определяющим характер зависимости ξ от λ . Уравнение (8) задает уже одномерное многообразие на плоскости с координатными осями $\xi - \lambda$. График функции $\xi(\lambda)$ дан на Рис.2.

Точка бифуркации $\lambda = \lambda_b = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ является сепаратрисой, отделяющей области существования одного и трех вещественных корней уравнений (7), (8). При $\lambda < \lambda_b$ мы имеем один вещественный корень, а при $\lambda > \lambda_b$ - три вещественных корня. Уравнение сепаратрисы $\lambda = \lambda_b$ легко можно привести к виду (6). Аналитический вид корней уравнения (7) дан в [2]. В точке бифуркации λ_b корни уравнения (8) соответственно равны: $\xi_1 = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, $\xi_{2,3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Причем в этой точке переменная состояния X испытывает скачок.

$$\Delta X_b = b^{1/3} (\xi_1 - \xi_{2,3}) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}} b^{1/3}. \quad (9)$$

Из Рис.2 следует, что критическая точка $\lambda = 0$ и точка бифуркации λ_b не

совпадают при $b \neq 0$.

2. Уравнение фрактальной модели социально-экономических процессов

Для описания динамики социально-экономических процессов, представляемой мультифрактальными кривыми в работах [1, 2] построена фрактальная модель. Это означает, что весь промежуток времени наблюдения процесса можно разбить на промежутки, на каждом из которых фрактальная размерность имеет определенное значение D . На этих участках тангенс угла наклона линейного тренда (средняя скорость соответствующего процесса) согласно нашей модели [2] является функцией D , и находится из решения кубического уравнения

$$A(D)X + B_k X^3 = \eta. \quad (10)$$

Удобно выбрать такой масштаб, чтобы выполнялось условие $|X| \ll 1$. Для функции $A(D)$ выберем следующее аналитическое представление

$$A(D) = \frac{(D_0 - D)^{-1}}{(D_0 - D_k)^{-1} (D_0 - D)^{-1} (D - D_k)} \quad D_0 \leq D \leq 2. \quad (11)$$

В [5] предложено несколько иное аналитическое представление $A(D)$, близкое к (11).

Параметры модели D_0 , D_k , B_k , и η выбираются из наилучшего согласия с опытными данными. В случае $D < D_0$ членом с B_k можно пренебречь и справедливо линейное приближение

$$X = \eta(D_0 - D). \quad (12)$$

В этой области значений D уравнение (10) имеет один вещественный корень, определяемый формулой (12). При приближении D к D_k ситуация существенно изменяется и членом B_k пренебречь уже нельзя.

Уравнение (10) упрощаем заменой $X = \left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{1/3} \xi(D)$

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda(D). \quad (13)$$

Где $\lambda = -(D - D_k) / (D_0 - D_k) B_k^{1/3} \eta^{2/3} (D_0 - D)$

Уравнение (13) переходит в уравнение (8) заменой $\xi \rightarrow -\xi$. Чтобы наглядно представить характер зависимости $\xi(D)$ приведем ее на Рис. 3 и 4 для $D_0 = 1,61$, $D_k = 1,86$, $B_k = \pm 0,4$, $\eta = 0,25$.

Критические точки $D = D_k$ соответствует условию $\lambda(D_k) = A(D_k) = 0$. В этой точке $X = X_k = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}$; Так как $|\eta| \ll 1$, то $|X_k| \gg |\eta|$ и в критической точке происходит сильный рост или убывание переменной состояния. Качественно меняется характер решения в точке бифуркации D_b , которая находится из условия

$$\frac{(D_k - D_b)}{(D_0 - D_k)(D_0 - D_b) B_k^{1/3} \eta^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}. \quad (14)$$

Отсюда следует значение D_b

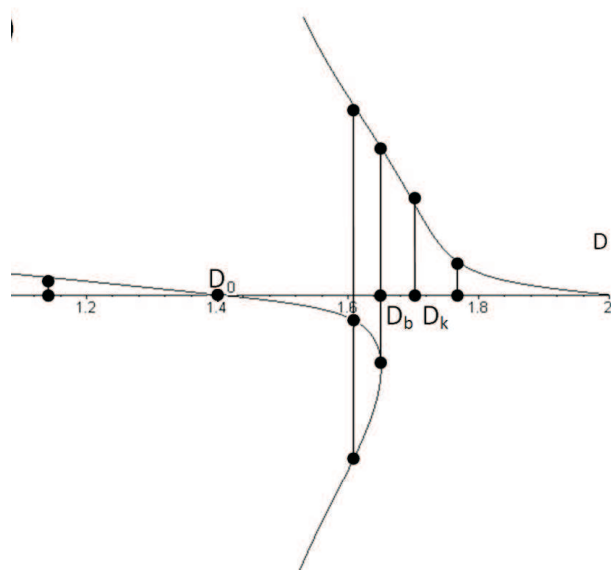


Рис. 3: $B_k = 0,4$

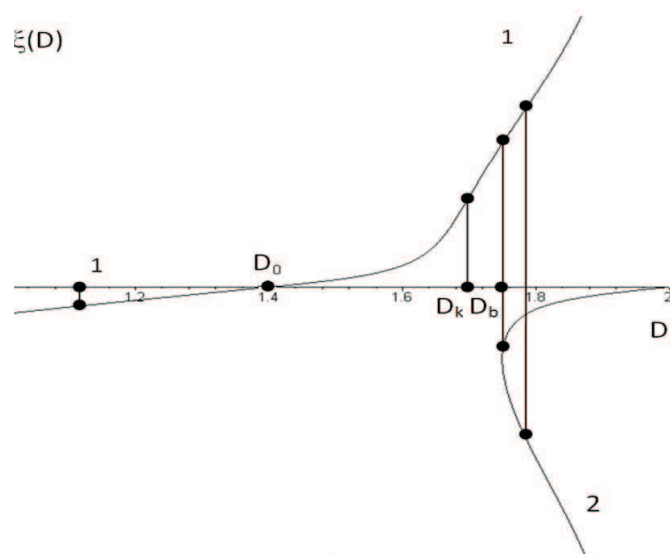


Рис. 4: $B_k = -0,4$

$$D_b = \frac{D_k + \sqrt[3]{\frac{27}{4}} D_0 (D_k - D_0) B_k^{1/3} \eta^{2/3}}{1 + \sqrt[3]{\frac{27}{4}} (D_k - D_0) B_k^{1/3} \eta^{2/3}}. \quad (15)$$

Сдвиг точки бифуркации D_b от критической точки при $B_k < 0$ происходит влево, а при $B_k > 0$ - вправо. В точке имеются два вещественных корня D_b корни $\xi_{1b} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, $\xi_{2b} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, которые имеют разные знаки. При $D < D_b$ уравнение (13) имеет один вещественный корень, а при $D > D_b$ - три вещественных корня.

3. Катастрофы фрактальной модели

Согласно (5), (7), (10), (11) потенциальная функция фрактальной модели имеет вид

$$V(X) = \frac{1}{4} X^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{A(D)}{B_k} \right) X^2 - \eta X. \quad (16)$$

Управляющие параметры a и b соответственно будут равны $a = \frac{A(D)}{B_k}$, $b = -\frac{\eta}{B_k}$.

В (16) росток катастрофы $CG(1) = \frac{1}{4} X^4$, и отсюда следует наличие в рассмотренной модели катастрофы типа A_3 . Причем, если параметр b просто зависим от параметра η , то a будет достаточно сложной функцией параметров фрактальной модели D_0 , D_k , B_k , D

$$a = \begin{cases} B_k^{-1} (D_0 - D)^{-1} & 1 \leq D \leq D_0 \\ B_k^{-1} (D_0 - D_k)^{-1} (D_0 - D)^{-1} (D - D_k) & D_0 \leq D_k \leq 2 \end{cases} \quad (17)$$

Уравнение сепаратрисы при этом имеет вид

$$\eta = \pm \frac{2}{\sqrt{27}} \left(-\frac{A(D)}{B_k} \right)^{3/2}. \quad (18)$$

Кривая сепаратрисы в координатах D , η при $D_0 = 1,61$, $D_k = 1,86$, $B_k = \pm 0,4$ представлены на Рис. 5 и 6

Особый интерес для нас представляет аналитическое поведение $X(D)$ вблизи критической точки $\lambda = 0$ и точки бифуркации $\lambda_b = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$.

В критической точке $X_k = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}$. Считая $|\lambda| \ll 1$, получаем вблизи критической точки:

$$X(D) = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}} \left(1 + \frac{\lambda(D)}{3} - \frac{\lambda^3(D)}{81} + O(\lambda^4(D)) \right). \quad (19)$$

В точке бифуркации D_b $\lambda_b = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ имеют место три вещественных корня: $X_1 = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k} \frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$, $X_2 = X_3 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}$. Если $\lambda \gg \lambda_b$ и $|\tilde{\lambda} = (\lambda - \lambda_b)| \ll 1$ то из (13) имеем:

$$X_1 = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_R}} \left(\sqrt[3]{4} + \frac{2\sqrt[3]{2}}{9} \tilde{\lambda} - \frac{4}{243} \tilde{\lambda}^2 + O(\tilde{\lambda}^3) \right). \quad (20)$$

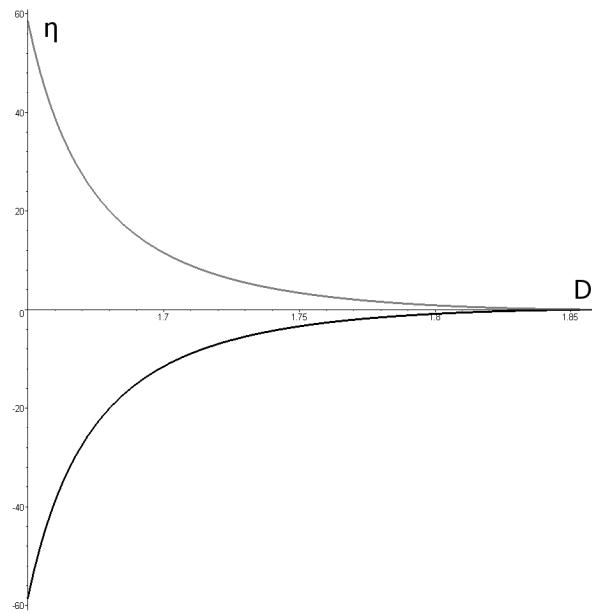


Рис. 5: График сепаратрисы $\eta(D)$ при $B_k = 0,4$

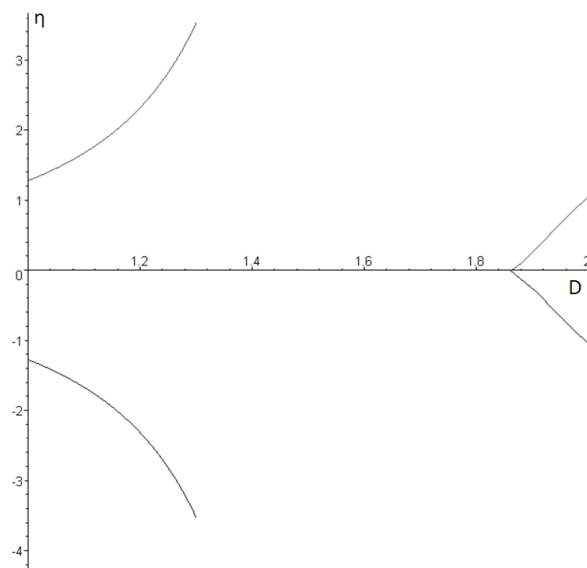


Рис. 6: График сепаратрисы $\eta(D)$ при $B_k = -0,4$

$$X_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_R}} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \pm \left(\frac{\tilde{\lambda}}{1 + \sqrt[3]{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{\lambda}^2) \right).$$

Из (20) становится очевидным исчезновение двух вещественных решений $X_{2,3}$ при $\tilde{\lambda} < 0$ вследствие наличия члена $\sqrt{\tilde{\lambda}}$.

Исключительная важность точки бифуркации D_b прежде всего связана с возможностью перехода системы в этой точке из одного состояния X_1 в другое $X_{2,3}$ скачком при чрезвычайно малом изменении D вблизи D_b . В данном случае имеют место все признаки катастрофы в точке бифуркации D_b и эту точку естественно назвать точкой катастрофы.

В данной работе мы изучили возможность использования фрактальной модели с аналитической зависимостью коэффициента $A(D)$, определяемой формулой (11) для описания кризисных социально-экономических процессов. Более подробно данный вопрос, был исследован в работе [2], посвященной изучению валютного кризиса 1998 года как бифуркационного явления в рамках фрактальной модели.

Заключение

Нами показано, что использование теории катастроф при исследовании фрактальных моделей кризисных явлений в социально-экономических системах позволяет более глубоко понять структуру этих моделей. Катастрофа типа A_3 наблюдается вблизи критической D_k и точки бифуркации D_b фрактальной модели.

Список литературы

- [1] Кудинов А.Н., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В. Бифуркация параметра порядка в задачах астрофизики и экономики. Синергетика в естественных науках. Издательство ТвГУ, Тверь: 2008. с. 36-37.
- [2] Кудинов А.Н., Цветков В.П., Цветков И.В. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели. Финансы и кредит, №46 (382) 2009, с. 2-7.
- [3] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. том 1,2 Издательство: Мир, 1984 г.
- [4] Арнольд В.И. Теория катастроф. 3-е изд. доп. М. Наука 1990. 128 с.