

НОВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ШАРА ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Семенов М.В., Шеретов Ю.В.

Кафедра математического анализа

На базе квазигидродинамических уравнений построен новый алгоритм расчета осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в окрестности шара. Проведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

On the base of Quasi-Hydrodynamic equations new numerical algorithm of calculation of axe-symmetric viscous incompressible fluid flows in vicinity of sphere is constructed. The comparison of obtained results with the experimental data is carried out.

Введение. Для описания медленных изотермических течений вязкой слабосжимаемой жидкости (например, воды) около твердых тел можно использовать классическую систему Стокса. Она выводится из уравнений вязкой несжимаемой жидкости путем отбрасывания нелинейного инерционного члена. Точное решение системы Стокса в задаче об обтекании шара радиуса R внешним однородным потоком с условиями прилипания на границе было построено Стоксом [1]–[3]. Оно адекватно описывает течения жидкости вблизи шара, если $Re \in (0, 1]$. Здесь $Re = (u_\infty R)/\nu$ – число Рейнольдса, u_∞ – скорость набегающего потока, ν – постоянный коэффициент кинематической вязкости.

Если же $Re > 1$, то для достижения совпадения с опытом уже необходимо использовать нелинейные уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Аналитическому и численному исследованию течений жидкости около шара в рамках указанной модели посвящены работы [4]–[6]. В [4] метод Белоцерковского–Гущина–Щенникова применялся для приближенного нахождения решений уравнений Навье–Стокса. Изучен характер изменения режимов обтекания с увеличением числа Рейнольдса, в том числе и для трехмерных течений. В [5], [6] изучались микротечения газа в окрестности сферы с учетом эффектов скольжения на поверхности.

В монографии [7] был дан феноменологический вывод новой квазигидродинамической (КГД) системы уравнений, описывающей движения ньютоновских сред. Принципиальное отличие от теории Навье–Стокса заключалось в использовании процедуры пространственно-временного осреднения при определении основных гидродинамических величин. На основе КГД-уравнений строились численные методы в динамике вязкой жидкости [8] – [10]. Дополнительные по сравнению с навье-стоксовскими слагаемые в соответствующих алгоритмах выполняли роль эффективных искусственных регуляризаторов, обеспечивающих устойчивость вычислений. Близкие по виду регуляризаторы использовались в [11]. В работе [12] удалось построить точное аналитическое решение КГД-уравнений в приближении Стокса для задачи об обтекании шара с условиями максвеловского скольжения на границе и

уточнить классические результаты по силе сопротивления для течений умеренно-разреженного газа. В [13] предложен и реализован на ЭВМ новый КГД-алгоритм расчета медленных изотермических течений вязкого газа с учетом эффектов скольжения на поверхности шара.

В настоящей статье на базе КГД-уравнений построен новый алгоритм расчета осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в окрестности шара. Проведено сопоставление полученных результатов с теоретическими и экспериментальными данными [2], [14], а также с расчетами [4].

1. Постановка задачи об обтекании шара. Система Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в сферических координатах (r, φ, θ) без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta u_r \sin \theta) - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ = 2\nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \sigma_{\theta r}) - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^2 \sin \theta) + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\ = 2\nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

В (1)–(3) составляющая скорости u_φ положена равной нулю. Зависимостью остальных макропараметров среды от угла φ пренебрегаем. Связь сферических координат (r, φ, θ) с декартовыми (x_1, x_2, x_3) задается соотношениями $x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$, $x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$, $x_3 = r \cos \theta$. Компоненты тензора скоростей деформаций $\hat{\sigma}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r}.$$

Система (1)–(3) замкнута относительно неизвестных функций – проекций вектора скорости $u_r = u_r(r, \theta)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$ и нормированного делением на постоянную плотность ρ давления $p = p(r, \theta)$.

Задача обтекания шара радиуса R с центром в начале координат направленным вдоль оси ox_3 внешним однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей при $r \rightarrow +\infty$ скорость U_∞ и давление p_∞ , состоит в отыскании функций u_r , u_θ и p , удовлетворяющих в области $G = \{(r, \theta) : R < r < +\infty, 0 < \theta < \pi\}$ уравнениям

(1) – (3), а также условиям

$$u_r(R, \theta) = 0, \quad u_r(+\infty, \theta) = U_\infty \cos \theta; \quad (4)$$

$$u_\theta(R, \theta) = 0, \quad u_\theta(+\infty, \theta) = -U_\infty \sin \theta; \quad (5)$$

$$p(+\infty, \theta) = p_\infty; \quad 0 < \theta < \pi. \quad (6)$$

Здесь p_∞ – давление на бесконечности, которое для вязкой несжимаемой жидкости полагается равным 1. Первые из равенств (4), (5) представляют собой условия прилипания для вектора скорости на поверхности шара.

2. Система квазигидродинамических уравнений для несжимаемой жидкости. Постановка нестационарной задачи об обтекании шара. Нестационарная система КГД-уравнений для несжимаемой жидкости была выведена в [7]. В рассматриваемых сферических координатах без учета внешних сил она может быть записана в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = \frac{\tau}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] + \frac{\tau}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta u_r \sin \theta) - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ & = 2\nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \sigma_{\theta r}) - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right] + \\ & + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_r u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (w_\theta u_r \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (w_r u_\theta \sin \theta) - \\ & - 2 \frac{u_\theta w_\theta}{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta^2 \sin \theta) + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\ & = 2\nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_r u_\theta) + \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (w_\theta u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_\theta u_r) + \\ & + \frac{w_\theta u_r + w_r u_\theta}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$w_r = \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right], \quad (10)$$

$$w_\theta = \tau \left[u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right].$$

Неизвестными функциями в ней являются компоненты вектора скорости $u_r = u_r(r, \theta, t)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta, t)$ и нормированное делением на постоянную плотность ρ давление $p = p(r, \theta, t)$. Малый положительный параметр τ выполняет роль искусственного регуляризатора.

Присоединим к (7)–(9) начальные условия

$$u_r(r, \theta, 0) = U_\infty \cos \theta, \quad u_\theta(r, \theta, 0) = -U_\infty \sin \theta, \quad (11)$$

которые отвечают мгновенному помещению шара в однородный поток. Добавим также граничные условия

$$u_r(R, \theta, t) = 0, \quad u_r(+\infty, \theta, t) = U_\infty \cos \theta; \quad (12)$$

$$u_\theta(R, \theta, t) = 0, \quad u_\theta(+\infty, \theta, t) = -U_\infty \sin \theta; \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(R, \theta, t) = 0, \quad p(+\infty, \theta, t) = p_\infty; \quad 0 < \theta < \pi, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Появление дополнительного граничного условия для давления связано с более высоким порядком системы (7)–(9) по сравнению с соответствующей нестационарной системой Навье–Стокса.

Точного решения стационарного аналога задачи (7)–(14) не найдено. Поэтому в сравнении мы будем опираться на опытные данные и на расчеты других авторов.

3. Вычислительный алгоритм. Приведем систему (7)–(9) к безразмерному виду, выбрав в качестве единиц измерения r , t , u_r , u_θ , p соответственно величины R , R/U_∞ , U_∞ , U_∞ , U_∞^2 . После указанной процедуры во всех выписанных выше формулах следует положить $R = 1$, $U_\infty = 1$, $\nu = 1/Re$. Без ограничения общности будем считать, что $p_\infty = 1$. Введем в области $G_* = \{(r, \theta) : 1 < r < R_\infty, 0 < \theta < \pi\}$ равномерную сетку

$$\omega_{h_r, h_\theta} = \{(r_i, \theta_j) : r_i = 1 + (i - 0.5)h_r, \theta_j = (j - 0.5)h_\theta,$$

$$h_r = (R_\infty - 1)/N_r, h_\theta = \pi/N_\theta, i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\theta}\}.$$

Здесь N_r , N_θ – заданные натуральные числа, $R_\infty \gg 1$ – фиксированное положительное число. Пусть

$$\bar{\omega}_{h_r, h_\theta} = \{(r_i, \theta_j) : r_i = 1 + (i - 0.5)h_r, \theta_j = (j - 0.5)h_\theta,$$

$$h_r = (R_\infty - 1)/N_r, h_\theta = \pi/N_\theta, i = \overline{0, N_r + 1}, j = \overline{0, N_\theta + 1}\}.$$

Узлы $\gamma_{h_r, h_\theta} = \bar{\omega}_{h_r, h_\theta} \setminus \omega_{h_r, h_\theta}$ назовем фиктивными.

На сетке ω_{h_r, h_θ} аппроксимируем дифференциальные уравнения (7)–(9) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (u_r)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (u_r)_{i-1/2,j}) + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} - \\
 & \sin \theta_{j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2}) = \frac{\tau}{r_i^2 h_r^2} \left\{ r_{i+1/2}^2 \left[\frac{(u_r)_{i+1/2,j}}{h_r} \cdot ((u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i,j}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2} h_\theta} ((u_\theta)_{i+1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i+1/2,j-1/2}) - \frac{u_{\theta^2}^2_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_r} \right] - \right. \\
 & \left. - r_{i-1/2}^2 \left[\frac{(u_r)_{i-1/2,j}}{h_r} ((u_r)_{i,j} - (u_r)_{i-1,j}) + \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2} h_\theta} ((u_\theta)_{i-1/2,j+1/2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (u_\theta)_{i-1/2,j-1/2}) - \frac{u_{\theta^2}^2_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} + \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_r} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\tau}{h_\theta r_i \cdot \sin \theta_j} \left\{ \sin \theta_{j+1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j+1/2}}{h_r} ((u_\theta)_{i+1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j+1/2}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i h_\theta} ((u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j}) + \frac{(u_r)_{i,j+1/2} \cdot (u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{r_i h_\theta} \right] - \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{j-1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j-1/2}}{h_r} ((u_\theta)_{i+1/2,j-1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j-1/2}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i h_\theta} ((u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i,j-1}) + \frac{(u_r)_{i,j-1/2} \cdot (u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{r_i h_\theta} \right] \right\}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\hat{u}_r)_{ij} - (u_r)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (u_r^2)_{i+1/2,j} + r_{i-1/2}^2 (u_r^2)_{i-1/2,j}) + \\
 & \frac{1}{r_i \sin \theta \cdot h_\theta} ((u_\theta)_{i,j+1/2} (u_r)_{i,j+1/2} \sin \theta_{j+1/2} - (u_\theta)_{i,j-1/2} (u_r)_{i,j-1/2} \sin \theta_{j-1/2}) - \\
 & - \frac{(u_\theta^2)_{ij}}{r_i} + \frac{1}{h_r} (p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j}) = \frac{2}{Re} \left[\frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (\sigma_{rr})_{i+1/2,j} - \right. \\
 & \left. - r_{i-1/2}^2 (\sigma_{rr})_{i-1/2,j}) + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (\sigma_{\theta r})_{i,j+1/2} - \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{j-1/2} (\sigma_{\theta r})_{i,j-1/2}) - \frac{(\sigma_{\theta\theta})_{ij} + (\sigma_{\varphi\varphi})_{ij}}{r_i} \right] + \\
 & + \frac{2}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (w_r)_{i+1/2,j} \cdot (u_r)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (w_r)_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \cdot (\sin \theta_{j+1/2} (w_\theta)_{i,j+1/2} (u_r)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (w_\theta)_{i,j-1/2} (u_r)_{i,j-1/2}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (w_r)_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} - \\
 & \sin \theta_{j-1/2} (w_r)_{i,j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2}) - \frac{2(u_\theta)_{ij} (w_\theta)_{ij}}{r_i}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\hat{u}_\theta)_{ij} - (u_\theta)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (u_r)_{i+1/2,j} (u_\theta)_{i+1/2,j} - \\
& - r_{i-1/2}^2 (u_r)_{i-1/2,j} (u_\theta)_{i-1/2,j}) + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} ((u_\theta)_{i,j+1/2}^2 \sin \theta_{j+1/2} - \\
& - (u_\theta)_{i,j-1/2}^2 \sin \theta_{j-1/2}) + \frac{(u_\theta)_{ij} (u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{1}{r_i h_\theta} (p_{i,j+1/2} - p_{i,j-1/2}) = \\
& = \frac{2}{Re} \left[\frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (\sigma_{r\theta})_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (\sigma_{r\theta})_{i-1/2,j}) + \right. \\
& + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (\sigma_{\theta\theta})_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (\sigma_{\theta\theta})_{i,j-1/2}) + \\
& \left. + \frac{(\sigma_{\theta r})_{ij} - (\sigma_{\varphi\varphi})_{ij} \operatorname{ctg} \theta_j}{r_i} \right] + \\
& + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (w_r)_{i+1/2,j} (u_\theta)_{i+1/2,j} - \\
& - r_{i-1/2}^2 (w_r)_{i-1/2,j} (u_\theta)_{i-1/2,j}) + \frac{2}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (w_\theta)_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} - \\
& - \sin \theta_{j-1/2} (w_\theta)_{i,j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2}) + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (w_\theta)_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j} - \\
& - r_{i-1/2}^2 (w_\theta)_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j}) + \frac{(w_\theta)_{ij} (u_r)_{ij} + (w_r)_{ij} (u_\theta)_{ij}}{r_i}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
(\sigma_{rr})_{i+1/2,j} &= \frac{1}{h_r} [(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{ij}], \quad (\sigma_{rr})_{i-1/2,j} = \frac{1}{h_r} [(u_r)_{ij} - (u_r)_{i-1,j}], \\
(\sigma_{\theta r})_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_i h_\theta} [(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{ij}] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_r} [(u_\theta)_{i+1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j+1/2}] - \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} \right), \\
(\sigma_{\theta r})_{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_i h_\theta} [(u_r)_{ij} - (u_r)_{i,j-1}] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_r} [(u_\theta)_{i+1/2,j-1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j-1/2}] - \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} \right), \\
(\sigma_{\theta\theta})_{ij} &= \frac{1}{r_i h_\theta} [(u_\theta)_{i,j+1/2} - (u_\theta)_{i,j-1/2}] + \frac{(u_r)_{ij}}{r_i}, \\
(\sigma_{\varphi\varphi})_{ij} &= \frac{(u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{(u_\theta)_{ij} \operatorname{ctg} \theta_j}{r_i}, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$(\sigma_{r\theta})_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1/2} h_\theta} [(u_r)_{i+1/2,j+1/2} - (u_r)_{i+1/2,j-1/2}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_r} [(u_\theta)_{i+1,j} - (u_\theta)_{i,j}] - \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} \right),$$

$$(\sigma_{r\theta})_{i-1/2,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{i-1/2} h_\theta} [(u_r)_{i-1/2,j+1/2} - (u_r)_{i-1/2,j-1/2}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_r} [(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i-1,j}] - \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} \right),$$

(19)

$$(\sigma_{\theta\theta})_{i,j+1/2} = \frac{1}{r_i h_\theta} [(u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j}] + \frac{(u_r)_{i,j+1/2}}{r_i},$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_{i,j-1/2} = \frac{1}{r_i h_\theta} [(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i,j-1}] + \frac{(u_r)_{i,j-1/2}}{r_i},$$

$$(\sigma_{\theta r})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_i h_\theta} [(u_r)_{i,j+1/2} - (u_r)_{i,j-1/2}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_r} [(u_\theta)_{i+1/2,j} - (u_\theta)_{i-1/2,j}] - \frac{(u_\theta)_{ij}}{r_i} \right).$$

Значения произвольной функции ψ из множества $\{u_r, u_\theta, p\}$ в точках $(r_{i\pm 1/2}, \theta_j)$, $(r_i, \theta_{j\pm 1/2})$, $(r_{i+1/2}, \theta_{j\pm 1/2})$, $(r_{i-1/2}, \theta_{j\pm 1/2})$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{i\pm 1/2,j} &= 0.5(\psi_{i\pm 1,j} + \psi_{ij}), & \psi_{i,j\pm 1/2} &= 0.5(\psi_{i,j\pm 1} + \psi_{ij}), \\ \psi_{i+1/2,j\pm 1/2} &= 0.25(\psi_{i+1,j\pm 1} + \psi_{i,j\pm 1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{ij}), \\ \psi_{i-1/2,j\pm 1/2} &= 0.25(\psi_{i-1,j\pm 1} + \psi_{i,j\pm 1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{ij}). \end{aligned}$$

(20)

Символом Δt обозначен шаг по времени. Макропараметры, помеченные индексом $\hat{\cdot}$, относятся к следующему временному слою. Для нахождения безразмерного сеточного параметра τ будем использовать формулу $\tau = \beta \sqrt{h_r^2 + h_\theta^2}$, где β – фиксированная положительная константа, подбираемая в процессе вычислений для обеспечения устойчивости схемы.

Аппроксимация (10) производится аналогичным образом, с учетом (20).

В начальный момент времени $t = 0$ положим

$$(u_r)_{ij} = \cos \theta_j, \quad (u_\theta)_{ij} = -\sin \theta_j, \quad (r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}. \quad (21)$$

Аппроксимация граничных условий (4)–(6) обеспечивается автоматически, если определить сеточные функции p_{ij} , $(u_r)_{ij}$ и $(u_\theta)_{ij}$ в фиктивных узлах с помощью выражений

$$\begin{aligned} p_{0,j} &= p_{1,j}, & p_{N_r+1,j} &= 2 - p_{N_r,j}, & j &= \overline{1, N_\theta}, \\ p_{i,0} &= p_{i,1}, & p_{i,N_\theta+1} &= p_{i,N_\theta}, & i &= \overline{1, N_r}, \\ p_{0,0} &= p_{1,1}, & p_{0,N_\theta+1} &= p_{1,N_\theta}, \\ p_{N_r+1,0} &= 2 - p_{N_r,1}, & p_{N_r+1,N_\theta+1} &= 2 - p_{N_r,N_\theta}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (u_r)_{0,j} &= -(u_r)_{1,j}, & (u_r)_{N_r+1,j} &= 2 \cos \theta_j - (u_r)_{N_r,j}, & j &= \overline{1, N_\theta}, \\ (u_r)_{i,0} &= (u_r)_{i,1}, & (u_r)_{i,N_\theta+1} &= (u_r)_{i,N_\theta}, & i &= \overline{1, N_r}, \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned} (u_r)_{0,0} &= (u_r)_{0,1}, & (u_r)_{0,N_\theta+1} &= (u_r)_{0,N_\theta}, \\ (u_r)_{N_r+1,0} &= 4 - 2 \cos \theta_1 - (u_r)_{N_r,1}, \\ (u_r)_{N_r+1,N_\theta+1} &= -4 - 2 \cos \theta_{N_\theta} - (u_r)_{N_r,N_\theta} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (u_\theta)_{0,j} &= -(u_\theta)_{1,j}, & (u_\theta)_{N_r+1,j} &= -2 \sin \theta_j - (u_\theta)_{N_r,j}, & j &= \overline{1, N_\theta}, \\ (u_\theta)_{i,0} &= (u_\theta)_{i,1}, & (u_\theta)_{i,N_\theta+1} &= (u_\theta)_{i,N_\theta}, & i &= \overline{1, N_r}, \\ (u_\theta)_{0,0} &= (u_\theta)_{1,1}, & (u_\theta)_{0,N_\theta+1} &= -(u_\theta)_{1,N_\theta}, \\ (u_\theta)_{N_r+1,0} &= 2 \sin \theta_1 - (u_\theta)_{N_r,1}, \\ (u_\theta)_{N_r+1,N_\theta+1} &= 2 \sin \theta_{N_\theta} - (u_\theta)_{N_r,N_\theta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (22)–(24) выполняются и на следующем временном слое.

Разностная схема (15)–(24) аппроксимирует начально-краевую задачу (7)–(14) с первым порядком по времени и по пространству. Указанная схема используется для приближенного решения стационарной задачи (1)–(6). Компоненты поля скорости в начальный момент времени определяются с помощью (21). Давление находится методом наискорейшего градиентного спуска путем решения задачи (15), (22) для разностного уравнения Пуассона. Этот алгоритм описан в п. 5. Формулы (16), (17), (23), (24) позволяют определить поле скорости на следующем временном слое. Далее вся процедура повторяется. Течение считается установившимся, если

$$\sum_{(r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}} \left[\left(\frac{(\hat{u}_r)_{ij} - (u_r)_{ij}}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{(\hat{u}_\theta)_{ij} - (u_\theta)_{ij}}{\Delta t} \right)^2 \right] < \varepsilon_u, \quad (25)$$

где ε_u – заданная точность.

4. Метод решения разностного уравнения Пуассона для давления. Положим

$$p_{ij}^{(0)} = 1, \quad (r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}. \quad (26)$$

Для вычисления давления в начальный момент времени рассмотрим итерационный процесс вида

$$p_{ij}^{(k+1)} = p_{ij}^{(k)} - \Delta t_p^{(k)} N_{ij}^{(k)}, \quad (r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 N_{ij}^{(k)} = & - \left\{ \frac{\tau}{r_i^2 h_r^2} \left\{ r_{i+1/2}^2 \left[\frac{(u_r)_{i+1/2,j}}{h_r} \cdot ((u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i,j}) + \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2} h_\theta} \cdot \right. \right. \right. \\
 & \cdot ((u_\theta)_{i+1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i+1/2,j-1/2}) - \frac{u_\theta^2_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} + \frac{p_{i+1,j}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}}{h_r} \left. \right] - \\
 & - r_{i-1/2}^2 \left[\frac{(u_r)_{i-1/2,j}}{h_r} \cdot ((u_r)_{i,j} - (u_r)_{i-1,j}) + \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2} h_\theta} \cdot \right. \\
 & \cdot ((u_\theta)_{i-1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j-1/2}) - \frac{u_\theta^2_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} + \frac{p_{ij}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)}}{h_r} \left. \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\tau}{h_\theta r_i \cdot \sin \theta_j} \left\{ \sin \theta_{j+1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j+1/2}}{h_r} \cdot ((u_\theta)_{i+1/2,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j+1/2}) + \right. \right. \\
 & + \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i h_\theta} \cdot ((u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j}) + \frac{(u_r)_{i,j+1/2} \cdot (u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j+1}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}}{r_i h_\theta} \left. \right] - \\
 & - \sin \theta_{j-1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j-1/2}}{h_r} \cdot ((u_\theta)_{i+1/2,j-1/2} - (u_\theta)_{i-1/2,j-1/2}) + \right. \\
 & + \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i h_\theta} \cdot ((u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i,j-1}) + \frac{(u_r)_{i,j-1/2} \cdot (u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)}}{r_i h_\theta} \left. \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (u_r)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (u_r)_{i-1/2,j}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2}), \quad (28)
 \end{aligned}$$

- невязка. Значения сеточных функций $p_{ij}^{(k)}$ и $N_{ij}^{(k)}$ в точках $(r_i, \theta_j) \in \in \gamma_{h_r, h_\theta}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 p_{0,j}^{(k)} &= p_{1,j}^{(k)}, \quad p_{N_r+1,j}^{(k)} = 2 - p_{N_r,j}^{(k)}, \quad j = \overline{1, N_\theta}, \\
 p_{i,0}^{(k)} &= p_{i,1}^{(k)}, \quad p_{i,N_\theta+1}^{(k)} = p_{i,N_\theta}^{(k)}, \quad i = \overline{1, N_r}, \\
 p_{0,0}^{(k)} &= p_{1,1}^{(k)}, \quad p_{0,N_\theta+1}^{(k)} = p_{1,N_\theta}^{(k)}, \\
 p_{N_r+1,0}^{(k)} &= 2 - p_{N_r,1}^{(k)}, \quad p_{N_r+1,N_\theta+1}^{(k)} = 2 - p_{N_r,N_\theta}^{(k)}; \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{0,j}^{(k)} &= -N_{1,j}^{(k)}, \quad N_{N_r+1,j}^{(k)} = -N_{N_r,j}^{(k)}, \quad j = \overline{1, N_\theta}, \\
 N_{i,0}^{(k)} &= -N_{i,1}^{(k)}, \quad N_{i,N_\theta+1}^{(k)} = -N_{i,N_\theta}^{(k)}, \quad i = \overline{1, N_r}, \\
 N_{0,0}^{(k)} &= N_{1,1}^{(k)}, \quad N_{0,N_\theta+1}^{(k)} = N_{1,N_\theta}^{(k)}, \\
 N_{N_r+1,0}^{(k)} &= N_{N_r,1}^{(k)}, \quad N_{N_r+1,N_\theta+1}^{(k)} = N_{N_r,N_\theta}^{(k)}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Положительный параметр $\Delta t_p^{(k)}$ в согласии с методом наискорейшего градиентного спуска определяется по формуле

$$\Delta t_p^{(k)} = \frac{\sum_{(r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}} r_i^2 (N_{ij}^{(k)})^2 \sin \theta_j}{\sum_{(r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}} \sin \theta_j \left[r_i^2 \left(\frac{N_{i+1,j}^{(k)} - N_{i-1,j}^{(k)}}{2h_r} \right)^2 + \left(\frac{N_{i,j+1}^{(k)} - N_{i,j-1}^{(k)}}{2h_\theta} \right)^2 \right]}. \quad (31)$$

Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\sqrt{\sum_{(r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}} r_i^2 (N_{ij}^{(k)})^2 \sin \theta_j h_r h_\theta} < \varepsilon_p, \quad (32)$$

где ε_p – точность определения давления. При этом полагаем

$$p_{ij} = p_{ij}^{(k)}, \quad (r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}. \quad (33)$$

На следующем временном слое в качестве $p_{ij}^{(0)}$ используется сеточная функция p_{ij} .

5. Результаты расчетов. Алгоритм (15)–(33) был реализован в виде комплекса программ в среде Делфи 7 и апробирован на компьютерах, построенных на платформе WIntel с процессорами Intel Pentium 4 2.8 ГГц и Intel Celeron 1.7 ГГц. Использовались равномерные сетки размеров $N_r \times N_\theta = 100 \times 20, 200 \times 20, 300 \times 30, 400 \times 40, 500 \times 40, 500 \times 50$. Величина R_∞ полагалась равной 10, 12, 15, 20, 25, 30, 100. Числа Рейнольдса принимали значения 0.01, 0.1, 10, 12, 15, 20, 26, 56.5, 50, 60, 65, 100, 118. Кроме того $\varepsilon_u = 0.0001$, $\varepsilon_p = 0.1$. Регуляризирующие параметры $\tau = 0.0001$ и $\beta = 0.03$ обеспечивали устойчивость вычислений с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

На рис. 1а и 1б представлены распределения составляющих скорости u_r и u_θ вдоль луча $r \geq 1$, $\theta = 0.078$ при $Re = 0.1$, $R_\infty = 100$. Они показаны в сравнении с аналогичными распределениями, полученными в результате проектирования точного решения системы Стокса на сетку. Как видно из графиков, расхождение является незначительным. Оно уменьшается с измельчением сетки. Таким образом, с помощью данного алгоритма достаточно точно моделируются медленные течения жидкости в окрестности шара.

На рис. 2а и 2б показаны поле скорости и линии уровня давления вблизи шара для $Re = 0.1$ на сетке 300×30 при $R_\infty = 100$. Они также практически неотличимы от аналогичных результатов, полученных путем проектирования точного решения системы Стокса на сетку (см. [13]).

С увеличением числа Рейнольдса происходит смена режима течения. Критическое число Re оказывается приблизительно равным 10, что согласуется с данными из [4]. На рис. 3а представлены линии уровня давления при $Re = 26$, $R_\infty = 12$. Соответствующее поле скорости, отвечающее режиму отрывного течения, показано в сравнении с экспериментом [14] на рис. 3б. Видно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных, как по углу отрыва, так и по длине зоны рециркуляционного течения.

На рис. 4а изображены линии уровня давления при $Re = 50$, $R_\infty = 15$. Они практически точно соответствуют аналогичным линиям уровня, полученным в расчетах [4] (см. рис. 4б). С ростом числа Re длина отрывной зоны увеличивается. Это видно из рис. 5, где найденное в расчетах поле скорости при $Re = 100$, $R_\infty = 25$ показано в сравнении с линиями тока, взятыми из [4].

На рис. 6 приведена экспериментальная кривая зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса, взятая из [2]. Точками показаны соответствующие расчетные данные.

Заключение. Таким образом, предложенный алгоритм хорошо описывает осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости в окрестности шара. Он сравнительно прост в реализации, является однородным. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

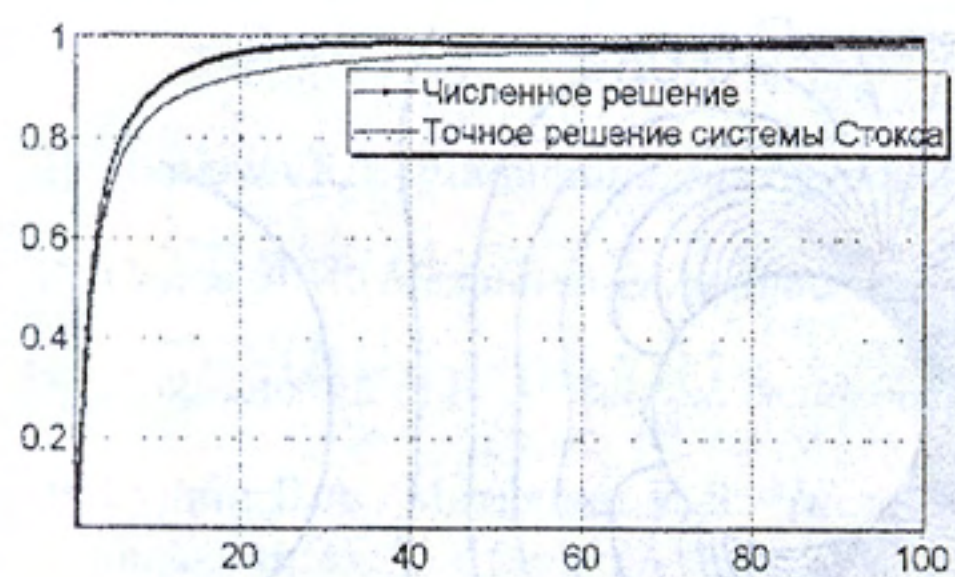


Рис. 1а

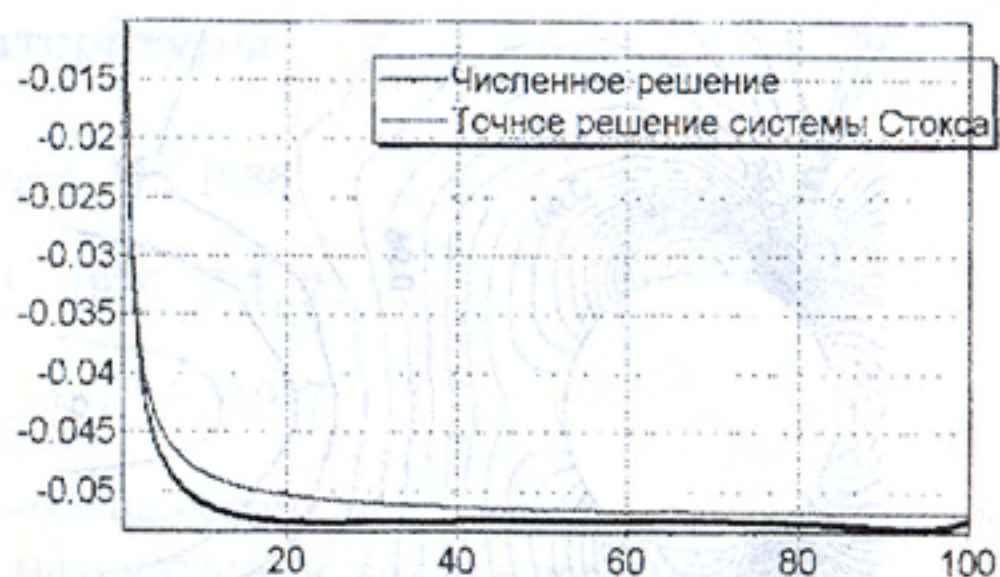


Рис. 1б

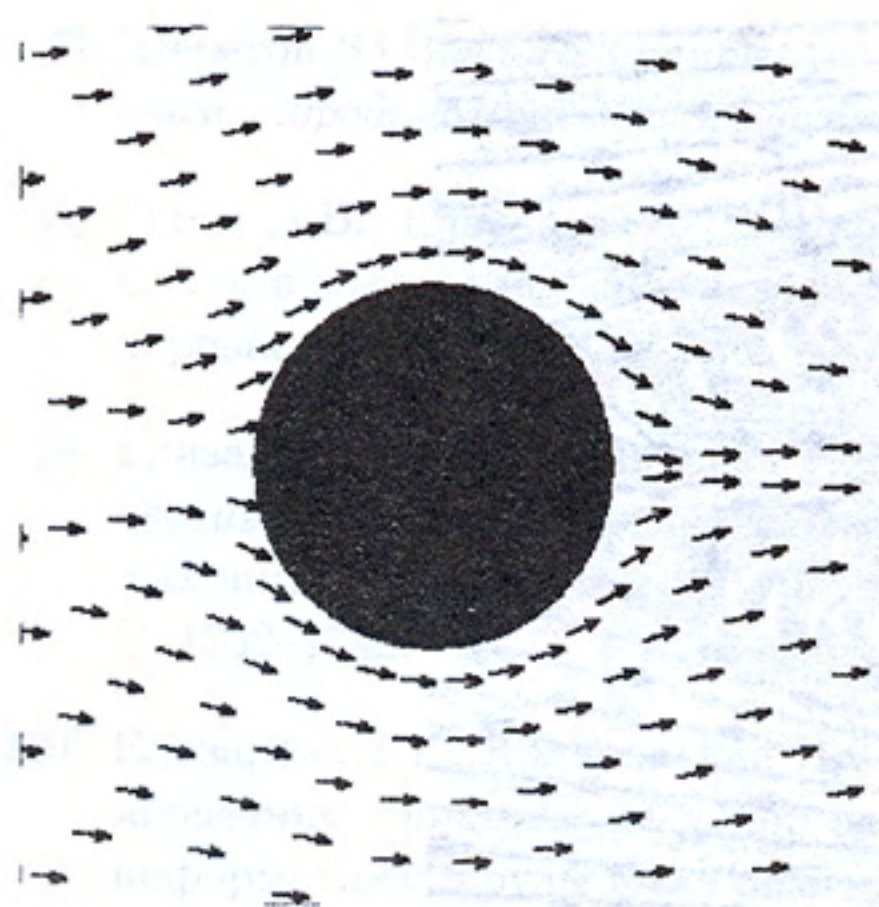


Рис. 2а

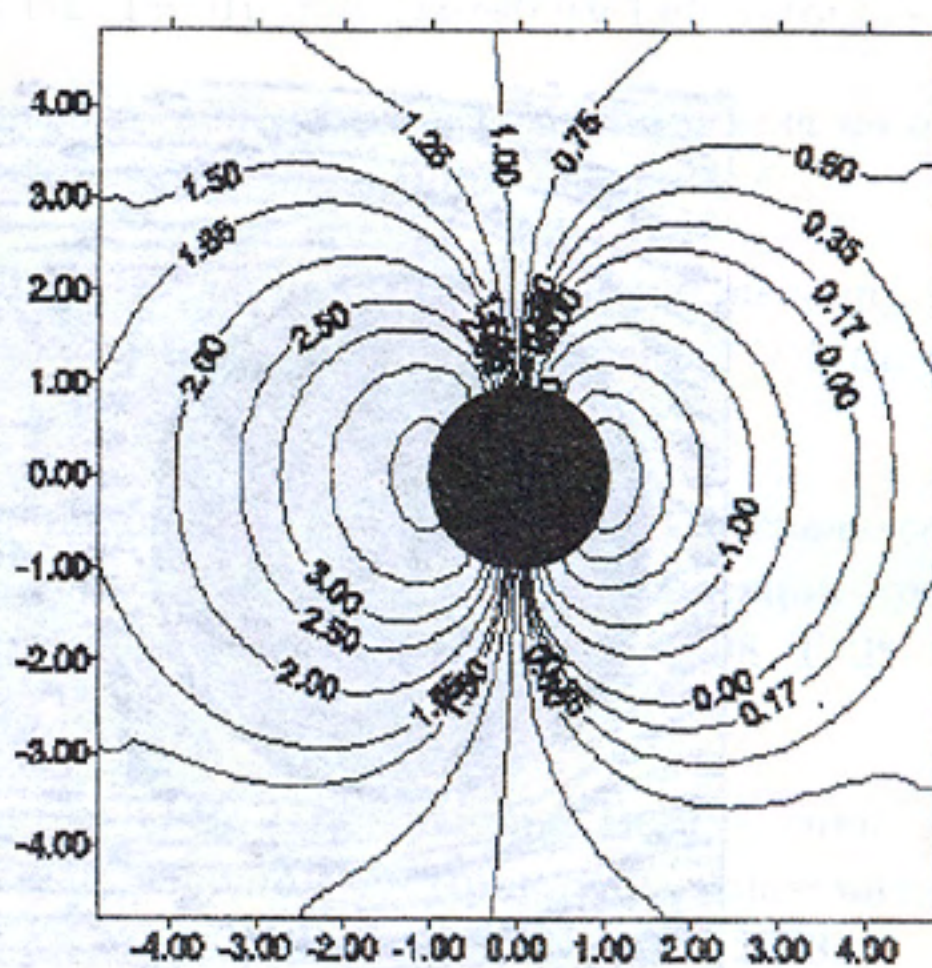


Рис. 2б

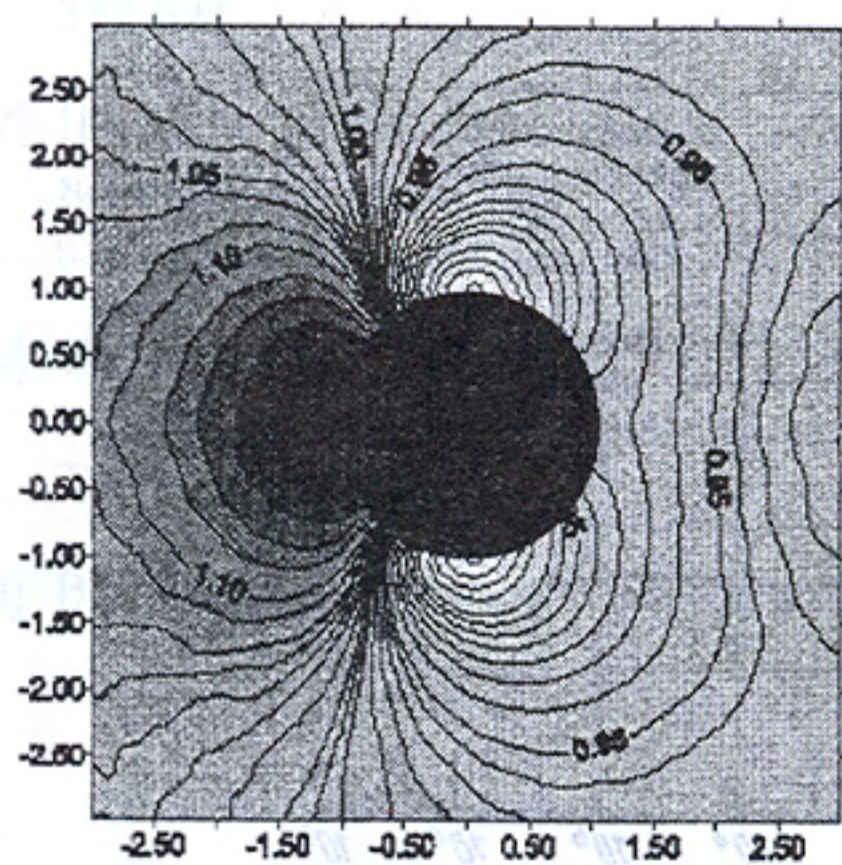


Рис. 3а

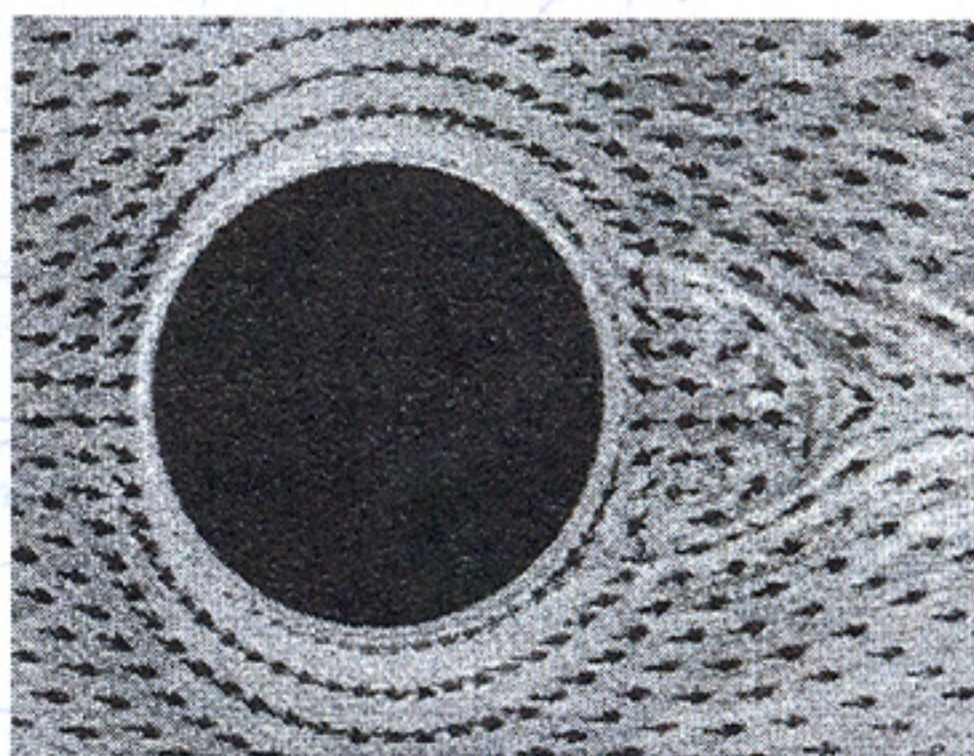


Рис. 3б

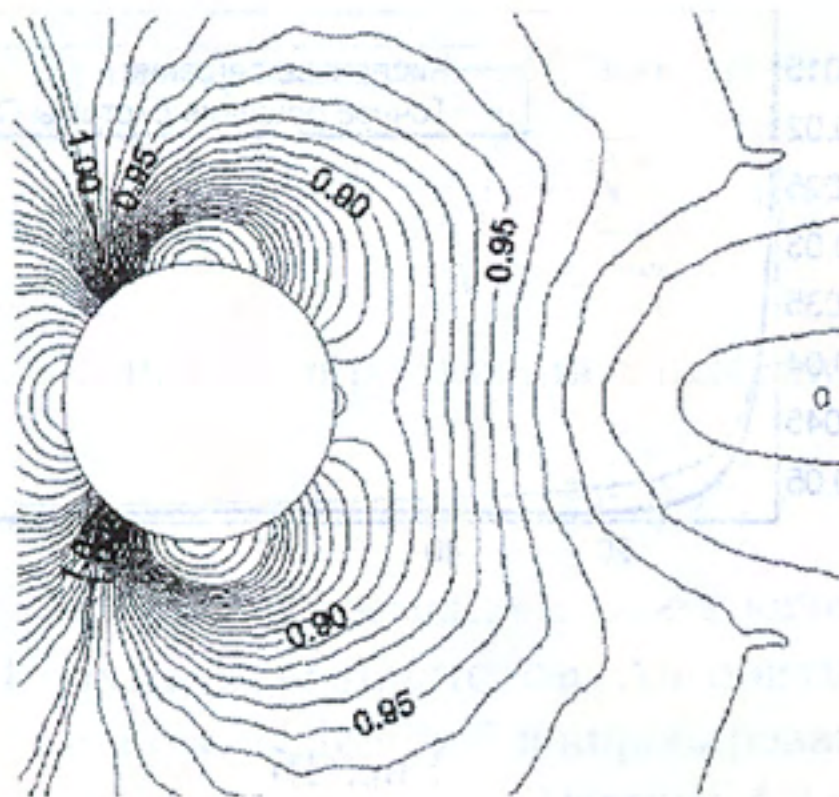


Рис. 4а

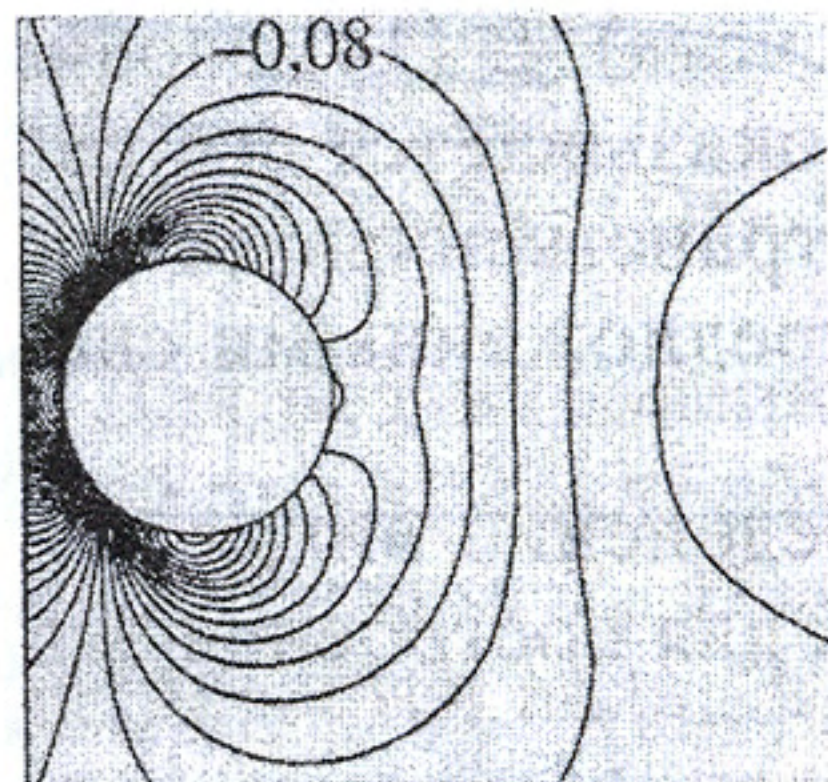


Рис. 4б

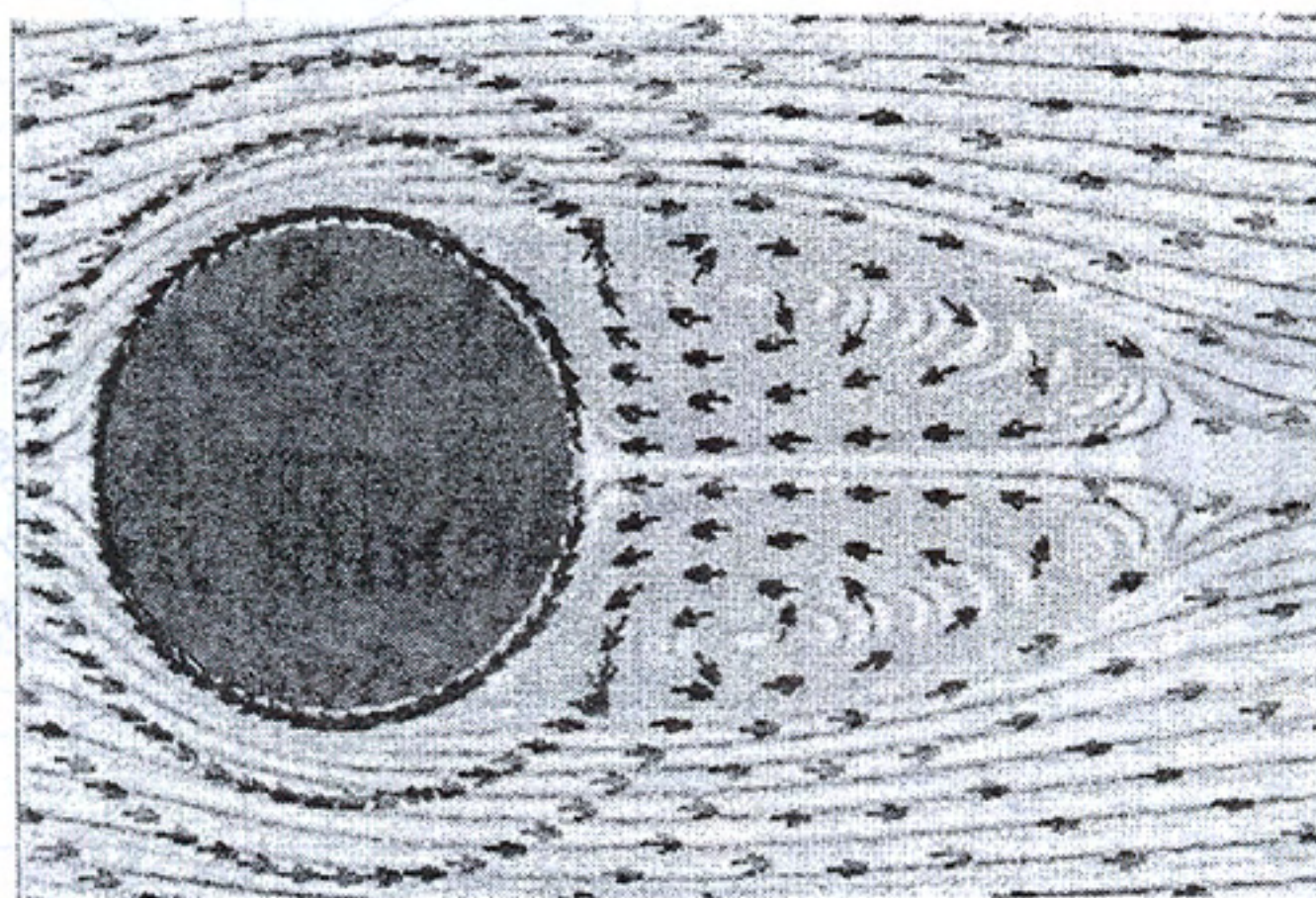


Рис. 5

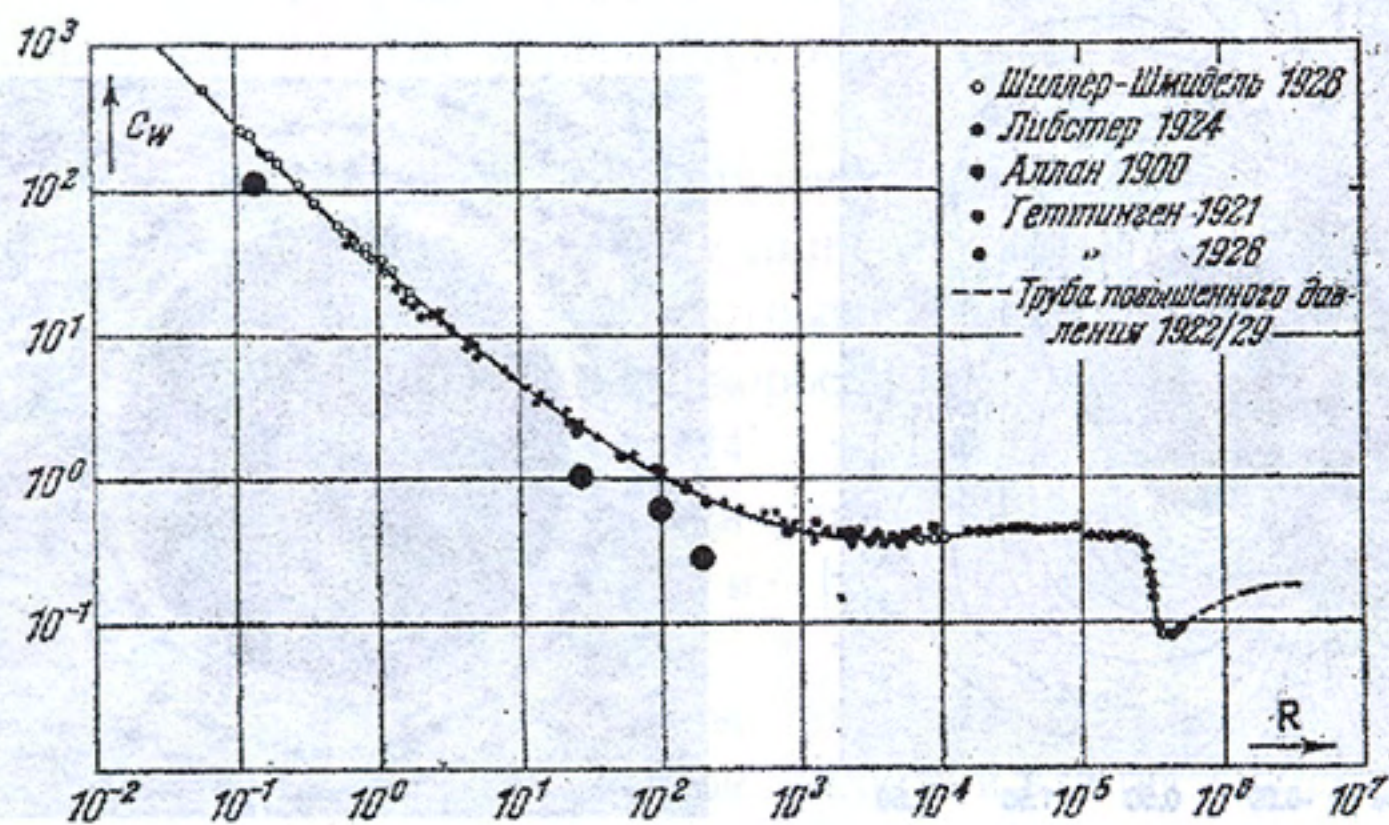


Рис. 6

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М., 1986.
- [2] Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. М., 1976. Т 1, 2.
- [3] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М., 1987.
- [4] Гущин В.А., Матюшин П.В. *Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 37, N 9. С. 1122–1137.
- [5] Emerson D.R., Barber R.W. *Analytical Solution of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Sphere*: Technical Report DL-TR-00-001. Daresbury Laboratory, 2000.
- [6] Emerson D.R., Barber R.W. *Numerical Simulation of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Confined Microsphere*: Technical Report DL-TR-01-001. Daresbury Laboratory, 2001.
- [7] Шеретов Ю.В. *Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений*. Тверь, 2000.
- [8] Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. *Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений* // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, N 7. С. 33–44.
- [9] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. *Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, N 10. С. 1732–1742.
- [10] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. *Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом* // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова. М., 2003. N 14. С. 85–118.
- [11] Fedoseyev A.I. *A Regularization Approach to Solving the Navier-Stokes Equations for Problems with Boundary Layer* // Comput. Fluid Dynamics J. 2001. Special Number. P. 317–324.
- [12] Шеретов Ю.В. *Анализ задачи об обтекании шара для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2003. С. 177–186.
- [13] Семёнов М.В., Шеретов Ю.В. *Численное моделирование медленных течений газа в окрестности шара* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2004.
- [14] Ван-Дайк М. *Альбом течений жидкости и газа*. М., 1986.