УДК 517.8

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

В дилатонной гравитационной модели найдены и исследованы стационарные решения шварцшильдовского типа (центрально-симметричные решения в пустоте). В пределе слабого гравитационного поля определены параметры квазиэллиптических орбит пробных частиц.

In the dilaton gravitational model stationary Schwarzschild type solutions (centrally symmetrical solutions in vacuum) are obtained and investigated. Parameters of quasielliptic orbits of test particles are determined in the limit of weak gravitational field.

Рассмотрим дилатонную гравитационную модель [1, 2], которая является следствием теории струн в низкоэнергетическом пределе. Уравнения эволюции этой модели

$$R_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} = 0, \qquad R + 4(\nabla\phi)^2 = 0. \tag{1}$$

получены с помощью вариации действия [1] относительно гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ и скалярного поля дилатонов ϕ. Здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи $n+1$ - мерного псевдориманого многообразия (пространства-времени) $\mathcal{M}_{1,n}$, $R = R^\mu_\mu$ — скалярная кривизна.

Для системы уравнений (1) ищем стационарные решения шварцшильдовского типа, то есть центрально - симметричные решения в пустоте. С этой целью рассматриваем сферически симметричное псевдориманово многообразие $\mathcal{M}_{1,n}$ с метрикой:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\alpha(r)}dt^2 - e^{2\beta(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2,\\ d\Omega^2 &= d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \cos^2\theta_1 \cdot \dots \cdot \cos^2\theta_{n-2} d\theta_{n-1}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь t — временная, r — радиальная, θ_k — угловые координаты.

Подставляем метрику (2) в систему уравнений (1). При этом ненулевые компоненты тензора Риччи имеют следующий вид:

$$R_{00} = e^{2\alpha-2\beta}[\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta' + (n-1)\alpha'/r], \quad R_{11} = -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + (n-1)\beta'/r,$$
$$R_{22} = e^{-2\beta}[\beta' r - \alpha' r - n + 2] + n - 2, \qquad R^3_3 = \dots = R^n_n = R^2_2.$$

В итоге система (1) сводится к следующим четырем нетривиальным уравнениям

$$\begin{aligned} &\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta' + (n-1)\alpha'/r = 2\alpha'\phi',\\ &\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta' - (n-1)\beta'/r = 2\phi'' - 2\beta'\phi',\\ &\beta' - \alpha' + (n-2)(e^{2\beta} - 1)/r + 2\phi' = 0,\\ &\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta' + (n-1)[(\alpha' - \beta')r + \tfrac{1}{2}(n-2)(1 - e^{2\beta})]/r^2 = 2\phi'^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя в первое уравнение системы (3) выражение для ϕ', полученное из третьего уравнения находим, что

$$-(n-2)e^{2\beta} = r\alpha''/\alpha' + 1.$$

Рассматривая линейную комбинацию первого, второго и последнего уравнений системы (3), а также пользуясь выражением для α', полученным из третьего уравнения, приходим к следующему соотношению:

$$-(n-2)e^{2\beta} = r\phi''/\phi' + 1.$$

Сравнивая два последних выражения, получаем равенство

$$\phi' = Q\alpha', \tag{4}$$

где Q — произвольная константа.

При $n \geq 3$ решение системы (3) может быть найдено в параметрическом виде с использованием параметра $\gamma = r\alpha'$ [3]

$$\begin{gathered} e^{2\alpha} = e^{2\alpha_0}\left|\frac{\gamma-\gamma_+}{\gamma-\gamma_-}\right|^{1/K}, \quad e^{2\beta} = \left(1-\frac{\gamma}{\gamma_+}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\gamma_-}\right), \\ r = r_0\frac{|\gamma-\gamma_+|^{A_+}|\gamma-\gamma_-|^{A_-}}{|\gamma|^{1/(n-2)}}, \quad \phi = Q\alpha(r) + \phi_0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$K = \sqrt{1-\frac{4Q(1-Q)}{n-1}}, \quad \gamma_\pm = (n-1)\frac{1-2Q\pm K}{4Q(1-Q)}, \quad A_\pm = \frac{1}{2(n-2)}\left(1\pm\frac{2Q-1}{K}\right).$$

Семейство решений (5) обобщает известные решения Шварцшильда для $n+1$-мерной эйнштейновской гравитации

$$ds^2 = \left[1-(r_g/r)^{n-2}\right]dt^2 - \left[1-(r_g/r)^{n-2}\right]^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{6}$$

Уравнения дилатонной гравитации (1) переходят в уравнения Эйнштейна в пустоте $R_{\mu\nu} = 0$ в случае $\phi = \text{const}$. В силу равенства (4) этот случай реализуется при $Q = 0$. Действительно, в пределе $Q \to 0$ решение (5) переходит в выражение (6) [3], принимающее при $n = 3$ вид классического решения Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 d\theta_2{}^2). \tag{7}$$

Но, в отличие от решений Шварцшильда, которые являются однопараметрическим семейством с параметром r_g (гравитационным радиусом), решения (5) образуют двупараметрическое семейство в классе метрик (2). Параметр r_0 является аналогом гравитационного радиуса r_g, а дополнительный параметр Q характеризует степень интенсивности дилатонного поля в данном решении. Решения, описывающие черную дыру, имеют место только при $Q = 0$, $\phi = \text{const}$ [3].

В работе [3] показано, что решения (5) имеют физический смысл лишь в области $0 < \gamma < \gamma_+(Q)$ на плоскости параметров $Q\gamma$. Это следует, в частности, из анализа геодезических (см. ниже).

Для анализа наблюдательных проявлений данной дилатонной модели и решений шварцшильдовского типа (5) рассмотрим более подробно предел $r \to \infty$, называемый *ниже ньютоновским пределом, так как он отвечает слабому гравитационному полю.*

Предел $r \to \infty$ эквивалентен $\gamma \to +0$, так как из соотношения (5) (выражение для r) следует, что

$$\lim_{\gamma\to+0} r = \lim_{\gamma\to+0} r_0 \frac{|\gamma_+|^{A_+}|\gamma_-|^{A_-}}{|\gamma|^{1/(n-2)}} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{r_1}{|\gamma|^{1/(n-2)}} = \infty,$$

где $r_1 = r_0|\gamma_+|^{A_+}|\gamma_-|^{A_-}$. Более детальный анализ функции $r(\gamma)$ при $\gamma \to +0$ приводит к разложению

$$\frac{r_1}{r} \simeq \gamma^{\frac{1}{n-2}}\left[1 - \frac{2(1-2Q)}{(n-2)^2}\gamma + 2\frac{(n-1)^2 - n(3n-4)\,Q(1-Q)}{(n-2)^4(n-1)}\gamma^2\right]. \tag{8}$$

Отсюда следует, что в ведущем порядке по малому параметру r_1/r имеет место равенство $\gamma \simeq (r_1/r)^{n-2}$. После его подстановки в решение (5) с учетом соотношений

$$\gamma_+\cdot\gamma_- = \frac{(n-1)(n-2)}{4Q(Q-1)},\quad \gamma_+ + \gamma_- = \frac{(n-1)(1-2Q)}{2Q(1-Q)}$$

получим в пределе $\gamma \to +0$ следующие выражения для метрических коэффициентов $e^{2\alpha}$ и $e^{2\beta}$:

$$e^{2\alpha} \simeq C\left[1 - \frac{2}{n-2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n-2}\right],\quad e^{2\beta} \simeq 1 + \frac{2(1-2Q)}{n-2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n-2} \tag{9}$$

Как видим, полученные решения (5) в физической области являются асимтотически плоскими в пределе $r \to \infty$, отвечающем слабому гравитационному полю, и переходят в шварцшильдовское решение (6) при $Q = 0$. Сравнение выражений (9) и (6) показывает, что параметр, играющий роль гравитационного радиуса в дилатонном решении (5) имеет вид

$$r_g = r_1\left(\frac{2}{n-2}\right)^{1/(n-2)}. \tag{10}$$

С учетом последнего равенства используем r_g вместо r_1 и выразим из ряда (8) параметр γ через малый параметр $\rho = r_g/r$:

$$\gamma \simeq \frac{1}{2}\rho + \frac{1-2Q}{2}\rho^2 + \frac{4-17Q(1-Q)}{8}\rho^3,\qquad \rho \equiv \frac{r_g}{r}. \tag{11}$$

Здесь и ниже мы полагаем, что $n = 3$ — пространство имеет физическую размерность.

Подставляя выражение (8) в формулы (5) для метрических коэффициентов, получим следующие разложения в ньютоновском пределе $r \to \infty$ или $\rho \to 0$:

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha} &= 1 + \rho + (1-Q)\rho^2 + (1-Q)\big(1 - \tfrac{13}{12}Q\big)\rho^3,\\ e^{-2\beta} &= 1 - (1-2Q)\,\rho + \tfrac{1}{2}Q(1-Q)\rho^2 + \tfrac{1}{4}Q(1-Q)(1-2Q)\rho^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти разложения необходимы для анализа одного из важнейших наблюдательных проявлений рассматриваемой гравитационной модели — смещения перигелия (периастрия).

Рассмотрим траектории пробных частиц в гравитационном поле (5), подобные траекториям движения планет в поле тяготения Солнца. В теории Ньютона такие орбиты — эллипсы, но в общей теории относительности Эйнштейна для решения Шварцшильда (7) они являются квазиэллиптическими и характеризуются поворотом (сдвигом) перигелия за 1 оборот на угол [4]

$$\Delta\theta \simeq \frac{3\pi r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \tag{13}$$

Здесь $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус источника тяготения (Солнца), a — большая полуось эллипса и ϵ — его эксцентриситет. Скорость света c ниже положим равной 1.

Траекториями движения пробных частиц в гравитационном поле (5) являются времениподобные геодезические ($ds^2 > 0$) (предполагаем, что данные частицы не взаимодействуют непосредственно с дилатонным полем ϕ). Рассмотрим движение пробных частиц в плоскости $\theta_1 = \cdots = \theta_{n-2} = 0$, в которой положение точки (частицы) в момент t определяют координаты r и $\theta \equiv \theta_{n-1}$. Уравнения соответствующих геодезических в случае метрики (2) имеют вид

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\alpha' \frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \alpha' e^{2\alpha-2\beta}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \beta'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + re^{-2\beta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \tag{16}$$

Анализ уравнения (15) показывает, что решения (5) описывают гравитационное притяжение при $\alpha' > 0$, то есть — в упомянутой выше физической области $\gamma > 0$ (напомним, что $\gamma = r\alpha'$). Области $\gamma < 0$ соответствует отталкивание.

Уравнения (14) и (16) после интегрирования приводят к следующим выражениям:

$$\frac{dt}{ds} = Ae^{-2\alpha}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{C_\theta}{r^2}. \tag{17}$$

Здесь $A = E/m$, $C_\theta = L/m$ — соответственно энергия и угловой момент на единицу массы частицы, которые являются сохраняющимися первыми интегралами системы.

Подставив равенства (17) в выражение для метрики (2)

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - e^{2\beta}dr^2 - r^2d\theta^2$$

в плоскости движения и, исключив переменную s, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{C_\theta^2}e^{-2\beta}\left(A^2e^{-2\alpha} - 1 - \frac{C_\theta^2}{r^2}\right), \tag{18}$$

определяющее траекторию пробной частицы. Анализ уравнения (18) показывает, что ее движение финитно, а орбита является квазиэллиптической в случае $A < 1$.

Будем предполагать, что гравитационное поле является слабым, то есть реализуется ньютоновский предел $r \to \infty$, в котором имеют место асимптотические разложения (12), а также неравенства

$$r \gg r_g, \qquad C_\theta \gg r_g, \qquad 1 - A \ll 1. \tag{19}$$

Используя асимптотические разложения (12) для $e^{-2\beta}$, $e^{-2\alpha}$ и обозначение $\rho = r_g/r$, перепишем уравнение (18) в виде

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\sqrt{f(\rho)}, \qquad f(\rho) = \frac{r_g^2}{C_\theta^2}\Big\{A^2 - 1 + \big[1 - 2Q(1-A^2)\big]\,\rho\Big\} + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + o(\rho^3), \quad (20)$$

$$B_2 = -1 + Q\left[A^2 - \frac{(1-Q)(1-A^2)}{2}\right]\frac{r_g^2}{C_\theta^2}, \quad B_3 = 1 - 2Q + Q(1-Q)\left[\frac{17A^2}{12} - \frac{(1-2Q)(1-A^2)}{4}\right]\frac{r_g^2}{C_\theta^2}.$$

Финитное движение является квазиэллиптическим, если уравнение $f(\rho) = 0$ имеет три положительных корня ρ_1, ρ_2, ρ_3, которые мы занумеруем в порядке возрастания. При выполнении условий (19) их значения определяются приближенными равенствами

$$\rho_1 + \rho_2 \simeq \frac{r_g^2}{C_\theta^2}, \qquad \rho_3 \simeq B_3^{-1}\left(1 - Q\frac{r_g^2}{C_\theta^2}\right)\frac{r_g^2}{C_\theta^2}. \qquad (21)$$

При этом величина ρ меняется в пределах $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$, а из неравенств (19) следует $\rho_1 < \rho_2 \ll \rho_3 \simeq (1-2Q)^{-1}$.

Сдвиг $\Delta\theta$ перигелия орбиты за 1 оборот определяется с помощью уравнения (20)

$$\Delta\theta = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - 2\pi = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{1}{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}}\left\{\Big[B_3(\rho_3-\rho)\Big]^{-1/2} - 1\right\}d\rho.$$

Вычисление интеграла с учетом равенств (21) и условий (19) приводит к следующему выражению в ведущем порядке малости по r_g^2/C_θ^2 и $(1-A^2)$:

$$\Delta\theta \simeq \frac{\pi(3-4Q)}{2}\frac{r_g^2}{C_\theta^2} = \frac{\pi(3-4Q)\,r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \qquad (22)$$

Здесь учтена связь параметров эллипса a и ϵ с ρ_1 и ρ_2:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{r_g}{\rho_1} + \frac{r_g}{\rho_2}\right) = \frac{r_g}{2}\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}, \qquad 1 - \epsilon^2 = 1 - \left(\frac{\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}}{\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}}\right)^2 = \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}.$$

Как видим, в дилатонной гравитационной модели важнейший наблюдательный параметр теории — сдвиг перигелия $\Delta\theta$ (22) — отличается множителем $1 - \frac{4}{3}Q$ от аналогичного выражения (13) в общей теории относительности.

Список литературы

[1] *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Effective field theory from quantized strings // Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316-326.

[2] *Воронцова Е.Г., Шаров Г.С.* Многомерные космологические решения фридмановского типа в дилатонной гравитации // Теоретич. и математич. физика. 2000. Т. 123. № 1. С. 163-176.

[3] *Vorontsova E.G., Sharov G.S.* Black hole vanishing inspired dilaton gravitational model // Proc. of XV Intern. Workshop QFTHEP 2000, P. 394-398; hep-th/0101004.

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц И.М.* Теория поля. М.: 1984.