УДК 517.8

РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

Миловидов А.Е., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Рассматривается замкнутая релятивистская струна в пространстве с нетривиальной геометрией, нагруженная точечной массой $m \to \infty$. Все движения такой системы описаны с помощью построенного ряда Фурье с нестандартным набором частот. Исследованы физические характеристики системы.

A closed relativistic string carrying a pointlike mass $m \to \infty$ in the space with nontrivial geometry is considered. All motions of this system are described by the Fourier series with the specific set of frequencies. Physical characteristics of the system are studied.

Замкнутая релятивистская струна с одной точечной массой m [1] представляет собой систему, гомеоморфную окружности с выделенной точкой, которая движется в многообразии $\mathcal{M} = R^{1,3} \times K$, в котором $R^{1,3}$ — $3+1$ — мерное пространство Минковского, а $K = S^1 \times \cdots \times S^1$ — тор размерности размерности $D-4$.

В работе [1] были получены уравнения движения

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{1}$$

и краевые условия

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{X}^\mu(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau,\sigma_i)}} + \gamma\big[X'^\mu(\tau^*,\sigma_2) - X'^\mu(\tau,\sigma_1)\big] = 0, \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

которые описывают движение рассматриваемой системы при выполнении налагаемых без потери общности условий ортонормальности

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0, \tag{3}$$

а также условий

$$\sigma_1(\tau) = 0, \qquad \sigma_2(\tau) = 2\pi. \tag{4}$$

Здесь $X^\mu(\tau,\sigma)$ — параметризация мировой поверхности струны, имеющей форму трубки, $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$, γ — натяжение струны, скалярный квадрат в формуле (3) определяется скалярным произведением $\langle x\, y\rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, причем метрический тензор $\eta_{\mu\nu}$ на многообразии $\mathcal{M}$ имеет тот же вид, что и в $R^{1,D-1}$: $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1;-1;\ldots;-1)$. Уравнения $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau,\sigma_i(\tau))$, $i=1,2$, описывают одинаковые траектории массивной точки струны. Эту траекторию могут определять два различных параметра τ и τ^*, связанные соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$.

Считаем, что координаты в $\mathcal{M}$, задающие тор K являются циклическими. Последнее означает, что точки с координатами x^k и $x^k + N\ell_k$, $N \in Z$ для этого многообразия отождествлены: $x^k = x^k + N\ell_k$. Поэтому условие замыкания, с необходимостью дополняющее систему уравнений (1)–(4) для замкнутой струны, в пространстве $\mathcal{M}$ имеет вид [1]

$$X^\mu(\tau^*, 2\pi) = X^\mu(\tau, 0) + \sum_k N_k \ell_k \delta_k^\mu, \tag{5}$$

где δ_k^μ — символ Кронекера.

В настоящей работе мы рассматриваем случай $m \to \infty$, отвечающей струне с бесконечно тяжелой массивной точкой. Краевое условие (2) в этом случае примет вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\dot X^\mu(\tau, \sigma_i)}{\sqrt{\dot X^2(\tau, \sigma_i)}} = 0.$$

Это условие эквивалентно следующему

$$\frac{\dot X^\mu(\tau, \sigma_i)}{\sqrt{\dot X^2(\tau, \sigma_i)}} = U^\mu = \mathrm{const}, \qquad U^2 = 1, \qquad i = 1, 2. \tag{6}$$

По физическому смыслу U^μ — скорость массивной точки струны. Равенства (6) означают, что точка на замкнутой струне, наделенная бесконечно тяжелой массой, движется прямолинейно с постоянной скороостью U^μ.

Общее решение уравнения движения релятивистской струны записывается в следующем виде

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}[\Psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \Psi_-^\mu(\tau - \sigma)]. \tag{7}$$

При этом

$$\Psi_+'^2 = \Psi_-'^2 = 0 \tag{8}$$

в силу условий ортонормальности (3).

Краевое условие (6) в обозначениях (7) запишется в виде

$$\frac{\Psi_+'^\mu(\tau + \sigma_i) + \Psi_-'^\mu(\tau - \sigma_i)}{\sqrt{2\langle\Psi_+'(\tau + \sigma_i), \Psi_-'(\tau - \sigma_i)\rangle}} = U^\mu, \qquad i = 1, 2. \tag{9}$$

Домножив скалярно выражение (9) на $\Psi_\pm'^\mu(\tau \pm \sigma_i)$, получим

$$\sqrt{\frac{1}{2}\langle\Psi_+'(\tau + \sigma_i), \Psi_-'(\tau - \sigma_i)\rangle} = \sqrt{\dot X^2(\tau, \sigma_i)} = \langle U, \Psi_\pm'(\tau \pm \sigma_i)\rangle, \qquad i = 1, 2.$$

Подставив эти соотношения обратно в (9), находим следующие условия

$$\Psi_\pm'^\mu(\tau) = -\Psi_\mp'^\mu(\tau) + 2\langle U, \Psi_\mp'^\mu(\tau)\rangle, \tag{10}$$

$$\Psi_\pm'^\mu(\tau \pm 2\pi) = -\Psi_\mp'^\mu(\tau \mp 2\pi) + 2\langle U, \Psi_\mp'^\mu(\tau \mp 2\pi)\rangle. \tag{11}$$

Таким образом нелинейные (относительно X^μ) краевые условия (6) сведены к линейным (относительно $\Psi_\pm'^\mu$) соотношениям (10), (11). Эти условия позволяют определить мировую поверхность замкнутой релятивистской струны с бесконечно тяжелой точечной массой при заданных начальной скорости и начальном положении струны.

Если выражение (10) подставить в (11), то получим условие 4π периодичности для для функций $\Psi'^{\mu}_{\pm}$

$$\Psi'^{\mu}_{\pm}(\xi + 4\pi) = \Psi'^{\mu}_{\pm}(\xi). \tag{12}$$

Условие (12) позволяет представить функции $\Psi'^{\mu}_{\pm}(\xi)$ в виде рядов Фурье

$$\Psi'^{\mu}_{\pm}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi^{\mu}_{n\pm} e^{-in\xi/2}. \tag{13}$$

Все векторы φ^{μ}_{n+} разложим на составляющие, пропорциональные единичному времениподобному вектору $e^{\mu}_0 \equiv U^{\mu}$ и ортонормальную составляющую β^{μ}_n. Таким образом

$$\varphi^{\mu}_{n+} = \alpha_n e^{\mu}_0 + \beta^{\mu}_n, \quad \langle \beta_n, e_0 \rangle = 0, \quad e^{\mu}_0 \equiv U^{\mu},\, n \in Z.$$

Подставив эти соотношения в условия (10), (11), найдем выражения для φ^{μ}_{n-}

$$\varphi^{\mu}_{n-} = \alpha_n e^{\mu}_0 - \beta^{\mu}_n.$$

Следовательно, ряды Фурье (13) имеют вид

$$\Psi'^{\mu}_{\pm}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n e^{\mu}_0 \pm \beta^{\mu}_n)\, e^{-in\xi/2}. \tag{14}$$

Функции $\Psi'^{\mu}_{\pm}$ вещественны, поэтому коэффициенты α_n и β^{μ}_n удовлетворяют условиям

$$\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}, \quad \beta^{\mu}_{-n} = \overline{\beta^{\mu}_n}.$$

Для функций $\Psi'^{\mu}_{\pm}$ кроме того должны выполняться условия (8), следующие из условий ортонормальности (3). Так как выражения для Ψ'^2_{+}, Ψ'^2_{-} совпадают, то условия (8) сводятся к равенству

$$\Psi'^2_{\pm} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n e^{-in\xi/2} = 0.$$

Все коэффициенты L_n этого ряда Фурье равны нулю

$$L_0 \equiv \alpha_0^2 + \beta_0^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \alpha_{-k} + \langle \beta_k, \beta_{-k} \rangle) = 0, \tag{15}$$

$$L_n \equiv 2\alpha_0 \alpha_n + 2\langle \beta_0 \beta_n \rangle + \sum_{k \neq 0, n} (\alpha_k \alpha_{n-k} + \langle \beta_k \beta_{n-k} \rangle) = 0. \tag{16}$$

Выражения (14) с помощью формулы (6) определяют мировую поверхность замкнутой релятивистской струны с бесконечно тяжелой точечной массой

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x^{\mu}_0 + \alpha_0 e^{\mu}_0 \tau + \beta^{\mu}_0 \sigma + \sum_{n \neq 0} \frac{2i}{n} \left[\alpha_n e^{\mu}_0 \cos\frac{n\sigma}{2} - i\beta^{\mu}_n \sin\frac{n\sigma}{2} \right] e^{-in\tau/2}. \tag{17}$$

Данный ряд отличается от стандартного ряда Фурье для замкнутой струны с $m = 0$ [2] наличием слагаемых с полуцелыми частотами $\omega_n = n/2$.

Коэффициенты ряда (17) связаны не только соотношениями (15), (16), по условиями замыкания (5). Подставляя выражение (17) в (5), имеем

$$\beta_0^\mu = \frac{1}{2\pi}\sum_k N_k \ell_k \delta_k^\mu, \tag{18}$$

$$\alpha_0 e_0^\mu(\tau^* - \tau) + 2i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_0}{n}\left[(-1)^n e^{-in\tau^*/2} - e^{-in\tau/2}\right] e_0^\mu = 0. \tag{19}$$

Важнейшей физической характеристикой системы является ее импульс, который для произвольного состояния замкнутой релятивистской струны определяется с помощью интеграла

$$P^\mu = \oint\limits_c p^\mu(\tau,\sigma)\,d\sigma + P_m^\mu, \qquad p^\mu(\tau,\sigma) = \gamma\frac{(\dot X, X')X'^\mu - X'^2\dot X^\mu}{[(\dot X, X')^2 - \dot X^2 X'^2]^{1/2}}.$$

Здесь c — любой замкнутый контур, охватывающий трубкообразную мировую поверхность струны, P_m^μ — импульс массивной точки струны.

При выполнении условий ортонормальности (3) выражение для плотности импульса p существенно упрощается: $p^\mu(\tau,\sigma) = \gamma\dot X^\mu(\tau,\sigma)$.

Линии $\tau = \mathrm{const}$ на мировой поверхности (17) не замкнуты в общем случае. Поэтому ограничимся только случаем $\tau = \tau^*$. При этом выражение для импульса примет вид

$$P^\mu(\tau) = \gamma\left[2\pi\alpha_0 e_0^\mu + i\sum_{n\neq 0}\beta_n^\mu((-1)^n - 1)e^{-in\tau/2}\right] + P_m^\mu.$$

Как видим, импульс релятивистской струны без учета вклада бесконечно тяжелой массивной точки не является постоянной величиной.

Необходимым этапом процедуры квантования релятивистской струны [2] является вычисление скобок Пуассона

$$\{F,G\} = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\delta F}{\delta\dot X^\mu}\frac{\delta G}{\delta X_\mu} - \frac{\delta F}{\delta X^\mu}\frac{\delta G}{\delta\dot X_\mu}\right)d\sigma$$

коэффициентов ряда Фурье (17). С помощью скалярного произведения $(f,g) = \int\limits_0^{2\pi} fg\,d\sigma$ представим α_n и β_n^μ в виде функционалов

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}e_{0\mu}\left(\dot X^\mu - i\frac{n}{2}X^\mu, \cos\frac{n\sigma}{2}\right)e^{in\tau/2},$$

$$\beta_n^\mu = (\delta_\nu^\mu - e_0^\mu e_{0\nu})\frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{2}X^\mu + i\dot X^\nu, \sin\frac{n\sigma}{2}\right)e^{in\tau/2} + \frac{(-1)^n}{2\pi}\sum_k N_k\ell_k\delta_k^\mu e^{in\tau/2}$$

и получим следующие выражения для скобок Пуассона коэффициентов α_m и β_m^μ:

$$\{\alpha_m,\alpha_n\} = \frac{im}{4\pi\gamma}\delta_{-n}^m, \qquad \{\beta_m^\mu,\beta_n^\nu\} = \frac{im}{4\pi\gamma}(\eta^{\mu\nu} - e_0^\mu e_0^\nu)\,\delta_{-n}^m, \qquad \{\alpha_m,\beta_n^\mu\} = 0.$$

Список литературы

[1] *Миловидов А.Е., Шаров Г.С.* Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией // Теоретич. и математич. физика. 2004. Т. 141. № 3. С. 422 - 431, 2005. Т. 142. № 1. С. 72 - 82

[2] *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.