УДК 519.6

К ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ НЕОБХОДИМОСТИ ДОСТИЖЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ ЦЕЛИ

Р.Н. ГОРДЕЕВ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Аннотация. В статье [1] обобщаются модели нечеткого программирования, рассматриваемые в [2, 3], на случай, когда левая и правая части в модели цели/ограничений связаны нечетким бинарным отношением, а нечеткая мера в модели задачи является мерой возможности. В настоящей работе мы строим модель для описания задач этого класса в контексте модели возможность-необходимость для меры необходимости.

The paper continues [1, 2, 3]. Here we consider the fuzzy programming problem in case when binding binary relations between left and right parts of a model are fuzzy and fuzzy measure of a model is a measure of necessity.

1. Введение

В статье, в рамках возможностного подхода, обосновывается метод решения задачи максимизации необходимости выполнения нечеткой цели. Формализация метода выполнена с использованием исчисления возможностей в классе непрерывных распределений возможностей, по аналогии с [2]. Таким образом статья продолжает работу [1] и рассматривает случай меры необходимости. Хотя мера необходимости является производной по отношению к мере возможности, тем не менее она требует столь же тщательного исследования, чему и посвящена настоящая работа. В данной статье мы будем придерживаться уже сложившейся терминологии. В деталях основные понятия, используемые в статье можно посмотреть, например в [3].

2. Базовые понятия и постановка задачи

Следуя [3], введем необходимые определения и понятия.

Пусть Γ есть множество элементарных исходов, обозначаемых далее $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ - множество всех подмножеств Γ.

Определение 1. Мерой возможности называется функция множеств $\pi : P(\Gamma) \to E^1$, обладающая свойствами:

$$1)\pi\{\varnothing\} = 0, \qquad 2)\pi\{\bigcup_{i\in I} A_i\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I конечного, счетного и несчетного и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Замечание 1. Здесь и далее E^1 - числовая прямая.

Тройка $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ называется возможностным пространством.

Определение 2. Мерой необходимости называется функция множеств $\nu : P(\Gamma) \to E^1$, обладающая свойствами:

$$1)\nu\{\varnothing\} = 0, \qquad 2)\nu\{\bigcap_{i\in I} A_i\} = \inf_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I конечного, счетного и несчетного и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Замечание 2. Отметим одно важное свойство, связывающее меры возможности и необходимости, $\nu\{A\} = 1 - \pi\{A^C\}$, где A^C есть дополнение A.

Определение 3. Возможностной (нечеткой) переменной (величиной) называется отображение $Z : \Gamma \to E^1$. Распределением возможных значений переменной Z называется функция $\mu_Z : E^1 \to [0,1]$, определяемая по правилу:

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z\}\ \forall z \in E^1.$$

$\mu_Z(z)$ есть возможность того, что переменная Z может принять значение z.

Определение 4. Носителем возможностной переменной Z называется множество $Supp(Z) = \{z \in E^1 : \mu_Z(z) > 0\}$.

Определение 5. Возможностным (нечетким) отношением называется отображение $\tilde{R} : \Gamma \to E^1 \times E^1$, где $E^1 \times E^1$ есть декартово произведение. Распределением возможностных значений отношения $\tilde{R}$ называется функция $\mu_{\tilde{R}} : E^1 \times E^1 \to [0,1]$, определяемая по правилу:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \tilde{O}(\gamma) = (x,y)\},\ \forall x,y \in E^1,$$

$\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ есть возможность того, что x и y находятся в отношении $\tilde{R}$.

Определение 6. Дополнением нечеткого отношения $\tilde{R}$ (обозначим его $\tilde{R}^C$) назовем такое отношение, что

$$\forall\ (x,y) \in E^1 \times E^1 : \mu_{\tilde{R}^C}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

Задача возможностной оптимизации, которую мы будем исследовать, в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\tau\{g_0(x,\gamma)\tilde{R}_0(\gamma)b_0(\gamma)\} \to \sup_x \tag{1}$$

$$\begin{cases} \tau\{g_k(x,\gamma)\tilde{R}_k(\gamma)b_0(\gamma)\} \geq \alpha_k,\ k = 1,\ldots,m, \\ x \in X, \end{cases} \tag{2}$$

где $X \subset E^n$, $\tilde{R}_k(\gamma)$ - нечеткое бинарное отношение, τ - нечеткая мера, $g_k(x,\gamma)$ - нечеткие функции $g_k(\cdot,\cdot) : E^n \times \Gamma \to E^1$, Γ - элемент возможностного пространства $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$, E^n- n- мерное евклидово пространство [2]. В предыдущей работе [1] получен непрямой метод решения задачи (1),(2), основанный на ее сведении к эквивалентному детерминированному аналогу, когда τ есть возможности π . В настоящей статье мы продолжаем наше исследование в случае, когда τ является мерой необходимости ν.

3. Основные результаты

Для дальнейшего исследования нам необходимо доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть возможностная величина $Z(\gamma)$ связана нечетким отношением $\tilde{R}(\gamma)$ с элементом $x \in E^1$. Кроме того, пусть $Z(\gamma)$ и $\tilde{R}(\gamma)$ являются минисвязанными, тогда степень необходимости, с которой возможностная величина $Z(\gamma)$ находится в нечетком отношении с элементом x определяется следующим образом:*

$$\rho_{\tilde{R}}(Z,x) = \nu\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z, \tilde{R}(\gamma) = (z,x)\} \tag{3}$$
$$= \inf_{z\in E^1} \max\{1 - \mu_Z(z), \mu_{\tilde{R}}(z,x)\}.$$

Доказательство. Согласно свойству двойственности мер возможности и необходимости и определению дополнения нечеткого отношения имеем

$$\nu\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z, \tilde{R}(\gamma) = (z,x)\} = 1 - \pi\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z, \tilde{R}^C(\gamma) = (z,x)\}$$
$$= 1 - \pi\{\bigcup_{z\in E^1}(\{Z(\gamma) = z\} \bigcap \{\tilde{R}^C(\gamma) = (z,x)\})\}$$
$$= 1 - \sup_{z\in E^1} \pi\{[\{Z(\gamma) = z\} \bigcap \{\tilde{R}^C(\gamma) = (z,x)\}]\}.$$

Далее, поскольку $Z(\gamma)$ и $\tilde{R}(\gamma)$ являются минисвязанными согласно [2] имеем

$$\nu\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z, \tilde{R}(\gamma) = (z,x)\} =$$
$$= 1 - \sup_{z\in E^1} \pi\{[\{Z(\gamma) = z\} \bigcap \{\tilde{R}^C(\gamma) = (z,x)\}]\} =$$
$$= 1 - \sup_{z\in E^1} \min\{\mu_Z(z), 1 - \mu_{\tilde{R}}(z,x)\} =$$
$$= \inf_{z\in E^1} \max\{1 - \mu_Z(z), \mu_{\tilde{R}}(z,x)\}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть возможностные величины $Z(\gamma)$ и $Y(\gamma)$ связаны нечетким отношением $\tilde{R}(\gamma)$. Кроме того положим, что они являются минисвязанными. Тогда степень необходимости с которой две возможностные величины связаны нечетким отношением равна*

$$\hat{\rho}_{\tilde{R}}(Y,Z) = \nu\{\gamma \in \Gamma : Y(\gamma) = y, Z(\gamma) = z, \tilde{R}(\gamma) = (y,z)\} \tag{4}$$
$$= \inf_{y,z\in E^1} \max\{1 - \mu_Y(y), 1 - \mu_Z(z), \mu_{\tilde{R}}(y,z)\}.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1. □

Таким образом формула (4) позволяет вычислить степень необходимости с которой две возможностные величины связаны нечетким бинарным отношением $\tilde{R}(\gamma)$.

Рассмотрим задачу нечеткой оптимизации (1) в случае, когда нечеткая мера является мерой необходимости. Имеем следующую задачу

$$\nu\{g_0(x,\gamma)\tilde{R}_0(\gamma)b_0(\gamma)\} \to \sup_{x\in X}. \tag{5}$$

Построим для нее детерминированный эквивалентный аналог.

Теорема 1. *Пусть в задаче (5)* $g_0(x,\gamma) = \varphi_0(x, p_1(\gamma), \ldots, p_l(\gamma))$, *возможностные переменные* $p_1(\gamma), \ldots, p_l(\gamma), b_0(\gamma)$ *и нечеткое отношение* $\tilde{R}_0(\gamma)$ *являются минисвязанными. Тогда задача (5) эквивалентна задаче*

$$x_0 \to \sup, \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_0 \geq \mu_{p_i}(u_i),\ i = 1, \ldots, l, \\ x_0 \geq 1 - \mu_{\tilde{R}_0}(t, m), \\ x_0 \geq \mu_{b_0}(m), \\ \varphi(x, u_1, \ldots, u_l) = t, \\ (x_0, x, u, t, m,) \in [0,1] \times X \times E^{l+2}, \end{cases} \tag{7}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_l)$.

Доказательство. Доказательство проведем по аналогии с [1]. Из определения распределения возможностей, вида $g_0(x,\gamma)$ функции и формулы (4) следует, что целевая функция задачи (5) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \nu\{g_0(x,\gamma)\tilde{R}_0(\gamma)b_0(\gamma)\} = 1 - \pi\{g_0(x,\gamma)\tilde{R}_0^C(\gamma)b_0(\gamma)\} = \\ = 1 - \sup_{t,m}\{\mu_{g_0}(x,t) \wedge (1 - \mu_{\tilde{R}_0}(t,m)) \wedge \mu_{b_0}(m)\} \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда с учетом теоремы 3 из [1] имеем следующую задачу, эквивалентную (5)

$$\sup_{t,m}\{ \sup_{(u_1,\ldots,u_l):\varphi_0(x,u_1,\ldots,u_l)=t} \min_i\{\mu_{p_i}(u_i)\} \wedge (1 - \mu_{\tilde{R}_0}(t,m)) \wedge \mu_{b_0}(m)\} \to \inf_{x \in X} \tag{9}$$

Путем введения дополнительной переменной $x_0 \in [0,1]$, задача сводится к виду (6),(7). Теорема доказана. □

Теперь перейдем к анализу системы ограничений задачи (1),(2) при $\tau = \nu$. Имеем следующую систему построчных ограничений по необходимости

$$\begin{cases} \nu\{g_k(x,\gamma)\tilde{R}_k(\gamma)b_k(\gamma) \geq \alpha_k,\ k = 1, \ldots, m, \\ x \in X, \end{cases} \tag{10}$$

где $g_k(x,\gamma) = g_k(x, p_1^k(\gamma), \ldots, p_{l_k}^k(\gamma))$, $p_1^k(\gamma), \ldots, p_{l_k}^k(\gamma), b_k(\gamma)$ - возможностные переменные, $\tilde{R}_k(\gamma)$ - нечеткие бинарные отношения, $\alpha_k \in (0,1]$ - заданные уровни необходимости. Опираясь на [2] построим эквивалентную детерминированную систему ограничений для (10).

Теорема 2. *Пусть* $g_k(x, p_1^k(\gamma), \ldots, p_{l_k}^k(\gamma))$ *- непрерывны по нечетким параметрам, возможностные переменные* $p_1^k(\gamma), \ldots, p_{l_k}^k(\gamma), b_k(\gamma)$ *и нечеткое отношение* $\tilde{R}_k(\gamma)$ *- минисвязанные и характеризуются квазивогнутыми и непрерывными распределениями возможностей, имеющими конечный носитель. Тогда система (10) эквивалентна системе ограничений*

$$\begin{cases} g_k(x, \overline{u}_1^k, \ldots, \overline{u}_{l_k}^k) = \overline{t}_k,\ \exists \overline{u}_s^k : \mu_{p_s^k}(\overline{u}_s^k) \leq 1 - \alpha_k, \\ \exists(\overline{t}_k, \overline{m}_k) : (\overline{t}_k, \overline{m}_k) \in \omega_{\alpha_k}(\tilde{R}_k(\gamma)),\ \overline{m}_k : \mu_{b_k}(\overline{m}_k) \leq 1 - \alpha_k, \\ x \in X,\ k = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, l_k, \end{cases} \tag{11}$$

где $\omega_{\alpha_k}(\tilde{R}_k(\gamma))$ *-* α_k*-уровневое множество нечеткого отношения* $R_k(\gamma)$.

Доказательство. Согласно (4) имеем

$$\nu\{g_k(x,\gamma)\tilde{R}_k(\gamma)b_k(\gamma)\} = 1 - \pi\{g_k(x,\gamma)\tilde{R}_k^C(\gamma)b_k(\gamma)\} \geq \alpha_k$$

или

$$\pi\{g_k(x,\gamma)\tilde{R}_k^C(\gamma)b_k(\gamma)\} \leq 1 - \alpha_k$$

Т.к. переменные $p_1^k(\gamma), \ldots, p_{l_k}^k(\gamma), b_k(\gamma)$ - минисвязанные, то согласно теореме 3 из [1] имеем

$$\sup_{t,m}\{\sup_{(u_1^k,\ldots,u_{l_k}^k):\varphi_k(x,u_1^k,\ldots,u_{l_k}^k)=t} \min_s\{\mu_{p_s^k}(u_s^k)\} \wedge (1-\mu_{\tilde{R}_k}(t,m)) \wedge \mu_{b_k}(m)\} \leq 1-\alpha_k.$$

Из непрерывности функций $\mu_{g_k}(x,t)$, $\mu_{\tilde{R}_k}(t,m)$ и $\mu_{b_k}(m)$ следует, что существует пара $(\overline{t}_k, \overline{m}_k)$, удовлетворяющая условиям $(\overline{t}_k, \overline{m}_k) \in \omega_{\alpha_k}(\tilde{R}_k(\gamma))$ и $\mu_{b_k}(\overline{m}_k) \leq 1 - \alpha_k$, на которой достигается супремум левой части k-го неравенства. Поэтому имеем

$$\sup_{(u_1^k,\ldots,u_{l_k}^k):\varphi_k(x,u_1^k,\ldots,u_{l_k}^k)=\overline{t}_k} \{\min_s\{\mu_{p_s^k}(u_s^k)\} \wedge (1-\mu_{\tilde{R}_k}(t,m)) \wedge \mu_{b_k}(m)\} \leq 1-\alpha_k.$$

Далее из аналогичных соображений $\exists \overline{u}_s^k : \mu_{p_s^k}(\overline{u}_s^k) \leq 1 - \alpha_k$, такие, что $\varphi_k(x, \overline{u}_1^k, \ldots, \overline{u}_{l_k}^k) = \overline{t}_k$. Теорема доказана. □

4. Примеры

Пример 1. Построим детерминированный эквивалентный аналог для задачи возможностного программирования. Пусть задача максимизации необходимости достижения нечеткой цели имеет вид:

$$\nu\{a_{01}(\gamma)x_1 + a_{02}(\gamma)x_2)\tilde{R}_0(\gamma)b_0(\gamma)\} \to \sup_{x_1,x_2\in E^1}, \tag{12}$$

ограничения по возможности заданы следующей системой:

$$\begin{cases} \nu\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}(\gamma)x_2)\tilde{R}_1(\gamma)b_1(\gamma)\} \geq \alpha_1, \\ \nu\{a_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2)\tilde{R}_2(\gamma)b_2(\gamma)\} \geq \alpha_2, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\mu_{a_{01}}(u) = \mu_{a_{02}}(u) = e^{-|u|}, u \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{b_0}(m) = e^{-|m-1|}, m \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{\tilde{R}_0}(t,m) = e^{-|t-m|}, t,m \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{a_{11}}(u) = \mu_{a_{12}}(u) = e^{-|2-u|}, u \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{b_1}(m) = e^{-|m-3|}, m \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{a_{21}}(u) = e^{-u^2}, \mu_{a_{22}}(u) = e^{-|u-1|}, u \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{b_2}(m) = e^{-(m-1)^2}, m \in (-\infty,+\infty)$; $\mu_{\tilde{R}_1}(t,m) = \mu_{\tilde{R}_2}(t,m) = e^{-|t-m|}, t,m \in (-\infty,+\infty)$. Построим для этой задачи детерминированный аналог. Согласно теореме 1 задача (12) эквивалентна следующей детерминированной задаче

$$x_0 \to \sup,$$

$$\begin{cases} x_0 \geq e^{-|u_1|}, \\ x_0 \geq e^{-|u_2|}, \\ x_0 \geq 1 - e^{-|t_0-m_0|}, \\ x_0 \geq e^{-|m_0|}, \\ u_1x_1 + u_2x_2 = t_0, \\ x_0 \in [0,1], \\ x_1, x_2, u_1, u_2, t_0, m_0 \in E^1. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему ограничений по необходимости (13). Для нее, согласно теореме 2, детерминированный эквивалент имеет вид

$$\begin{cases} u_1^1 x_1 + u_2^1 x_2 - t_1 = 0, \\ e^{-|u_1^1 - 2|} \le 1 - \alpha_1, \\ e^{-|u_2^1 - 2|} \le 1 - \alpha_1, \\ e^{-|t_1 - m_1|} \ge \alpha_1, \\ e^{-|m_1 - 3|} \le 1 - \alpha_1, \\ u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2 - t_2 = 0, \\ e^{-(u_1^2)^2} \le 1 - \alpha_2, \\ e^{-|u_2^2 - 1|} \le 1 - \alpha_2, \\ e^{-|t_2 - m_2|} \ge \alpha_2, \\ e^{-(m_2 - 1)^2} \le 1 - \alpha_2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, t_1, m_1, t_2, m_2 \in E^1. \end{cases}$$

В результате эквивалентный детерминированный аналог задачи (12), (13) имеет вид

$$x_0 \to \sup, \tag{14}$$

$$\begin{cases} x_0 \ge e^{-|u_1|}, \\ x_0 \ge e^{-|u_2|}, \\ x_0 \ge 1 - e^{-|t_0 - m_0|}, \\ x_0 \ge e^{-|m_0|}, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 - t_0 = 0, \\ u_1^1 x_1 + u_2^1 x_2 - t_1 = 0, \\ e^{-|u_1^1 - 2|} \le 1 - \alpha_1, \\ e^{-|u_2^1 - 2|} \le 1 - \alpha_1, \\ e^{-|t_1 - m_1|} \ge \alpha_1, \\ e^{-|m_1 - 3|} \le 1 - \alpha_1, \\ u_1^2 x_1 + u_2^2 x_2 - t_2 = 0, \\ e^{-(u_1^2)^2} \le 1 - \alpha_2, \\ e^{-|u_2^2 - 1|} \le 1 - \alpha_2, \\ e^{-|t_2 - m_2|} \ge \alpha_2, \\ e^{-(m_2 - 1)^2} \le 1 - \alpha_2, \\ x_0 \in [0, 1], \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ u_1, u_2, t_0, m_0, u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, t_1, m_1, t_2, m_2 \in E^1. \end{cases} \tag{15}$$

Специфицируем этот пример и решим его для конкретных числовых значений параметров. Пусть $\alpha_1 = 0.9$ и $\alpha_2 = 0.8$, в этом случае решение задачи (14),(15), согласно расчетам с помощью пакета Mathematica, будет выглядеть следующим образом $m_0 = 0.66426, m_1 = -0.227913, m_2 = -1.26329, t_0 = -0.952537, t_1 = -0.333265, t_2 = -1.0943, u_1 = 1.06329, u_1^1 = -0.312582, u_1^2 = -0.302589, u_2 = -1.68401, u_2^1 = -1.60371, u_2^2 = -0.751886, x_0 = 1, x_1 = 0.321878,$
$x_2 = 0.76887.$

5. Заключение

В статье продолжено исследование, начатое в [1]. В возможностном контексте рассмотрена задача нечеткого программирования для случая меры необходимости, что логическим образом дополняет работу [1]. Предложен непрямой метод решения задачи, предполагающий сведение исходной задачи к детерминированному аналогу. Возможности метода демонстрируются на модельном примере. Однако следует отметить, что полученный в примере детерминированный эквивалент, представляет собой задачу невыпуклого математического программирования, решение которой требует отдельного тщательного исследования.

Список литературы

[1] Гордеев Р.Н., Язенин А.В. *Об одной модели и методе решения задачи возможностного программирования* // Известия академии наук. Теория и системы управления, 2006 (в печати)

[2] Язенин А.В. *К задаче максимизации возможности достижения нечеткой цели* // Известия академии наук. Теория и системы управления, 1999, №4, с. 120-123.

[3] Yazenin A.V., Wagenknecht M. *Possibilistic optimization.* Cottbus: Branderburgische Technische Universitat, Germany. 1996.