УДК 519.2

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ В R^N[1]

Архипов С.В.

Кафедра математической статистики и эконометрики

В статье вводится новое определение многомерных правильно меняющихся функций, расширяющее класс этих функций. Приводятся примеры. Предлагается их интегральное представление.

In the present paper a new definition of multidimensional regularly varying functions expanding a class of these functions is introduced. Some examples are given. Their integral representation is offered.

Правильно меняющиеся функции в R были введены в 1930 году югославским математиком И. Караматой. К этому времени появилось несколько монографий, специально описывающих их свойства [2], [3], [7]. Естественным желанием математиков было расширение этого понятия на многомерный случай. Было предложено несколько определений. Самое раннее из них принадлежит Б. Байшанскому и И. Карамате см.([2],[3],[7])

Функцию $R: \ (0,\infty)^n \to (0,\infty)$ они называли правильно меняющейся, если для любого $\lambda \in (0,\infty)^n$ имело место равенство

$$\lim_{\min(x_1,\dots,x_n)\to\infty} \frac{R(\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n)}{R(x_1,\dots,x_n)} = \varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Группа авторов (см. [4], [6]) использовала следующее определение:

Пусть $\tau_i(t) \to \infty, \ i=\overline{1,n}$. Функция $R(x)$ являлась правильно меняющейся, если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(\tau_1(t)x_1,\dots,\tau_n(t)x_n)}{R(\tau_1(t),\dots,\tau_n(t))} = \varphi(x),$$

где $\varphi(tx) = t^\alpha \varphi(x), \ t>0, \ x$-любая точка из конуса Γ. Отметим, что аргумент функции R в знаменателе имеет вид $(\tau_1(t)\cdot 1,\dots,\tau_n(t)\cdot 1)$, т.е. в качестве тестирующего направления используется вектор $(1,1,\dots,1)$.

А.Л. Якымив в [8] предлагал выбирать в качестве вектора-образца произвольный вектор e из конуса Γ, т.е.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{R(\lambda\cdot x)}{R(\lambda\cdot e)} = \varphi(x) > 0, \ \forall x \in \Gamma.$$

Медленно меняющиеся функции при этом удовлетворяли равенству

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{L(\lambda\cdot x)}{L(\lambda\cdot e)} = 1, \ \forall x \in \Gamma. \tag{1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 02-01-01080.

Там же в [8] было получено интегральное представление непрерывных медленно меняющихся функций

$$L(x) = \exp\left\{\eta(x) + \int_a^{|x|} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}, \tag{2}$$

где $\eta(x), \varepsilon(u)$—непрерывные функции и $\eta(x) \to c$ при $x \to \infty$, а $\varepsilon(u) \to 0$, когда $u \to \infty$.

Как было отмечено В.М. Золотаревым в [7], выражение (2) является по сути одномерной функцией.

Определение Якымива несколько изменил M.M. Meerschaert (см. [5]), который добавил требование неотрицательности $R(x)$.

Следующее ниже определение позволяет расширить класс многомерных правильно меняющихся функций.

Определение 1. *Пусть $R(x)$-неотрицательная измеримая функция в R^n. Будем называть ее правильно меняющейся на бесконечности, если для всех направлений $x' = x/|x| \in S^{n-1}$ таких, что $\forall\ \lambda > 0,\ R(\lambda x') \neq 0$ выполняется*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{R(\lambda \cdot x)}{R(x)} = \lambda^\alpha,\ \alpha \in (-\infty, \infty). \tag{3}$$

Положив $R(x) = |x|^\alpha \cdot L(x)$, получим из (3) соотношение для медленно меняющихся функций

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{L(\lambda \cdot x)}{L(x)} = 1, \tag{4}$$

которое также справедливо $\forall x' \in S^{n-1} :\ L(\lambda x') \neq 0,\ \forall \lambda > 0$. Отметим, что $L(x) \geq 0$.

Приведем несколько примеров, указывающих на различие в определениях (1) и (4).

Пример 1. *Рассмотрим функцию постоянную на лучах, исходящих из начала координат, т.е. $g(|x| \cdot x') = g(x') \not\equiv const,\ x \neq 0$. С точки зрения определения (1) эта функция не является медленно меняющейся, а соотношение (4) выполняется.*

Пример 2. *Пусть $L(x) = \ln(1 + |x|^{\beta(x')}),\ \beta(x') \geq 0$ и $\beta(x') \not\equiv const$, т.е. функция от направления может появиться в показателе. Проверка дает такие же ответы, что и в а).*

Пример 3. *Пусть даны два непересекающихся (за исключением, может быть, нуля) конуса Γ_1 и Γ_2. Тогда в каждом из них $L(x)$ может иметь различное асимптотическое поведение. Например,*

$$L(x) = \begin{cases} \ln(1 + f(x')\,|x|),\ x \in \Gamma_1, \\ \ln\ln(1 + g(x')\,|x|),\ x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Если перейти к R, то $\Gamma_1 \subseteq [0, \infty)$, а $\Gamma_2 \subseteq (-\infty, 0]$. Если же функция $L(x)$имеет носитель только на правой полуоси, то она совпадает с функцией из классического определения. Здесь можно также отметить, что $L(x)$ будет медленно меняющейся, если она задана на отдельных лучах, исходящих из начала координат.

Пример 4. *В дальнейшем, при вычислениях, связанных с преобразованием Лапласа, мы будем рассматривать интегральные преобразования вида*

$$L(x) = \int_{S_+^{n-1}} (x', \xi)^\alpha L_0(|x|, \xi) d\xi,$$

где $S_+^{n-1} = \{\xi : (x', \xi) > 0,\ \xi \in S^{n-1}\}$, $\alpha > 0$, $L_0(|x|, \xi)$–медленно меняющаяся функция в смысле определения (4).

Выберем направление $\xi_0 \in S_+^{n-1}$, в котором $L_0(|x|, \xi)$ имеет максимальный порядок возрастания при $|x| \to \infty$. Поделив числитель и знаменатель в (4) на $L_0(|x|, \xi_0)$и применив мажорантную теорему Лебега в каждом интеграле, получим

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\int\limits_{S_+^{n-1}} (x', \xi)^\alpha L_0(\lambda |x|, \xi) / L_0(|x|, \xi_0) d\xi}{\int\limits_{S_+^{n-1}} (x', \xi)^\alpha L_0(|x|, \xi) / L_0(|x|, \xi_0) d\xi} = 1,$$

т.е. $L(x)$– медленно меняющаяся функция.

Функции, обладающие свойством (4), можно также представить в виде, аналогичном (2).

Теорема 1. *Пусть $L(x)$-измеримая борелевская функция в R^n,удовлетворяющая (4). Тогда для каждого x' : $L(\lambda x') \neq 0$, $\forall \lambda > 0$ справедливо следующее интегральное представление*

$$L(x) = M(x) \cdot \exp\left\{ \int_{b(x')}^{|x|} \frac{\varepsilon(u, x')}{u}\, du \right\}, \tag{5}$$

где измеримая функция $M(x)$имеет пределом при $|x| \to \infty$ функцию $M_0(x)$ постоянную на лучах, исходящих из начала координат, $\varepsilon(u, x') \to 0$ при $u \to \infty$.

Доказательство. Фиксируя x_0' : $L(\lambda x_0') \neq 0$, $\forall \lambda > 0$, получим луч, на котором справедливо интегральное представление для одномерного случая

$$L(|x|) = M(|x|) \cdot \exp\left\{ \int_b^{|x|} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}$$

Изменение вектора x_0' внесет следующие коррективы: $M(|x|)$, $\varepsilon(u)$ и b будут зависеть еще и от направления, а $M(|x|)$ кроме того будет стремиться возможно к разным постоянным.

Выпишем функции из представления (5) для некоторых медленно меняющихся функций.

а) Пусть $L(x) = \ln(1 + g(x') |x|)$, $g(x') > 0$. Тогда

$$\varepsilon(u,x') = \frac{g(x')u}{(1+g(x')u)\ln(1+g(x')u)}, \ M(x) = \ln(1+g(x')), \ b(x') \equiv 1.$$

b) Если $L(x) = \ln(e-1+|x|^{\beta(x')})$, $\beta(x') \geq 0$, то функции в (5) равны

$$\varepsilon(u,x') = \frac{\beta(x')u^{\beta(x')}}{(e-1+u^{\beta(x')})\ln(e-1+u^{\beta(x')})}, \ M(x) \equiv 1, \ b(x') \equiv 1.$$

c) Когда $L(x) = \int\limits_{S_+^{n-1}} (x',\xi)^\alpha \ln(1+g(\xi)\,|x|)d\xi$, $g(\xi) \geq 0$, тогда

$$\varepsilon(u,x') = \frac{\int\limits_{S_+^{n-1}} (x',\xi)^\alpha \frac{g(\xi)u}{1+g(\xi)u} d\xi,}{\int\limits_{S_+^{n-1}} (x',\xi)^\alpha \ln(1+g(\xi)u)d\xi}, \ M(x) = \int\limits_{S_+^{n-1}} (x',\xi)^\alpha \ln(1+g(\xi))d\xi, \ b(x') \equiv 1.$$

■

Список литературы

[1] Bajšanski B., Karamata J. Regularly varying functions and the principle of equicontinuity. // Publ. Ramanujan Inst. 1968-9. v.1, p. 235-46.

[2] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular Variation. 1987. Cambridge University Press.

[3] Haan L. de. On Regular Variation and Its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes. // Math. Centre Tracts 32. 1970. Amsterdam.

[4] Haan L. de, Omey E. Domains of attractions and regular variation in R^d// J. Multivar. Anal. 1984. v. 14, p.17-33.

[5] Meerschaert M.M. Multivariable domains of attraction and regular variation.1984. Doct. Dissert., The University of Michigan.

[6] Stam A.J. Regular variation in R_+^d and the Abel-Tauber theorem // Preprint. 1977. Mathematisch Instituut, Rijkuniversiteit Groningen, The Netherlands.

[7] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. / Под ред. В.М. Золотарева. 1985. М.: Наука.

[8] Якымив А.Л. Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана-Харриса // Матем. сб. 1981. т. 115, №3, с.463-477.