УДК 517.53

ОЦЕНКИ В КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗВЕЗДНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Шеретов В.Г.

Кафедра математического анализа

Получены новые асимптотически точные при $M \to \infty$ оценки начальных тейлоровских коэффициентов функций из классов S^*_M. Доказательства основаны на методе площадей, развитом автором.

New series of coefficient inequalities for the schlicht conformal mappings from the classes S^*_M are derived. The proofs based on the version of the area method given by the author.

1. Символом S^*_M принято обозначать подкласс класса S^* звездных функций, образуемый функциями f, такими, что $|f(z)| < M$ для всех $z \in \Delta$, где $M > 1$ – параметр подкласса. Вопрос об оценках тейлоровских коэффициентов в классе S_M и его подклассах рассматривался многими авторами (см. обзор Д.В.Прохорова [1]). В данной работе для решения этой сложной нелинейной задачи предлагается использовать новый вариант метода площадей, [2].

Фиксируем натуральное число n, положим $\eta = e^{2\pi i/n}$ и рассмотрим ассоциированную с $f \in S$ голоморфную в круге Δ функцию

$$F(z) := \prod_{\nu=0}^{n-1} \eta^{-\nu} f(\eta^\nu z). \tag{1}$$

Как доказано в [2], для функций класса S^* риманова поверхность $F(\Delta)$ является n-листной и для него справедлива теорема площадей. Специализируем ее на подкласс S^*_M и на квадратичный дифференциал $(Q'(w)\,d\,w)^2$, ассоциированный с $Q(w) = w^{-1/2}$. Повторим доказательство этой теоремы, принимая во внимание, что определяемая формулой (1) функция $F(z)$ удовлетворяет неравенству $|F(z)| \le M^n$. Площадь n-листного диска $|w| \ge M^n$ в метрике квадратичного дифференциала $Q'(w)dw^2$ равна $\pi\, nM^{-n}/2$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu \in S^*_M$ и F – ассоциированная функция, отвечающая заданному $n \in \mathbb{N}$. Пусть в области $\Delta\backslash\{0\}$ функция $Q \circ F(z)$ представлена рядом Пюизе:*

$$Q \circ F(z) = z^{-n/2} - \frac{1}{2} B_n z^{n/2} + \cdots,$$

где B_n полиномиально выражаются через $a_2, a_3, \cdots, a_n$. Тогда справедливо неравенство площадей

$$1 - |B_n/2|^2 \ge M^{-n}. \tag{2}$$

Равенство достигается на тех и только на тех функциях $f \in S^*_M$, для которых ассоциированные функции F отображают круг Δ на риманову поверхность $F(\Delta)$, замыкание которой есть замкнутый n–листный круг радиуса M^n, разветвленный в начале координат.

При $n = 1$ доказательство теоремы проходит для всего класса S и приводит к классической точной оценке Пика (см. [3], [4]):

$$|a_2| \leq 2(1 - M^{-1}),$$

причем экстремалями являются вращения функции Пика

$$p_M(z) = M\,\Lambda\,(f_\psi(z)M^{-1}),$$

где $\Lambda(w) = (1 + 2w - \sqrt{1+4w})/2w$, f_ψ – функция Кебе. Функция Пика отображает единичный круг на круг $\Delta_M = \{|w| < M\}$ с надрезом по радиусу длины

$$L = 2M\sqrt{M-1}(\sqrt{M} - \sqrt{M-1}),\ \ M - L > 1/4.$$

При $n > 1$ неравенство (2) принимает вид $|B_n| \leq 2(1 - n\,M^{-n})^{1/2}$.

2. Специализируем (2) на случаи $n = 2, 3, 4$. При $n = 2$ будем иметь

$$|a_3 - a_2^2/2| \leq [1 - M^{-2}]^{1/2},$$

стало быть, в случае $|a_3| \geq |a_2|^2/2$, получаем

$$|a_3| \leq [1 - M^{-2}]^{1/2} + \frac{1}{2}|a_2|^2,$$

то есть

$$|a_3| \leq [1 - M^{-2}]^{1/2} + 2[1 - M^{-1}]^2. \tag{3}$$

Если же $|a_3| < |a_2|^2/2$, то

$$|a_3| \leq 2(1 - M^{-1})^2,$$

и тем более верно (3).

В случае $n = 3$ неравенство (2) дает

$$|a_4 - a_2(a_3 - a_2^2/2) - a_2^3/6| \leq 2/3[1 - M^{-3}]^{1/2}.$$

Если при этом

$$|a_4| \geq |a_2(a_3 - a_2^2/2) + a_2^3/6|,$$

то

$$|a_4| \leq |a_2||a_3 - a_2^2/2| + |a_2^3/6| + \frac{2}{3}[1 - M^{-3}]^{1/2} \leq$$

$$\leq 2(1 - M^{-1})[1 - M^{-2}]^{1/2} + \frac{4}{3}(1 - M^{-1})^3 + \frac{2}{3}[1 - M^{-3}]^{1/2}. \tag{4}$$

Если же

$$|a_4| < |a_2(a_3 - a_2^2/2) + a_2^3/6|,$$

то

$$|a_4| \leq 2(1 - M^{-1})[1 - M^{-2}]^{1/2} + \frac{4}{3}(1 - M^{-1})^3,$$

и тем более верно (4).

Если $n = 4$, то неравенство (2) дает

$$|a_5 - a_2(a_4 - a_2\,a_3 + a_2^3/3) - \frac{1}{2}(a_3 - a_2^2/2)^2 - \frac{1}{2}a_2^2(a_3 - a_2^2/2) - a_2^4/24| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}[1-M^{-4}]^{1/2}.$$

Отсюда при условии

$$|a_5| \geq |2(a_4 - a_2\, a_3 + a_2^3/3) + \frac{1}{2}(a_3 - a_2^2/2)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}a_2^2(a_3 - a_2^2/2) + a_2^4/24|$$

находим

$$|a_5| \leq |a_2||a_4 - a_2\, a_3 + a_2^3/3| + \frac{1}{2}|a_3 - a_2^2/2|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}|a_2|^2|a_3 - a_2^2/2| + |a_2|^4/24 + \frac{1}{2}[1-M^{-4}]^{1/2},$$

следовательно,

$$|a_5| \leq \frac{4}{3}\,(1-M^{-1})[1-M^{-3}]^{1/2} + \frac{1}{2}[1-M^{-2}]^{1/2} +$$

$$+2\,(1-M^{-1})^2\,[1-M^{-2}]^{1/2} + \frac{2}{3}(1-M^{-1})^4 + \frac{1}{2}[1-M^{-4}]^{1/2}. \quad (5)$$

Если же

$$|a_5| \leq |2(a_4 - a_2\, a_3 + a_2^3/3) + \frac{1}{2}(a_3 - a_2^2/2)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}a_2^2(a_3 - a_2^2/2) + a_2^4/24|,$$

то

$$|a_5| \leq \frac{4}{3}\,(1-M^{-1})[1-M^{-3}]^{1/2} + \frac{1}{2}[1-M^{-2}]^{1/2} +$$

$$+2\,(1-M^{-1})^2\,[1-M^{-2}]^{1/2} + \frac{2}{3}(1-M^{-1})^4,$$

и тем более верно (5).

Итогом проведенного анализа является

Т е о р е м а 2. *В классах S_M^* имеют место асимптотически точные при $M \to \infty$ и при $M \to 1+0$ оценки (3), (4), (5).*

Заметим, что проведенный анализ дает не только верхние границы для модулей третьего, четвертого и пятого коэффициентов, но и оценки их поведения на всем интервале $(1, \infty)$ значений параметра M.

Аналогичным способом с помощью MAPLE–8 можно получить оценки для $|a_6|$, $|a_7|$, $|a_8|$, но они являются громоздкими.

Список литературы

[1] Prokhorov D.V. Coefficients of Holomorphic Functions // J. Math. Sci. 2001. V. 106. P. 3518–3544.

[2] Шеретов В.Г. Развитие метода площадей и его приложения к однолистным функциям // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2004. С. 51–63.

[3] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., 1956. Ч. 2.

[4] Григорьева В.В. Доказательства неравенства Пика и его аналога для класса $S^{(2)}$ методом площадей // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2000. С. 53–58.