УДК 517.53

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЫ КШИЖА

Ступин Д.Л., Шеретов В.Г.
Кафедра математического анализа

Модифицированным методом внутренних вариаций доказывается локальная справедливость гипотезы Кшижа.

By modified method of variations the local Krzyz hypothesis is proved.

Введение. Класс B состоит из голоморфных в Δ функций f, не обращающихся в нуль и таких, что $|f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж предположил [1, 2], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \qquad n \in N,$$

причем равенство достигается на функциях вида $e^{i\psi}F(e^{i\varphi}z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := \exp\left(-t\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad \varphi, \psi \in R, \quad t \in [0, +\infty).$$

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w, то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h(z) \in C.$$

Отметим, что при каждом $t \geq 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C и B_t. Обозначим это соответствие символом G_t.

Пусть E — множество всех голоморфных в Δ функций, с равномерно ограниченной снизу реальной частью. Множество

$$l_{\varepsilon_0}(H, h) := \{(1-\varepsilon)H + \varepsilon h : \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)\}, \qquad \varepsilon_0 \in (0, 1], \quad h, H \in E$$

есть полуинтервал соединяющий точки H и $h_{\varepsilon_0} := (1-\varepsilon_0)H + \varepsilon_0 h$. Введем топологию на множестве E следующим образом: совокупность полуинтервалов

$$U_{\varepsilon_0}(H) := \bigcup_{h \in E} l_{\varepsilon_0}(H, h)$$

назовем ε_0-окрестностью точки H. Система множеств (при фиксированном H)

$$\tau := \{\varnothing,\, E,\, U_{\varepsilon_0}(H) \,:\, \varepsilon_0 \in (0, 1]\}$$

очевидно будет являться топологией на пространстве E. На пространстве C можно ввести топологию τ_C индуцированную из E.

Отображение G_t — взаимнооднозначно, следовательно если множества $A_1, A_2 \subset C$, то $G_t(A_1 \cup A_2) = G_t(A_1) \cup G_t(A_2)$ и $G_t(A_1 \cap A_2) = G_t(A_1) \cap G_t(A_2)$. Поэтому система множеств

$$\tau_{B_t} := \{G_t(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_C\}$$

будет являться топологией на пространстве B_t.

1. Вариационный метод. В [4] имеется результат о том, что $F(z^p)$ дает строгий локальный максимум для $Re\{f\}_p$ на $\bigcup\limits_{t\in[0,+\infty)} B_t$. Мы же докажем более сильное утверждение.

Теорема 1. *В топологии τ_{B_t} функции вида $e^{i\psi}F(e^{i\varphi}z^p, 1)$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ дают строгий локальный максимум для функционала $I_p[f] := |\{f\}_p|$ на классе B. Более того, функции вида $F(e^{i\varphi}z^p, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ дают строгий локальный максимум функционалу I_p на каждом классе B_t, $t \in [0, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть

$$H_p(z) := \frac{1+z^p}{1-z^p}, \qquad f_{t,p}(z) := e^{-tH_p(z)}.$$

Покажем, что функция $f_{t,p}$ доставляет локальный максимум функционалу $I_p[f]$, $p \in N$ на B_t. Для этого рассмотрим вариацию

$$f_{t,p,\varepsilon}(z) := e^{-t[(1-\varepsilon)H_p(z)+\varepsilon h(z)]}, \qquad h \in C, \quad \varepsilon \in (0,1)$$

функции $f_{t,p}$. Эта вариация имеет своим p-м тейлоровским коэффициентом выражение

$$\{f_{t,p,\varepsilon}\}_p = -\frac{t}{e^t}[2 - (2 - \{h\}_p)\varepsilon + o(\varepsilon)],$$

при $\varepsilon \to 0$. Если $\{h\}_p \neq 2$, то эта вариация уменьшает модуль p-го коэффициента функции $f_{t,p}$. Действительно,

$$|2 - (2 - \{h\}_p)\varepsilon| = |(1-\varepsilon)2 + \varepsilon\{h\}_p| < (1-\varepsilon)2 + \varepsilon 2 = 2.$$

Рассмотрим случай, когда $\{h\}_p = 2$. По теореме Каратеодори-Теплица это возможно только в случае, когда

$$h(z) = h_q(z) := \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \frac{1 + e^{\frac{2\pi k i}{q}} z}{1 - e^{\frac{2\pi k i}{q}} z},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{q} \alpha_k = 1$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, q$, p кратно q. Построим вариацию функции $f_{t,p}$ функцией h_q, при этом, если $q = p$ и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = \frac{1}{q},$$

то вариация будет тривиальной и этот случай мы исключаем из рассмотрения. Имеем

$$f_{t,p,\varepsilon}(z) := \exp(-t[(1-\varepsilon)H_p(z) + \varepsilon h_q(z)]) =$$

$$= e^{-t}\exp\left(-2t\left[\sum_{j=1}^{\infty} z^{jp} + \varepsilon \sum_{j=1, j\neq p}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k e^{j\frac{2\pi k i}{q}}\right) z^j\right]\right) =$$

$$= e^{-t}\exp\left(-2t\left[z^p + \ldots + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k e^{j\frac{2\pi k i}{q}}\right) z^j + \ldots\right)\right]\right).$$

Эта вариация функции $f_{t,p}$ имеет своим p-м тейлоровским коэффициентом выражение

$$\{f_{t,p,\varepsilon}\}_p =$$

$$= -\frac{t}{e^t}\left[2 - t\left(\sum_{j,l=1, j+l=p}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k e^{j\frac{2\pi k i}{q}}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\alpha_m e^{l\frac{2\pi m i}{q}}\right)\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right] =$$

$$= -\frac{t}{e^t}\left[2 - t\left(\sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k e^{j\frac{2\pi k i}{q}}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\alpha_m e^{(p-j)\frac{2\pi m i}{q}}\right)\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right] =$$

$$= -\frac{t}{e^t}\left[2 - t\left(\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k,m=1}^{q}\alpha_k\alpha_m e^{j\frac{2\pi(k-m)i}{q}}\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right],$$

при $\varepsilon \to 0$. Преобразуем двойную сумму в круглых скобках. Учтя, что p кратно q имеем

$$\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k,m=1}^{q}\alpha_k\alpha_m e^{j\frac{2\pi(k-m)i}{q}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 + \sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m e^{j\frac{2\pi(k-m)i}{q}} + \sum_{k,m=1, m<k}^{q}\alpha_k\alpha_m e^{j\frac{2\pi(k-m)i}{q}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 + \sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m\left(e^{j\frac{2\pi(k-m)i}{q}} + e^{j\frac{2\pi(m-k)i}{q}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 + 2\sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m \cos\left(j\frac{2\pi(m-k)}{q}\right)\right) =$$

$$= (p-1)\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 + 2\sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m\sum_{j=1}^{p-1}\cos\left(j\frac{2\pi(m-k)}{q}\right) =$$

$$= (p-1)\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 + 2\sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m\left(\frac{\sin\frac{p(m-k)\pi}{q}\cos\frac{(p-1)(m-k)\pi}{q}}{\sin\frac{(m-k)\pi}{q}} - 1\right) =$$

$$= (p-1)\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 - 2\sum_{k,m=1, k<m}^{q}\alpha_k\alpha_m = (p-1)\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 - \left(1 - \sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2\right) =$$

$$= p\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 - 1.$$

Итак,

$$\{f_{t,p,\varepsilon}\}_p = -\frac{t}{e^t}\left[2 - t\left(p\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 - 1\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right],$$

при $\varepsilon \to 0$. Нетрудно показать, что задача оптимального управления

$$\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 \to \min$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{k=1}^{q}\alpha_k = 1, \qquad \alpha_k \geq 0, \qquad k = 1, \ldots, q,$$

имеет единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = \frac{1}{q},$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 \geq \frac{1}{q}.$$

Далее, p кратно q и случай $p = q$ исключен выше, то есть

$$p\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2 - 1 \geq \frac{p}{q} - 1 > 0, \qquad \frac{p}{q} \in N.$$

Следовательно, наша вариация уменьшает модуль p-го коэффициента функции $f_{t,p}$.

Так как класс B инвариантен относительно вращений в плоскостях переменных z и w, то нам осталось доказать, что функция $F(z^p)$ лежащая в B_1 доставляет локальный максимум функционалу $I_p[f]$, $p \in N$ на $\bigcup\limits_{t\in[0,+\infty)} B_t$. Но это следует из того, что функции вида $F(e^{i\varphi}z^p, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ дают строгий локальный максимум функционалу I_p на каждом классе B_t, $t \in [0, +\infty)$ и $t/e^t \leq e^{-1}$, $t \in [0, +\infty)$.

Это завершает доказательство теоремы. ■

Список литературы

[1] Krzyz J.G. *Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions* // Ann. Polon. Math. 1967-1968. V. 20. P. 314.

[2] Krzyz J.G. *Coefficient problem for bounded nonvanishing functions* // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[3] Peretz R. *The Krzyz problem and polynomials with zeros on the unit circle* // Computational Methods and Function Theory 2001. Abstracts of the Fours CMFT Conference, Aveiro (Portugal), June 25–29, 2001, V. 8 P. 75.

[4] Hummel J.A., Scheinberg S., Zalcman L.A. *A coefficient problem for bounded nonvanishing functions* // J.d'Analyse Mathematique 1977, V 31. P. 169–190.