УДК 519.685

АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ПОРТФЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

М.В. Погорелова, В.Н. Михно
Кафедра системного и
экономико-математического анализа

Предлагаются модели и методика оценки структурной устойчивости (робастности) результатов формирования оптимального портфеля финансовых титулов по критерию максимума ожидаемой полезности к виду функции полезности инвестора и вероятностного распределения доходности портфеля.

The Paper proposes models and methods for evaluating the robustness of the results of forming a portfolio of financial titles on the criterion of the maximum of the expected utility to the assumptions about the kind of function of the investor's utility and probabilistic distribution of the portfolio's profitability.

Введение. Наиболее общей моделью формирования оптимального портфеля финансовых титулов является модель, основанная на концепции ожидаемой полезности [1,2]. Данная модель в зависимости от специфики предпочтений инвестора и свойств финансовых титулов в каждом конкретном случае приводит к уникальной экстремальной задаче вида

$$\begin{aligned} &x^* = \operatorname*{argmax}_x M\left\{u(r(x))\right\}, \\ &\sum_{i\in I} x_i = 1, \\ &x_i \geq 0, i \in I \end{aligned} \qquad (1)$$

где $I = \{1,2,..,n\}$ — множество финансовых титулов; $x = (x_1,\ldots x_n)$ — вектор, определяющий структуру инвестиционного портфеля;
x_i — доля капиталовложений в i-й финансовый титул в инвестиционном портфеле, $i \in I$; $r(x)$ — доходность инвестиционного портфеля (случайная величина с функцией плотности распределения $V(r)$) с областью значений Q; $u(r(x))$ — функция полезности инвестора, определяемая на доходности портфеля $r(x) \in Q$; $M\{u(r(x))\} = \int\limits_Q u(r(x)) \cdot V(r)dr$ — ожидаемая полезность инвестиционного портфеля, определяемого структурой х капиталовложений.

Уникальность модели (1) в конкретных ситуациях определяется видом и свойствами функции полезности инвестора и вероятностным распределением доходности портфеля. При этом решение задачи (1) в каждом случае является достаточно сложным. В настоящее время разработано много методов и алгоритмов формирования оптимального портфеля для частных случаев модели (1) [2,3,4], которые определяются конкретными предположениями относительно функции полезности и распределения доходности отдельных финансовых титулов и всего портфеля в целом. При этом реальные (уникальные) модели, возникающие на практике, как правило, не удовлетворяют указанным предположениям. В этой связи возникает вопрос разработки критериев, позволяющих установить возможность применения известных моделей (частных случаев общей модели) при нарушении принимаемых в них допущений.

В статье предлагаются модели анализа робастности (структурной устойчивости) известных портфельных моделей к виду функции полезности инвестора и к виду распределения доходности отдельных финансовых титулов и портфеля в целом. Даются рекомендации по использованию результатов исследования на практике.

1. Постановка задачи.

Пусть U — класс возможных функций полезности инвестора; $u_1(r(x)) \notin U$ — функция полезности, для которой разработаны методы решения задачи вида (1); $\Phi(u, u_1)$ — мера различия функций полезности $u \in U$ и u_1, которая характеризует также степень искажения предпочтений инвестора при использовании функции полезности u_1 вместо u; $\varepsilon > 0$ — допустимая величина потери ожидаемой полезности портфеля.

Тогда задача исследования устойчивости результатов формирования оптимального портфеля с использованием функции полезности u_1 вместо u может быть поставлена как задача на условный экстремум меры Φ при условии на допустимое отклонение ожидаемой полезности портфеля

$$\Phi^* = \max_{u \in U} \Phi(u, u_1) \tag{2}$$

$$\Delta = |M_V(u(r(x^{(1)*}))) - M_V(u_1(r(x^{(2)*})))| \leq \varepsilon \forall \Phi(u, u_1) \in [0, \Phi^*],$$

где $x^{(1)*}$ соответствует оптимальному портфелю финансовых титулов, при использовании инвестором функции полезности u в (1), $x^{(2)*}$- при использовании u_1. Отрезок $[0, \Phi^*]$ назовем диапазоном устойчивости.

Другими словами, задача (2) анализа устойчивости портфельных моделей вида (1) к отклонениям от используемой функции полезности u_1 вместо u состоит в нахождении диапазона меры $\Phi(u, u_1)$, при котором ожидаемая полезность выбираемого портфеля с использованием функции полезности u_1 отклоняется от ожидаемой полезности выбираемого портфеля при использовании функции полезности u не более, чем на допустимое значение.

Задачу оценки робастности модели (1) к нарушениям допущений относительно вероятностного распределения доходности будем рассматривать для случая допущения о нормальности распределения в (1).

Пусть W — класс возможных вероятностных распределений доходностей портфеля. Для анализа устойчивости портфельных моделей к отклонениям от нормального распределения доходности портфеля финансовых титулов введем меру данного отклонения $\psi(N, V)$, где $N(r) \notin W$ — плотность вероятностей нормального распределения, $V(r) \in W$.

Пусть, как и ранее, $\varepsilon > 0$ — допустимая величина потери ожидаемой полезности инвестора. Тогда задача оценки робастности портфельной модели (1) с нормальным распределением к отклонению от нормальности может быть сформулирована как задача на условный экстремум меры ψ при условии на допустимое отклонение ожидаемой полезности портфеля

$$\psi^* = \max_{V \in W} \psi(N, V) \tag{3}$$

$$\Delta = |M_V(u(r(x^{(1)*}))) - M_N(u(r(x^{(2)*})))| \leq \varepsilon \forall \psi \in [0, \psi^*],$$

где $x^{(1)*}$ соответствует оптимальному портфелю финансовых титулов, при использовании распределения доходности $V(r)$ в (1), $x^{(2)*}$ — при использовании нормального распределения доходности $N(r)$ в (1).

Таким образом, задача (3) анализа устойчивости портфельной модели вида (1), использующей предположения о нормальности, к отклонениям вероятностного распределения доходности портфеля от нормального состоит в нахождении диапазона значений меры ψ, при котором ожидаемая полезность выбираемого портфеля с использованием нормального распределения его доходности отклоняется от ожидаемой полезности выбираемого портфеля при использовании распределения $V(r)$ не более, чем на допустимое значение ε.

2. Модель оценки робастности к виду функции полезности.

Меру $\Phi(u, u_1)$ структурного различия функций полезности в (2) введем основываясь на том, что предпочтения инвестора в (1) искажаются лишь в том случае, когда используется функция полезности стратегически неэквивалентная [1] истинной функции полезности. Тогда с учетом того, что стратегически эквивалентные функции полезности связаны положительным линейным преобразованием [1] и, полагая дважды дифференцируемость функций u и u_1, зададим $\Phi(u, u_1)$ соотношением

$$\Phi(u, u_1) = \int\limits_{Q} (u_1(r) - (a + b \cdot u(r)))^2 dr, \tag{4}$$

где $a, b \in R^1$, $b > 0$. Пусть

$$(a^*, b^*) = \arg\min_{a,b} \Phi(u, u_1). \tag{5}$$

Тогда согласно постановке (2) и (4),(5) величина $\Phi(u, u_1) = \Phi(a^*, b^*)$ определяет меру стратегической неэквивалентности функций u и u_1.

В соответствии с (4) и (5) значение меры стратегической неэквивалентности $\Phi(a^*, b^*)$ отражает степень различия предпочтений, описываемых функциями полезности u и u_1. Таким образом, данная мера может использоваться для оценки устойчивости любой модели (1) с функцией полезности u_1 к отклонениям от допущений о ее виде.

Для решения задачи определения диапазона $[0, \Phi^*]$ устойчивости к отклонениям от вида функции полезности, принимаемого в (1), необходимо уточнить класс U функций, из которого выбирается функция u, стратегически неэквивалентная функции полезности u_1.

Будем полагать, что u_1 дважды дифференцируемая функция полезности, $\varphi(r)$ — дважды дифференцируемая функция, аддитивное воздействие которой на функцию полезности u_1 обеспечивает выход из класса функций стратегически эквивалентных с u_1. При таких предположениях зададим класс U в виде

$$U = \{u(r) = u_1(r) + \gamma \cdot \varphi(r), \gamma > 0\}. \tag{6}$$

Конкретизации $u(r)$ требует определения $\varphi(r)$ и γ. Для решения данной задачи используем свойства классов стратегически эквивалентных функций полезности — функции полезности из одного класса приводят к одной и той же функции локальной несклонности к риску [1]. В нашем случае для нахождения таких $\varphi(r)$ и γ, что $u \in U$ и u_1 стратегически неэквивалентны, должно выполняться следующее соотношение

$$R(r) \neq R_1(r), \tag{7}$$

где $R(r) = -\frac{u''(r)}{u'(r)}$, $R_1(r) = -\frac{u_1''(r)}{u_1'(r)}$ — функции локальной несклонности к риску, определяемые функциями полезности u и u_1 соответственно; u', u'', u_1', u_1'' — первая и вторая производные функций u и u_1 соответственно.

Решение неравенства (7) сводится к решению соответствующего дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(r)$.

При использовании $u(r) \in U$ функционал $\Phi(u, u_1)$ будет выглядеть следующим образом

$$\Phi(u, u_1) = \int\limits_Q (u_1(r) - (a + b \cdot u_1(r) + b \cdot \gamma \cdot \varphi(r)))^2 dr \tag{8}$$

Заметим, что мера стратегической неэквивалентности $\Phi(a^*, b^*)$ возрастает по γ, для всех r, на которых определена $u_1(r)$, если выполнено

$$\gamma > \frac{u_1(r) \cdot (b-1) + a}{b \cdot \varphi(r)} \tag{9}$$

При выполнении условия (9), чем больше значение γ, тем сильнее отличаются предпочтения инвестора, описываемые функциями полезности u и u_1.

Таким образом, при заданных $\varphi(r)$ и $u_1(r)$ нахождение возможной максимальной степени Φ^* отклонения функции $u(r)$ от функции u_1, сводится к задаче определения соответствующего значения γ^*. С учетом монотонной зависимости функционала Φ от γ нахождение значения γ^* может быть легко осуществлено, например, с использованием известных итерационных методов [7].

3. Модель оценки робастности к виду распределения доходности портфеля.

Пусть λ определяет достижимый уровень значимости критерия принятия гипотезы о нормальности распределения доходности портфеля, который на самом деле имеет распределение $V(r) \in W$. Представим класс W с использованием модели Хьюбера грубых ошибок [5], которая описывает множество распределений как искаженные нормальные

$$W = \{V(r) = (1-\lambda) \cdot N_{m,\sigma^2}(r) + \lambda \cdot R_{a,b}(r), \lambda \in (0, 1]\}, \tag{10}$$

где $N_{m,\sigma^2}(r)$ — плотность вероятностей нормального распределения с параметрами m,σ^2; $R_{a,b}(r)$ — плотность вероятностей равномерного распределения в интервале $[a, b]$. В (11) λ интерпретируется как вероятность получения реализации доходности r из равномерного распределения в интервале $[a, b]$, соответственно $(1 - \lambda)$ — из нормального с параметрами m, σ^2. Тогда, согласно данной интерпретации, величина λ может быть использована в качестве меры отклонения распределения доходности портфеля финансовых титулов от нормального.

При указанной спецификации меры отклонения от нормальности задача (3) оценки устойчивости решений по формированию портфеля ценных бумаг к виду распределения его доходности определяется нахождением

$$\lambda^* = \max\{\overline{\lambda} \in (0,1] | \forall \lambda \in [0, \overline{\lambda}] \Rightarrow \Delta \leq \varepsilon\}. \tag{11}$$

С учетом ограниченности множества значений λ и монотонной зависимости (возрастания) величины Δ от λ [6], решение задачи (11) может быть получено с использованием метода деления интервала, содержащего λ, пополам [7].

4. Рекомендации по практическому применению.

Пусть $u(r(x))$ — истинная функция полезности инвестора, $u_1(r(x))$ — некоторая функция полезности, для которой разработан метод поиска оптимального портфеля, $[0, \Phi^*]$ — диапазон устойчивости для функции u_1 при допустимой величине потерь в ожидаемой полезности ε. Рассмотрим возможность использования u_1 в задаче (1) нахождения оптимального портфеля вместо u.

Для этого определяем меру стратегической неэквивалентности $\Phi(a^*, b^*)$ функций u_1 и u в соответствии с (4) и (5). Получив для конкретных функций полезности u_1 и u значение $\Phi(a^*, b^*)$, проверяем принадлежность $\Phi(a^*, b^*)$ диапазону устойчивости $[0, \Phi^*]$. Если $\Phi \leq \Phi^*$, то использование функции полезности u_1 вместо u для нахождения оптимального портфеля возможно.

Для установления на практике допустимости степени отклонения конкретного распределения от нормального требуется, согласно изложенному подходу, определить величину λ и установить ее принадлежность диапазону устойчивости. Один из способов практического определения величины λ состоит в следующем. По выборке доходности портфеля финансовых титулов осуществляется проверка гипотезы об ее принадлежности нормальному распределению по какому-либо критерию согласия [6]. Достижимый уровень значимости данного критерия при принятии гипотезы определяет меру λ отклонения нормального распределения от неизвестного истинного распределения $V(r)$, порождающего анализируемую выборку.

Если полученное $\lambda \leq \lambda^*$ и, следовательно, $\Delta < \varepsilon$, то возможно использование нормального распределения доходности портфеля в модели (1) для нахождения решения вместо истинного (неизвестного) распределения $V(r)$. При этом инвестор потеряет в ожидаемой полезности не больше заданной допустимой величины.

Литература

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: «Радио и связь», 1981.

2. Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. — С.-Пт.: ПИТЕР, 2001.

3. Markowitz H.M. Portfolio selections. Journal of Finance, 1952, May.

4. Агасандян Г.А. Элементы многопериодной портфельной модели. — М.: Вычислительный центр РАН, 1997.

5. Huber P.J. Robust statistics: a review. — Ann. Math. Statist., 1972, 43, 1041-1067.

6. Боровков А.А. Математическая статистика: оценка параметров, проверка гипотез. — М.: Наука, 1984.

7. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1985.