УДК 517.11

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИИ ДЛЯ ДЕДУКЦИОННЫХ ТЕОРЕМ В НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

А.В. Чагров

Кафедра общей и прикладной алгебры и геометрии

Some questions about effective variants of deduction theorem for normal modal logics are discussed. An external deduction theorem for minimal normal modal logic $\mathbf{K}$ — *a formula ψ is deducible from φ in $\mathbf{K}$ iff the formula $\Box^*\varphi \to \psi$ belongs to the dynamic logic* — is proved.

Обсуждаются некоторые эффективные варианты теорем о дедукции для нормальных модальных логик. Доказана внешняя теорема о дедукции для минимальной нормальной модальной логики $\mathbf{K}$: *формула ψ выводима в $\mathbf{K}$ из φ в точности тогда, когда формула $\Box^*\varphi \to \psi$ принадлежит динамической логике.*

Когда формулируется то или иное логическое исчисление, обычно встает вопрос о выборе типа исчисления — использовать ли систему гильбертовского типа, или систему натурального вывода, или секвенциальный подход. Традиционно при исследовании классов логик, когда возникает необходимость учёта соотношений типа включений (а включения предполагаются, прежде всего, для множеств выводимых формул, но не правил вывода), удобнее использовать исчисления гильбертовского типа — минимум правил вывода, а основная «тяжесть ответственности» за аксиоматизируемые свойства логических связок ложится на выбираемые аксиомы (или схемы аксиом). Однако при таком подходе неизбежно возникает трудность с построением выводов в конкретных исчислениях. Для примера достаточно вспомнить хрестоматийный вывод формулы $p \to p$ в исчислениях со схемами аксиом $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ и единственным правилом вывода *modus ponens*; хотя сам вывод и несложен (всего пять формул), но вряд ли можно считать его естественным. Отчасти спасает так называемая теорема о дедукции, которая, кстати, в некоторых формах явно участвует в генценовских формулировках логических систем. Вполне разумно поэтому, имея в виду решение вопроса о выводимости в данной системе, точнее — решение проблемы поиска вывода, например, с помощью переформулировки данной системы гильбертовского типа в виде системы, более приспособленной для поиска вывода, выяснить наличие теоремы о дедукции для исходной системы.

Ниже везде идет речь об исчислениях гильбертовского типа. В частности, всякая нормальная модальная логика задается следующим образом. Полагаем, что в качестве схем аксиом и правил вывода берутся: какой-нибудь набор схем аксиом, обеспечивающий полноту классического исчисления высказываний с единственным правилом вывода *modus ponens*, модальная схема аксиом $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, быть может, еще какие-либо схемы аксиом и ровно два правила вывода — *modus ponens* и правило Геделя $\varphi/\Box\varphi$. Разумеется, всегда, говоря о схемах аксиом, мы подразумеваем, что они задаются над соответствующим языком — модальным в случае модальных логик, безмодальным в случае классической логики и т.д. Еще одно соглашение, обычно принимаемое «по умолчанию»: вместо «дополнительных схем аксиом» говорят о «дополнительных аксиомах» и в соответствии с этим пишут, к примеру, вместо схемы $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$, где α — произвольная формула, формулу $\Box p \to \Box\Box p$, считая, что в нее можно вместо переменной p подставлять произвольные формулы.

Обычная теорема о дедукции для классического исчисления высказываний (для имеющегося здесь в виду определения классического исчисления в предыдущем абзаце нужно опустить все упоминания про модальную и «еще какие-либо» схемы и правило Геделя) позволяет сводить вопрос о производности правила вывода к выводимости некоторой формулы: правило вывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$ производно (то есть из гипотез $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно вывести ψ) в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда в нем выводима формула $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi)\ldots))$. Таким образом, поскольку классическая логика разрешима, то разрешима и проблема производности в ней правил вывода, причем алгоритм выяснения производности правил вывода по сложности таков же как и для выяснения выводимости.

Похожая ситуация и во многих стандартных нормальных модальных логиках. Так, если нормальная модальная логика L содержит **K4**, которая получается из минимальной нормальной модальной логики добавлением аксиомы $\Box p \to \Box\Box p$, то для нее теорема о дедукции выглядит следующим образом:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \iff \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \to \psi.$$

(В дальнейшем можно считать, что $\Gamma = \varnothing$, поскольку для наших целей этого достаточно. Скажем, при рассмотрении проблемы производности правил вывода мы, ввиду возможности соединения формул в конъюнкцию, вполне можем обойтись однопосылочными правилами.) И так же как, и для классической логики, разрешимость самой логики **K4** с помощью этой теоремы о дедукции позволяет установить разрешимость и проблемы производности в **K4** правил вывода. Отметим ключевую роль здесь того факта, что в правой части эквивалентности стоит формула, *фиксированным образом* полученная из формул из левой части. Точнее, если обозначить $\chi(p, q) = p \wedge \Box p \to q$, то теорему о дедукции для логики L, расширяющей **K4**, можно переписать так:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \iff \Gamma \vdash_L \chi(\varphi, \psi).$$

В общем случае можно было бы рассматривать вопрос о теореме о дедукции для логики L как вопрос о существовании формулы $\chi(p, q)$ с указанным свойством. Этот вопрос в свое время получил неожиданный и тем не менее естественный ответ (см. об этом в [1] и/или [2]): такая формула $\chi(p, q)$ для логики L существует тогда и только тогда, когда L принадлежит какая-нибудь формула вида $p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p \wedge \ldots \Box^n p \to \Box^{n+1} p$, причем тогда можно полагать, что $\chi(p, q) = p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p \wedge \ldots \Box^n p \to q$.

А как быть в том случае, когда такой фиксированной формулы $\chi(p, q)$ нет? Ответ не столь уж оптимистичен. Конечно, для всякой нормальной модальной логики L справедлива теорема о дедукции в следующей форме:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \iff \exists n\, \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi,$$

однако квантор существования здесь весьма (невольный каламбур) существенен: *a priori* нет никаких эффективных методов подтверждения существования или отсутствия требуемого n. Например, автором в [3] (см. раздел 16.7) построена разрешимая нормальная модальная логика, для которой проблема производности правил вывода неразрешима.

С другой стороны, для стандартных нормальных модальных логик удается упомянутый квантор существования эффективизировать, установив верхнюю границу для его параметра в зависимости от размеров участвующих в утверждении о выводимости формул [3]. Приведем точную формулировку эффективной теоремы о дедукции для **K**:

$$\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi \iff \exists n \, (n \le 2^{|\mathbf{Sub}\varphi \cup \mathbf{Sub}\psi|} \,\&\, \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi),$$

где $\mathbf{Sub}\varphi$ и $\mathbf{Sub}\psi$ — множества подформул формул φ и ψ, соответственно, а $|\mathbf{Sub}\varphi \cup \mathbf{Sub}\psi|$ — количество всех этих подформул. В результате мы вновь получаем эффективный способ распознавать производность правил вывода в рассматриваемой логике. Правда, в отличие от ситуации, когда существовала фиксированная формула $\chi(p,q)$, см. выше, из-за экспоненты в формулировке эффективной теоремы о дедукции для **K** сложность алгоритма, распознающего производность в **K** правил вывода, оказывается существенно выше сложности алгоритма, выясняющего принадлежность формулы логике **K**. Более того, эту экспоненциальную оценку, по-видимому, невозможно понизить существенно ввиду того, что проблема производности правил вывода в **K** является $\boldsymbol{EXPTIME}$-полной, см. [4], в то время как проблема выводимости в **K** «всего лишь» $\boldsymbol{PSPACE}$-полна, см. [5]. Аналогична ситуация с этими вопросами и в других логиках, скажем, в $\mathbf{T} = \mathbf{K} + \Box p \to p$, в $\mathbf{D} = \mathbf{K} + \Box p \to \Diamond p$.

Варианты теоремы о дедукции, о которых шла речь до сих пор, уместно называть *внутренними теоремами о дедукции*: в самой рассматриваемой системе оказывались средства говорить о выводимости из гипотез в этой системе. Теперь обратимся к иной возможности обсуждать в рамках формальных систем выводимость из гипотез в других системах — к типу утверждений, которые можно было бы называть *внешними теоремами о дедукции*. Впервые о возможности такого рода утверждений автор услышал от М.Крахта в августе 1994 года, но до сих пор не встречал в литературе формулировок (и доказательств[1]) утверждений, подобных приводимому ниже.

Прежде всего обратим внимание на то, что при выводе из гипотез у нас нет никаких ограничений на размеры совокупности гипотез: множество гипотез может быть даже бесконечным. Конечно, реально в выводе мы *не можем использовать все гипотезы* из бесконечной совокупности, но *можем использовать сколь угодно много*. Поясним это.

При использовании одного лишь правила *modus ponens* для любой рассматриваемой логики выводимость формулы ψ из гипотезы φ равносильна выводимости импликации $\varphi \to \psi$. Поэтому приводимые выше теоремы о дедукции можно интерпретировать как утверждение об элиминации правила Геделя при подходящем изменении совокупности гипотез. Допустим, что нам нужно вывести с помощью правила *modus ponens* и правила Геделя из гипотезы φ формулу ψ. Это равносильно тому, чтобы вывести формулу ψ из бесконечного множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \ldots\}$ уже без применения правила Геделя[2]. И если бы у нас были формульные средства записи бесконечной конъюнкции в формулах, то мы могли записать последний факт

[1]Это не оговорка. Часто бывает, что доказательство дает больше, чем требует доказываемое утверждение.

[2]Чтобы сохранить конечность понятийного аппарата выводимости, можно факт выводимости из этого бесконечного множества формулировать так: «формула ψ выводится из подходящего конечно-

в виде выводимости соответствующей импликации. В самих нормальных модальных логиках таких средств нет!

Пора вспомнить, что содержательные бесконечные конъюнкции вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge \ldots$ удавалось формализовывать средствами логик с конечноместными пропозициональными связками. А именно, такая задача решалась при описании итерации в динамических логиках.

Воспользуемся решением этой задачи, содержащимся в [6] (или в более ранней работе [7]). При этом нам будет достаточен фрагмент динамической логики, в котором всего одна программа (действие) и ее (его) итерация. В соответствии с этим опустим все ненужные нам здесь детали, что, в частности, позволит нам, слегка изменив обозначения, сделать их менее громоздкими.

Логика $\mathbf{K}^*$ — это нормальная бимодальная логика, ее модальностями являются $\Box$ (обычная необходимость) и $\Box^*$ (подразумеваемый смысл: $\Box^*\varphi$ означает то же, что и бесконечная конъюнкция $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge \ldots$). Семантика Крипке для $\mathbf{K}^*$ определяется как и для обычных нормальных модальных логик, но с указанием, что формула $\Box^*\varphi$ истинна в мире a данной шкалы при данной оценке, если формула φ истинна во всякой точке, достижимой из a за произвольное конечное число шагов (в частности, за 0 шагов, то есть в самой точке a). Аксиоматизация логики $\mathbf{K}^*$ нам сейчас не важна, но для полноты картины приведем некоторый ее вариант: в качестве схем аксиом берутся те же, что и для $\mathbf{K}$ (в языке, обогащенном модальностью $\Box^*$), а также схемы $\Box^*p \leftrightarrow p \wedge \Box\Box^*p$, $p \to (\Box^*(p \to \Box p) \to \Box^*p)$, в качестве правил вывода берутся *modus ponens* и правила Геделя для обеих модальностей. В упомянутых сочинениях показано, в частности, что логика $\mathbf{K}^*$ полна относительно корневых конечных шкал Крипке[3], а потому и просто полна по Крипке, и, кроме того, разрешима.

Нужную нам связь $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}^*$ устанавливает

Теорема 1. *Для всяких формул φ и ψ, не содержащих модальности $\Box^*$, справедливо:*

$$\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi \iff \mathbf{K}^* \vdash \Box^*\varphi \to \psi.$$

Утверждение этой теоремы и предлагается расценивать как внешнюю теорему о дедукции для логики $\mathbf{K}$. Ввиду разрешимости $\mathbf{K}^*$ эта теорема является эффективной и, в частности, позволяет распознавать производность в $\mathbf{K}$ правил вывода.

Итак, докажем сформулированную теорему.

Предположим, что $\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi$. Тогда по теореме о дедукции для нормальных модальных логик найдется такое n, что логике $\mathbf{K}$ принадлежит формула $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi$, а потому и формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^m\varphi \to \psi$ при всех $m \geq n$. Допустим теперь противное доказываемому, то есть что формула $\Box^*\varphi \to \psi$ не принадлежит $\mathbf{K}^*$. В соответствии с полнотой $\mathbf{K}^*$ относительно конечных шкал Крипке найдется такая шкала $\mathbf{K}^*$, в корне которой при некоторой оценке истинна

го подмножества множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \ldots\}$». Здесь «подходящего» по существу и есть тот самый квантор существования, который участвует в формулировке общей теоремы о дедукции для нормальных модальных логик.

[3]Напомним, что мир шкалы называется ее корнем, если из него всякий другой мир этой шкалы достижим за конечное число шагов по отношению достижимости. Шкал с корнями (корневых шкал) всегда достаточно при рассмотрении полных по Крипке логик, причем можно считать, что опровержимые формулы опровергаются именно в корнях подходящих шкал.

формула $\Box^*\varphi$, но опровергается ψ. Ввиду истинности в корне $\Box^*\varphi$ мы получаем, что формула φ истинна во всех точках шкалы, а значит, в корне шкалы истинны все формулы вида $\Box^i\varphi$, то есть мы получили, что в корне опровергаются все формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi$, и потому они не могут принадлежать $\mathbf{K}$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, то есть на самом деле формула $\Box^*\varphi \to \psi$ принадлежит $\mathbf{K}^*$.

Теперь предположим, что ψ не выводится из φ в $\mathbf{K}$, то есть $\mathbf{K}$ не принадлежит ни одна из формул вида $\varphi\wedge\Box\varphi\wedge\Box\Box\varphi\wedge\ldots\Box^n\varphi \to \psi$, и покажем, что формула $\Box^*\varphi \to \psi$ не принадлежит $\mathbf{K}^*$. Для этого воспользуемся известной полнотой $\mathbf{K}$ относительно конечных интранзитивных деревьев[4].

Пусть $p_0, \ldots, p_k$ — все переменные, входящие в формулы φ и ψ. Рассмотрим класс моделей C' для модального языка с этими переменными, основанными на конечных интранзитивных деревьях, которые в этом классе не имеют p-морфных образов (или редуктов в терминологии [3]). Обозначим d_n модальную глубину формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi$. Для всякого n ($n \in \omega$) будем обозначать C_n класс моделей из C', опровергающих $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \Box^n\varphi \to \psi$ в своих корнях и имеющих глубину, не превосходящую d_n. Ясно, что все классы C_n непусты и конечны (это легко доказывается индукцией по глубине). Определим бинарное отношение S на множестве $C = \bigcup_{n<\omega} C_n$: для $M' \in C_n$ и $M'' \in C_{n+1}$ полагаем, что $M'SM''$, если M' и M'' изоморфны или M' является p-морфным образом модели, получаемой из M'' удалением миров, достижимых из ее корня более чем за d_n шагов. Ввиду конечности всех классов вида C_n, что всякая модель в C имеет лишь конечное множество S-последователей. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: класс C конечен. Тогда существует некоторая модель M в C, в корне которой опровергаются все формулы вида $\varphi\wedge\Box\varphi\wedge\Box\Box\varphi\wedge\ldots\Box^n\varphi \to \psi$. Ясно, что тогда в этом же корне опровергается и формула $\Box^*\varphi \to \psi$, то есть она не принадлежит $\mathbf{K}^*$.

Случай 2: класс C бесконечен. Тогда по лемме Кенига мы имеем бесконечную S-возрастающую последовательность $M_1SM_2SM_3S\ldots$ моделей из C. Нужную нам модель хотелось бы получить как «предел» этой последовательности. Однако этому мешает тот факт, что элементы этой последовательности непосредственно не связаны друг с другом своей «геометрией»: если $M_iS^nM_j$, то вполне может быть, что M_j не является «продолжением» M_i. Чтобы устранить этот дефект, сделаем эти модели в определенном смысле однородными. Для этого для каждого i заменяем в модели M_i каждый мир счетным множеством копий: сначала так поступаем с самыми верхними мирами (мирами глубины 0) — заменяем каждый такой мир на счетную совокупность миров с той же оценкой переменных, полагая, что все они достижимы из того же мира, что и в исходной модели, затем в получившейся модели каждую подмодель, порождаемую миром глубины 1, заменяем на счетную совокупность подмоделей с той же оценкой переменных, полагая, что их корни достижимы из того же мира, что и в предыдущей модели, затем аналогично поступаем с подмоделями, порождаемыми мирами глубины 2, и т.д. В результате получаем последовательность моделей $N_1, N_2, N_3, \ldots$ (N_i получена из M_i). Поскольку наши преобразования моделей были обратными p-морфизмами, модель M_i является p-морфным образом N_i, а значит, в

[4]Напомним, что шкала с корнем является иррефлексивным интранзитивным деревом, если в ней для любых двух миров имеется не более одного способа попасть из одного из них в другой по отношению достижимости, то есть если $xRa_1Ra_2\ldots a_kRy$ и $xRb_1Rb_2\ldots b_lRy$, то $k = l$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots a_k = b_k$. Всякая интранзитивная шкала, конечно же, иррефлексивна.

мирах N_i истинны в точности те же формулы, что и в их прообразах при копировании из M_i. Вторым достоинством полученной последовательности является то, что N_{i+1} получается из N_i присоединением каких-то верхних миров, то есть N_{i+1} — продолжение N_i. Если теперь взять модель N как объединение («предел») всех моделей N_i, то в ее корне будут опровергаться все формулы вида $\varphi\wedge\Box\varphi\wedge\Box\Box\varphi\wedge\ldots\Box^n\varphi\to\psi$, то есть опровергается ψ и истинны все формулы вида $\Box^n\varphi$. Последнее означает, что формула φ истинна во всех мирах модели M, а потому в корне M истинна формула $\Box^*\varphi$. В результате мы получаем опровержение в корне M формулы $\Box^*\varphi\to\psi$, то есть вновь мы получили, что эта формула не принадлежит $\mathbf{K}^*$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Zakharyaschev M., Wolter F. Chagrov A. Advanced Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic, 2nd Ed. Kluwer Academic Publishers, 2001. V. 3. P. 83–266.

[2] Blok W., Pigozzi D. On the structure of varieties with equationally definable principal congruences. I // Algebra Universalis. 1982. V. 15. P. 195–227.

[3] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[4] Spaan E. Complexity of Modal Logics. PhD thesis. Department of Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, 1993.

[5] Ladner R.E. The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. 1977. V. 6. P. 467–480.

[6] Сегерберг К. «После» и «во время» в динамической логике // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984.

[7] Segerberg K. A completeness theorem in the modal logic of programs // Universal Algebra and Application. Warsaw: PWN, 1982. P. 31–46.