УДК 519.2

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ФОРМЕ ЧОВЕРА ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ[1]

Ю.С. Хохлов

Кафедра математической статистики и эконометрики

The Chover-type law of iterated logarithm for weighted sums of independent identically distributed random variables, whose distributions belong to the domain of strict normal attraction of stable law with index α, $0 < \alpha < 2$, is proved.

Доказан закон повторного логарифма в форме Човера для взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, распределения которых принадлежат области строгого нормального притяжения устойчивого закона с показателем α, $0 < \alpha < 2$.

Введение. В теории вероятностей известны три фундаментальные предельные теоремы. Это закон больших чисел, центральная предельная теорема и закон повторного логарифма. В классической ситуации закон повторного логарифма можно сформулировать в следующем виде. Пусть мы имеем последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных (н.о.р.) вещественных случайных величин (с.в.), таких, что $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 = \mathbf{D}(X_1) = 1$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Условия $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ означают, что распределение $\mathcal{L}(X_1)$ с.в. X_1 принадлежит области нормального притяжения гауссовского предельного закона, причем притяжение понимается в строгом смысле. Другими словами,

$$\mathcal{L}(n^{-1/2}S_n) \Rightarrow \mu,$$

при $n \to \infty$, где μ — стандартное нормальное распределение, а «$\Rightarrow$» обозначает слабую сходимость. В 1965 году Човер [1] предложил следующее обобщение закона повторного логарифма для с.в. с устойчивым распределением. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность н.о.р.с.в., имеющих строго устойчивое распределение с показателем $\alpha \in (0, 2)$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \left|(n \log n)^{-1/\alpha} S_n\right|^{\frac{1}{\log\log n}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Недостатком этого результата является то, что он сформулирован для с.в., которые имеют строго устойчивое распределение. В классическом же законе повторного логарифма, сформулированном выше, $\mathcal{L}(X_1)$ удовлетворяет более слабому условию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00949, 02-01-01080).

– оно принадлежит области нормального притяжения гауссовского закона. Позднее Д. Вайнером [2] результат Човера был обобщен на многомерную ситуацию, когда мы имеем последовательность н.о.р. случайных векторов (с.в.), но опять же имеющих строго операторно устойчивое распределение. К. Васудева [3] доказал закон повторного логарифма в форме Човера для н.о.р.с.в., распределения которых принадлежат области нормального притяжения строго устойчивого распределения в R^1. В работе автора [4] этот результат был перенесен на многомерную ситуацию. Недавно появились результаты, когда закон повторно логарифма в форме Човера доказывается для рядов случайных величин, где суммирование понимается в некотором обобщенном смысле (см., например, [5]). Но в этих работах, как и ранее, предполагается, что случайные величины имеют устойчивое распределение. В нашей работе мы устраняем этот недостаток и доказываем результат для н.о.р.с.в., распределения которых принадлежат области нормального притяжения строго устойчивого закона.

1. Постановка задачи. Пусть мы имеем последовательность действительных чисел $\{p_n, n \geq 0\}$, которая удовлетворяет следующим условиям: $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$, $n \geq 1$, и ряд

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n \tag{1}$$

имеет радиус сходимости равный единице. Пусть, далее, $\{s_n\}$ есть последовательность вещественных (или комплексных) чисел и s – вещественное (или комплексное) число.

Будем говорить, что последовательность $\{s_n\}$ (J_p)-сходится к s, если:

1) ряд $p_s(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n p_n t^n$ сходится для $|t| < 1$;

2) $p_s(t)/p(t) \to s$ при $t \to 1-$.

В этом случае мы будем писать $s_n \to s(J_p)$. Заметим, что метод суммирования Абеля есть частный случай этого определения, когда $p_n = 1$, $n \geq 0$.

Всюду далее мы рассматриваем только такие последовательности $\{p_n\}$, которые обладают следующим свойством:

$$p_n = n^{\gamma} L(n) \ , \ n \to \infty \ , \tag{2}$$

где $\gamma > -1/\alpha$, а $L(n)$ есть медленно меняющаяся функция.

Основным результатом нашей работы является

Т е о р е м а 1. *Пусть $\{p_n\}$ есть последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям, а $\{X_n\}$ есть последовательность н.о.р.с.в., распределения которых принадлежат области строгого нормального притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α, $0 < \alpha < 2$. Тогда*

$$\limsup_{t \to 1-} \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n X_n \right) \Big/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\alpha} t^{n\alpha} \right) \right|^{\left(\log\log \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^{\alpha} t^{n\alpha}\right)^{-1}} = e^{1/\alpha} \quad \text{п.н.}$$

При доказательстве нашей теоремы мы будем следовать схеме доказательства, предложенной в [1] (см. также [8]).

2. Вспомогательные результаты. В этом разделе мы соберем некоторые вспомогательные результаты, которые нам потребуются для доказательства теоремы 1. Они часто применяются в других задачах и, в силу этого, являются интересными и сами по себе.

Лемма 2. *Пусть с.в. Y с распределением из области строгого нормального притяжения устойчивого распределения с показателем α, $0 < \alpha < 2$, имеет характеристическую функцию $\varphi(y)$. Тогда существует такая положительная константа C_1, что для всех вещественных y справедливо неравенство*

$$|\varphi(y) - 1| \leq C_1|y|^{\alpha}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть с.в. Y имеет характеристическую функцию $\varphi(y)$, для которой справедливо неравенство (1). Тогда существует такая положительная константа C_2, что для всех положительных x справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(|Y| > x) \leq C_2 x^{-\alpha}.. \tag{4}$$

Для упрощения формулировок обозначим $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_n^{\alpha} t^{n\alpha}$.

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 существует такая положительная константа C_3, что для всех положительных x имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\left|\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k X_k\right) / [B(t)]^{1/\alpha}\right| > x\right) \leq C_3 x^{-\alpha} \tag{5}$$

равномерно по $t \in (0, 1)$.

Леммы 2–4 доказаны в [6] (см. также [7]). В нашем случае, когда мы имеем независимые и одномерные случайные величины, можно привести, конечно, более простые доказательства.

Обозначим

$$t = e^{-\frac{1}{s}}, \quad s > 0, \quad V(s) = B(t), \quad \tilde{P}_X(s) = P_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k X_k.$$

Используя свойства правильно меняющихся функций, можно показать, что

$$V(s) \sim C_4 s^{\alpha\gamma+1}[L(s)]^{\alpha} \tag{6}$$

при $s \to \infty$ (см. [9]).

Аналогично тому, как это сделано в [4], можно доказать следующие две леммы.

Лемма 5. *В условиях теоремы 1 существует такая константа $R > 0$, что для всех $a > 0$, $u > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq u} \left|(V(u))^{-1/\alpha} \tilde{P}_X(s)\right| \geq a\right) \leq 2\mathbf{P}\left(\left|(V(u))^{-1/\alpha} \tilde{P}_X(u)\right| \geq a/R\right).$$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\{s_n\}$ есть возрастающая последовательность положительных чисел, такая, что $s_n \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{s_n\to\infty}\left|(V(s_n))^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s_n)\right|>1\right)=0$$

влечет

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|(V(s_n)[\ln V(s_n)])^{-1/\alpha}\right|>1\right)<\infty\,.$$

3. Доказательство теоремы. Сначала мы докажем оценку сверху. Для этого достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{s\to\infty}\left\{\left|\left(V(s)[\ln V(s)]^{1+\varepsilon}\right)^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>1\right\}\right)=0\,.$$

Для $r=1,2,\ldots$ определим события

$$B_r=\left\{\max_{2^r\le s\le 2^{r+1}}\left|\left(V(s)[\ln V(s)]^{1+\varepsilon}\right)^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>1\right\}\,.$$

Легко видеть, что

$$\limsup_{s\to\infty}\left\{\left|\left(V(s)[\ln V(s)]^{1+\varepsilon}\right)^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>1\right\}\subset\limsup_{r\to\infty}B_r\,.$$

Используя леммы 3 и 4 и соотношение (6), мы получаем

$$\mathbf{P}(B_r)\le\mathbf{P}\left(\max_{1\le s\le 2^{r+1}}\left|\left(V(2^r)[\ln V(2^r)]^{1+\varepsilon}\right)^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>1\right)$$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le s\le 2^{r+1}}\left|(V(2^{r+1}))^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>\left(\frac{V(2^{r+1})}{V(2^r)[\ln V(2^r)]^{1+\varepsilon}}\right)^{-1/\alpha}\right)$$

$$\le 2\mathbf{P}\left(\left|(V(2^{r+1}))^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(2^{r+1})\right|>\left(\frac{V(2^{r+1})}{V(2^r)[\ln V(2^r)]^{1+\varepsilon}}\right)^{-1/\alpha}\cdot\frac{1}{R}\right)$$

$$\le C_5\cdot r^{-(1+\varepsilon)}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_r)<\infty\,.$$

Применяя лемму Бореля-Кантелли, получаем необходимый результат.

Докажем теперь нижнюю оценку. Предположим, что неравенство

$$\limsup_{s\to\infty}\left|(V(s)[\ln V(s)])^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|<1$$

выполняется с положительной вероятностью. Тогда в силу закона нуля и единицы это неравенство имеет место и с вероятностью единица. Это означает, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{s\to\infty}\left|(V(s)[\ln V(s)])^{-1/\alpha}\tilde{P}_X(s)\right|>1\right)=0\,.$$

Пусть $\{s_n\}$ есть последовательность положительных чисел, такая, что $s_n \to \infty$. Используя лемму 5, мы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|(V(s_n)[\ln V(s_n)])^{-1/\alpha} X_n\right| > 1\right) < \infty . \tag{7}$$

Так как распределение с.в. X_n принадлежит области строгого нормального притяжения устойчивого закона с параметром α, $0 < \alpha < 2$, то для некоторой константы C_6

$$\mathbf{P}(|X_n| > x) \sim C_6 \cdot x^{-\alpha}, \ x \to \infty . \tag{8}$$

Из соотношения (8) следует, что для вероятностей в (7) мы получаем

$$\mathbf{P}\left(\left|(V(s_n)[\ln V(s_n)])^{-1/\alpha} X_n\right| > 1\right) \sim C_7 \cdot (V(s_n)[\ln V(s_n)])^{-1}$$
$$\sim C_8 s_n^{-(\alpha\gamma+1)}/L_1(s_n) , \tag{9}$$

где $L_1(s)$ есть медленно меняющаяся при $s \to \infty$ функция. В работе [5] показано: если верно соотношение (9), существует такая последовательность $\{s_n\}$, для которой вероятности в (7) имеют порядок $(n\log(n))^{-1}$, что противоречит сходимости ряда.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] Chover J. A law of the iterated logarithm for stable summands // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. P. 441–443.

[2] Weiner D. A maximal law of the iterated logarith for operator-normalized stochastically compact partial sums of i.i.d. random vectors // Probability in Banach Spaces V. Lecture Notes in Math. 1985. V. 1153. P. 426–439.

[3] Vasudeva R. Chover's law of iterated logarithm and weak convergence. // Acta Math. Hung. 1984. V. 44. P. 215–221.

[4] Хохлов Ю.С. Закон повторного логарифма для случайных векторов с операторно устойчивым предельным законом // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн. 1985. № 3. С. 62–67.

[5] Chen Pingyan. The Chover-type Law of Iterated Logarithm for Certain Power Series // Теория вероятностей и ее применение. 2003. Т. 48 (в печати).

6 Khokhlov Yu.S. Domain of normal attraction of stable distribution on semidirect product of compact group and R^d // Stability Problems for Stochastic Models. Perm, 1992. Moscow-Utrecht, 1994. P. 84–94.

7 Гринцевичюс А. Об области нормального притяжения устойчивого закона для группы движений евклидова пространства // Лит. мат. сборник. 1985. Т. 25. № 3. С. 39–52.

[6] Heyde C.C. A note concerning the behavior of iterated logarith type // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 23. P. 85–90.

[7] Kiesel R. The laws of the iterated logarithm for certain power series and generalized Norlund methods // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1996. V. 120. P. 735–753.