УДК 519.95

РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЧЕТКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН[1]

М.Ю. Хохлов, А.В. Язенин
Кафедра информатики

This paper is devoted to investigation of fuzzy random variables. Its representation based on shift-scaled family of possibilistic distributions are developed. Methods for calculation of mathematical expectation, variance and covariance of fuzzy random variables are proposed.

В работе исследуются нечеткие случайные величины. Получены их представления на основе сдвиг-масштабного семейства возможностных распределений. Предлагаются методы расчета математического ожидания, дисперсии и коэффициентов ковариации нечетких случайных величин.

Введение. Нечеткая случайная величина есть математическая модель случайного эксперимента с нечетким исходом. Ее определению и изучению свойств посвящен ряд работ [1–4] и др. В них, наряду с определением нечеткой случайной величины, вводятся определения ее математического ожидания, изучаются его свойства и предлагаются способы его вычисления в ряде частных случаев. Однако по-прежнему ряд важных вопросов, таких, как способ представления нечеткой случайной величины, разработка исчисления нечетких случайных величин, остается открытым. Это обстоятельство явно сдерживает применение нечетких случайных величин для моделирования комбинированного типа неопределенности в задачах принятия решений.

При решении прикладных задач нас, наряду с математическим ожиданием нечетких случайных величин, интересуют их дисперсия и коэффициенты ковариации. В данной работе, как нам представляется, получено продвижение в этом вопросе. Нами получен метод представления нечеткой случайной величины на основе сдвиг-масштабного семейства возможностных распределений. Для такого представления нечеткой случайной величины получены методы расчета ее математического ожидания, дисперсии и коэффициентов корреляции.

1. Нечеткие случайные величины и их распределения. Следуя [1, 2], введем необходимые определения и понятия.

Пусть Γ есть множество элементов, обозначаемых далее через $\gamma \in \Gamma$, $\mathrm{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ.

Определение 1. *Мерой возможности называется функция множеств $\pi : \mathrm{P}(\Gamma) \to E^1$, обладающая свойствами:*

$$1)\ \pi\{\varnothing\} = 0, \quad \pi\{\Gamma\} = 1;$$

$$2)\ \pi\{\bigcup_{i\in I} A_i\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I и множеств $A_i \in \mathrm{P}(\Gamma)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 98-01-00212).

Триплет (Г, Р (Г) , П) называется возможностным пространством.

Определение 2. *Возможностной (нечеткой) переменной (величиной) называется отображение* $Z : \Gamma \to E^1$. *Распределением возможностных значений переменной* Z *называется функция* $\mu_Z : E^1 \to E^1$, *определяемая по правилу:*

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z\} \quad \forall z \in E^1.$$

$\mu_Z(z)$ есть возможность того, что переменная Z может принять значение z.

Из последнего определения и свойств возможностной меры следует, что

$$a)\ 0 \le \mu_Z(z) \le 1 \quad \forall z \in E^1; \quad b)\ \sup_{z \in E^1} \mu_Z(z) = 1.$$

Определение 3. *Носителем возможностной переменной* Z *называется множество* $\operatorname{supp}(Z) = \{z \in E^1 : \mu_Z(z) > 0\}$.

Пусть $g(\cdot) : E^1 \to E^1$, Z — возможностная переменная, определенная на (Г, Р(Г), π). Тогда $g(Z)$ также является возможностной переменной [1] и

$$\mu_{g(Z)}(z) = \sup_{u: g(u) = z} \mu_Z(u) \quad \forall z \in E^1. \tag{1}$$

Для $g^{-1}(z) = \varnothing$ полагаем $\mu_{g(Z)}(z) = 0$. Формула (1) дает способ определения распределения функции возможностной переменной.

Опираясь на результаты [2, 5] дадим определение нечеткой случайной величины и ее интерпретацию.

Пусть (Ω, B, P) есть вероятностное пространство.

Определение 4. *Нечеткая случайная величина* X *есть вещественная функция*

$$X(\cdot, \cdot) : \Omega \times \Gamma \to E^1,$$

такая, что при любом фиксированном $\gamma \in \Gamma$, *величина* $X_\gamma = X(\omega, \gamma)$ *является случайной величиной на* (Ω, B, P).

Из приведенного определения следует две интерпретации.

При фиксированном $\omega \in \Omega$ мы получаем нечеткую величину $X_\omega = X(\omega, \gamma)$. То есть мы имеем случайную величину, значениями которой являются нечеткие величины, описываемые возможностными распределениями $\mu_X(x, \omega)$.

При фиксированном γ мы можем рассматривать X_γ как случайную величину с возможностью, определяемой мерой возможности П.

Все сказанное выше становится более ясным, когда рассматриваемое распределение $\mu_X(x, \omega)$ будет определяться как в случае нечеткой переменной:

$$\mu_X(x, \omega) = \pi\{\gamma \in \Gamma : X(\omega, \gamma) = x\} \quad \forall x \in E^1.$$

Теперь каждому ω отвечает возможностное распределение, представляющее случайный выбор эксперта, который дает неопределенную, субъективную оценку при определенном количестве.

С другой стороны, фиксируя γ, имеем, что X есть случайная величина, при этом мы не уверены в значении ее распределения.

В контексте принятия решений понятие математического ожидания играет решающую роль для объяснения случайной информации. Определить математическое ожидание $E\{X(\omega,\gamma)\}$ нечеткой случайной величины $X(\omega,\gamma)$ можно различными способами.

Мы определим распределение ожидаемого значения нечеткой случайной величины в соответствии с [2], через усредненную случайную величину:

$$\mu_{EX}(x) = \Pi\{\gamma \in \Gamma : E\{X(\omega,\gamma)\} = x\} \quad \forall x \in E^1.$$

Как показано в [6], определяемое таким образом ожидаемое значение нечеткой случайной величины обладает основными свойствами, характерными для математического ожидания обычных случайных величин.

2. Представление нечетких случайных величин и расчет их числовых характеристик. Рассмотрим сначала отдельную нечеткую случайную величину $X(\omega,\gamma)$. Интересным для приложений является ее представление в виде

$$X(\omega,\gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega)\,X_0(\gamma)\,, \tag{2}$$

где $a(\omega)$, $\sigma(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P), имеющие конечные моменты второго порядка, а $X_0(\gamma)$ — нечеткая (возможностная) величина, определенная на возможностном простанстве $(\Gamma,\ \mathrm{P}(\Gamma),\ \Pi)$.

Пусть $X_0 \in Tr(0,1)$, то есть X_0 характеризуется триангулярной функцией распределения:

$$\mu_{X_0}(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что нечеткая величина X_0 имеет модальное значение равное 0, а коэффициент нечеткости 1.

Представление (2) нечеткой случайной величины будем называть сдвиг-масштабным. В данном случае параметры $a(\omega)$, $\sigma(\omega)$ — параметры сдвига и масштаба — являются, в конечном итоге, модальным значением и коэффициентом нечеткости нечеткой величины

$$X_\omega = X(\omega,\gamma) \in Tr(a(\omega),\sigma(\omega))\,.$$

Пусть $E(a) = a_0$, $E(\sigma) = \sigma_0$. Тогда на основании [2] $E(X) = a_0 + \sigma_0 X_0$ и

$$\mu_{EX}(t) = \mu_{X_0}((t-a_0)/\sigma_0) \quad \forall t \in E^1,$$

где E^1 — числовая прямая.

Получим формулу для определения дисперсии $D(X)$ нечеткой случайной величины $X(\omega,\gamma)$ как функцию нечеткой величины X_0 :

$$\begin{aligned} D(X) &= D(a+\sigma X_0) = E(a+\sigma X_0 - a_0 - \sigma_0 X_0)^2 = \\ &= E(a-a_0+(\sigma-\sigma_0)X_0)^2 = D(a) + 2cov(a,\sigma)X_0 + D(\sigma)X_0^2 = \\ &= D(\sigma)\left[X_0 + \tfrac{cov(a,\sigma)}{D(\sigma)}\right]^2 + \tfrac{D(a)D(\sigma)-cov^2(a,\sigma)}{D(\sigma)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим $C_1^2 = D(\sigma)$; $C_2 = \frac{cov(a,\sigma)}{D(\sigma)}$, $C_3 = \frac{D(a)D(\sigma) - cov^2(a,\sigma)}{D(\sigma)}$. Тогда

$$D(X) = C_1^2 [X_0 + C_2]^2 + C_3.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $C_3 \geq 0$.

Рассмотрим случай, когда $C_2 = C_3 = 0$. Тогда $D(X) = C_1^2 X_0^2$. Распределение этой величины дает

Теорема 1. *Пусть $X_0 \in Tr(0,1)$. Тогда*

$$\mu_{D(X)}(t) = \begin{cases} 1 - \sqrt{t}/C_1, & \text{если } 0 < t < C_1^2, \\ 0, & \text{если } t \notin (0, C_1^2). \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой преобразования нечеткой величины (1). Действительно,

$$\mu_{D(X)}(t) = \mu_{C_1^2 X_0^2}(t) = \mu_{X_0^2}(t/C_1^2) = \mu_{X_0}\left(\sqrt{t}/C_1\right).$$

Но $X_0 \in Tr(0,1)$. Поэтому

$$\mu_{D(X)}(t) = \begin{cases} 1 - \sqrt{t}/C_1, & \forall t \in (0, C_1^2), \\ 0, & \forall t \notin (0, C_1^2). \end{cases}$$

■

Замечание 1. *Если $C_3 > 0$, то график распределения сдвигается вправо на величину C_3.*

Для описания совместного поведения $E(X)$ и $D(X)$ удобнее ввести параметрическое описание. Пусть параметр $t \in \text{supp}(X_0)$. Тогда пара $(E(X), D(X))$ принимает значение $(a_0 + \sigma_0 t, C_1^2 (t + C_2)^2 + C_3)$ с возможностью $\mu_{X_0}(t)$.

Опираясь на полученные результаты, опишем совместное поведение нечетких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Аргументы, аналогичные тем, что мы использовали для отдельно взятой величины, приводят нас к следующей модели:

$$X_k(\omega, \gamma) = a_k(\omega) + \sigma_k(\omega) X_k^0(\gamma),$$

где $(X_1^0, \ldots, X_n^0)$ есть некоторый нечеткий вектор.

Введем следующие обозначения:

$$a_k^0 = E(a_k), \quad \sigma_k^0 = E(\sigma_k),$$

$$C_k^2 = D(\sigma_k), \quad C_{ij} = cov(\sigma_i, \sigma_j), \quad f_{ij} = -\frac{cov(\sigma_i, a_j)}{cov(\sigma_i, \sigma_j)},$$

$$d_{ij} = cov(a_i, a_j) - \frac{cov(\sigma_i, a_j) \cdot cov(\sigma_j, a_i)}{cov(\sigma_i, \sigma_j)}.$$

Применяя обычные правила вычисления числовых характеристик случайных величин, мы получаем формулы, представляющие характеристики нечетких случайных величин $X_1, \ldots, X_n$:

$$m_k = E(X_k) = a_k^0 + \sigma_k^0 \cdot X_k^0; \tag{5}$$

$$D_k^2 = D(X_k) = C_k^2 \left[X_k^0 + f_{kk}\right]^2 + d_{kk}; \tag{6}$$

$$\Sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = C_{ij}\left(X_i^o - f_{ij}\right)\left(X_j^o - f_{ji}\right) + d_{ij}. \tag{7}$$

Обозначим через $m = (m_1, \ldots, m_n)$ вектор средних, а через $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ — матрицу ковариаций нечеткого случайного вектора $(X_1(\omega, \gamma), \ldots, X_n(\omega, \gamma))$. Вычислим совместное возможностное распределение m и Σ. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$ есть точка из множества возможных значений нечеткого вектора $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_n^0)$. В соответствии с тем, что было приведено выше, пара (m, Σ) принимает значение $(m(t), \Sigma(t))$ с возможностью $\mu_{X^0}(t)$. Элементы $m_k(t)$ и $\Sigma_{ij}(t)$ рассчитываются по формулам (5), (7). Действительно, так как $X_i^0 = t_i$, $X_j^0 = t_j$, то

$$m_k(t_k) = a_k^0 + \sigma_k^0 \cdot t_k, \quad \sum\nolimits_{ij}(t) = C_{ij}(t_i - f_{ij})(t_j - f_{ji}) + d_{ij}.$$

Если элементы вектора X^0 являются min-связанными, то

$$\mu_{X^0}(t) = \min_{1 \le i \le n} \left\{\mu_{X_i^o}(t_i)\right\}.$$

Заключение. В работе получено представление нечеткой случайной величины на основе сдвиг-масштабного семейства распределений нечетких величин. Экспликация случайности осуществлена на уровне параметров сдвига и масштаба, которые являются параметрами некоторого исходного фиксированного распределения. В качестве примера рассматривается триангулярное распределение. При таком представлении основная трудность при определении числовых характеристик нечетких случайных величин связана с вычислением распределений функций нечетких величин. Хотя в явном виде вычисления проведены только для триангулярного распределения, предложенный метод определения характеристик нечетких случайных величин является достаточно универсальным и может быть применен и для других классов распределений. С другой стороны он является удобным для приложений, так как позволяет осуществить исчисление нечетких случайных величин на параметрическом уровне.

Список литературы

[1] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy sets and systems. 1978. V. 1.

[2] Nahmias S. Fuzzy variables in random environment // Advances in fuzzy sets theory. NHCP. 1979.

[3] Kwakernaak H. Fuzzy random variables — definitions and theorems // Inf. Sci. 1978. V. 15.

[4] Puri M.D., Ralesky D.A. Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 114.

[5] Yazenin A.V., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. Cottbus, Germany, 1996.

[6] Хохлов М.Ю. Нечеткие случайные величины и их числовые характеристики // Методы и алгоритмы исследования задач оптимального управления. Тверь, 2000.