УДК 519.6

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ЗАДАЧ ВОЗМОЖНОСТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ МЕР ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ[1]

С.В. Сорокин
Кафедра информатики

Fuzzy linear programming problems with demands on the necessity of restrictions are analysed to uncover redundant and infeasible constraints. Method for defining maximal necessity of constraint feasibility is developed.

В статье рассмотрены методы анализа структуры задачи необходимостного программирования с целью выявления избыточных и несовместных ограничений. Получены условия, позволяющие идентифицировать избыточность или совместность ее системы ограничений. Предложен метод определения максимальной степени возможности, при которой она совместна.

Введение. Задача возможностной оптимизации, которую мы будем исследовать, в общем виде может быть записана следующим образом:

$$(c, x) \to \max \tag{1}$$

$$\begin{cases} \delta\{f_i(x,\gamma) R_i 0\} \geq \alpha_i, i = \overline{1,m}, \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

где R_i — бинарное отношение, δ — нечеткая мера, $f_i(x,\gamma)$ — возможностные функции $f_i(\cdot,\cdot) : E^n \times \Gamma \to E^1$, Γ — элемент возможностного пространства $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$, E^n — n-мерное евклидово пространство [1, 2].

В работе [1] авторами исследована структура системы ограничений с построчными ограничениями по возможности:

$$\begin{cases} \pi\{\sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma)x_j = b_i(\gamma)\} \geq \alpha_i, i = \overline{1,m}, \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Для этой системы были доказаны теоремы, позволяющие установить факт ее избыточности или совместности.

Теорема 1. *Пусть k-я строка системы ограничений* (12) *является сильно избыточной. Тогда избыточны k-ая и $(k+m)$-ая строки следующей системы ограничений задачи линейного программирования:*

$$\begin{cases} A^+ x \leq d^+, \\ A^- x \geq d^-. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. *Если k-я строка системы ограничений* (12) *слабо избыточна, то избыточны k-ая и $(k+m)$-ая строки следующей системы ограничений задачи линейного программирования:*

$$\begin{cases} A^- x \leq d^+, \\ A^+ x \geq d^-. \end{cases} \tag{5}$$

[1]Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 02-01-01137.

Т е о р е м а 3. *k-я строка системы ограничений (12) является сильно несовместной тогда и только тогда, когда несовместны k-я или $(k+m)$-я строка системы ограничений*

$$\begin{cases} A^- x \le d^+, \\ A^+ x \ge d^-. \end{cases} \tag{6}$$

Т е о р е м а 4. *k-я строка системы ограничений задачи (12) является слабо несовместной тогда и только тогда, когда несовместны k-я или $(m+k)$-я строка системы ограничений*

$$\begin{cases} A^+ x \le d^-, \\ A^- x \ge d^+. \end{cases} \tag{7}$$

здесь A^+, A^-, d^+, d^- есть матрица и вектора, определяемые граничными элементами соответствующих уровневых множеств.

Также было доказано, что путем уменьшения требований на уровень возможности, в некоторых случаях можно перейти от сильно несовместной системы ограничений к слабо несовместной системе, для которой множество допустимых решений не является пустым и решение задачи таким образом может быть найдено. Для нахождения максимального уровня возможности, сохраняющего совместность системы, была построена задача математического программирования специальной структуры:

$$\alpha_k \to max, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^- x_j \le b_i^+, & 1 \le i \ne k \le m \quad (9a) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^-(\alpha_k) x_j \le b_k^+(\alpha_k), & (9b) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \ge b_i^-, & 1 \le i \ne k \le m \quad (9c) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^+(\alpha_k) x_j \ge b_k^-(\alpha_k), & (9d) \\ x_j \ge 0, & j \in \overline{1:n} \quad (9e) \end{cases}$$

где переменными являются: α_k, вектор x, $a_{kj}^-(\alpha_k), j \in \overline{1:n}$, $b_k^+(\alpha_k)$, $a_{kj}^+(\alpha_k), j \in \overline{1:n}$, $b_k^-(\alpha_k)$.

Было показано, что для случая триангулярных и трапецевидных распределений эта задача может быть сведена к задаче сепарабельного программирования.

В данной работе продолжаются исследования в этом направлении. Исследуется задача необходимостной оптимизации:

$$(c, x) \to \max \tag{10}$$

$$\begin{cases} \nu\{f_i(x,\gamma) \le 0\} \ge \alpha_i, i = \overline{1,m}, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{11}$$

где ν — мера необходимости.

Пусть $f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma)$, $a_{ij}(\gamma)$,$b_i(\gamma)$ — нечеткие величины, тогда система ограничений задачи (10),(11) принимает вид:

$$\begin{cases} \nu\{\sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma)x_j \le b_i(\gamma)\} \ge \alpha_i, i = \overline{1,m}, \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (12)$$

В предположении, что функции распределения нечетких велечин a_{ij} являются строго монотонными на интервалах $[(a_{ij}^-)_0, (a_{ij}^-)_1]$, $[(a_{ij}^+)_1, (a_{ij}^+)_0]$, а распределения b_i строго возрастают на интервале $[(b_i^-)_0, (b_i^-)_1]$, в [2] показано, что при заданных уровнях необходимости α_i система (12) эквивалентна системе интервальных ограничений:

$$\begin{cases} A^I x \le b^I \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Здесь и выше $A^I = \{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]_{\beta_i} | i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\}$, $b^I = \{[b_i^-, b_i^+]_{\beta_i} | i = \overline{1,m}\}$, а $[a_{ij}^-, a_{ij}^+]_{\beta_i}$ и $[b_i^-, b_i^+]_{\beta_i}$ - β_i-уровневые множества соответствующих возможностных переменных, $\beta_i = 1 - \alpha_i$. Интервальное неравенство $A^I x \le b^I$ понимается в смысле $\forall A \in A^I, \forall b \in b^I : Ax \le b$.

Система ограничений (12) в этом случае выражается через граничные элементы интервальной матрицы A^I и вектора b^I:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j \le b_i^-, i = \overline{1,m}, \\ x \ge 0 \end{cases}$$

1. Основные результаты. Исследование задачи будет проводится в соответствии с методикой, примененной в [1, 3].

Дадим ряд опредлений.

Определение 1. *k-я строка матрицы ограничений (12) является сильно избыточной,если она является избыточной для всех $A \in A^I$ и $b \in b^I$.*

Определение 2. *k-я строка матрицы ограничений (12) является слабо избыточной, если существуют $A \in A^I$ и $b \in b^I$ для которых k-я строка является избыточной.*

Определение 3. *k-я строка матрицы ограничений (12) является сильно несовместной, если она является несовместной для всех $A \in A^I$ и $b \in b^I$.*

Определение 4. *k-я строка матрицы ограничений (12) является слабо несовместной, если существуют $A \in A^I$ и $b \in b^I$ для которых k-я строка является несовместной.*

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$A^+ = \{a_{ij}^+ | i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\},$$

$$A^- = \{a_{ij}^- | i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\},$$

$$d^+ = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k^+, b_{k-1}, \ldots, b_m)^T,$$

$$d^- = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k^-, b_{k-1}, \ldots, b_m)^T,$$

где a_{ij}^-, a_{ij}^+ — границы β-уровневых множеств возможностных переменных $a_{ij}(\gamma)$, b_i^-, b_i^+ — границы β-уровневых множеств возможностных переменных $b_i(\gamma)$, $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$.

Т е о р е м а 5. *k-я строка системы ограничений (12) является сильно избыточной тогда и только тогда, когда избыточна k-ая строка следующей системы ограничений задачи линейного программирования:*

$$A^{+}x \le d^{-}. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим противное. Пусть k-я строка системы (13) не является избыточной. Тогда существует решение x, удовлетворяющее остальным строкам-ограничениям, такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{+} x_j > b_k^{-}$$

Так как $A^{+} \in A^{I}, d^{-} \in b^{I}$, то это условие противоречит условиям сильной избыточности системы (12).

Достаточность. Пусть k-я строка системы (13) является избыточной. Тогда

$$\forall x \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{+} x_j < b_k^{-}.$$

Но тогда

$$\forall x \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{+} x_j < b_k^{-} \le b_k,$$

для всех $A \in A^{I}, b \in b^{I}$, что означает сильную избыточность k-ой строки системы (12). ■

Т е о р е м а 6. *k-я строка системы ограничений (12) слабо избыточна тогда и только тогда, когда избыточна k-ая строка следующей системы ограничений задачи линейного программирования:*

$$A^{-}x \le d^{+}. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим обратное. Пусть k-я строка системы (14) не является избыточной. Тогда $\exists x$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{-} x_j > b_k^{+}$$

В этом случае имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \ge \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{-} x_j > b_k^{+} \ge b_k,$$

то есть $(\exists x)(\forall A \in A^{I}), b \in b^{I} : \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j > b_k$, что противоречит слабой избыточности k-ой строки системы (12).

Достаточность. Пусть k-я строка системы (14) избыточна. Тогда $\forall x$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{-} x_j \le b_k^{+}.$$

Так как $A^{-} \in A^{I}, b^{+} \in b^{I}$ то это означает слабую избыточность k-ой строки системы (12). ■

Т е о р е м а 7. *k-я строка системы ограничений* (12) *является сильно несовместной тогда и только тогда, когда несовместна k-я строка системы ограничений*

$$A^{-}x \leq d^{+}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть несовместна k-я строка системы (15). Тогда

$$\forall x \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{-} x_j > b_k^{+}.$$

Но тогда

$$\forall x \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{-} x_j > b_k^{+} \geq b_k,$$

что означает сильную несовместность k-ой строки системы (12).

Необходимость. Пусть k-я строка системы ограничений (12) является сильно несовместной. Это означает, что $\forall A \in A^{I}, b \in b^{I}, x$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j > b_k$$

Тогда мы можем взять $A = A^{-}, b = d^{+}$, что будет означать несовместность k-ой строки системы (15). ■

Т е о р е м а 8. *k-я строка системы ограничений задачи* (12) *является слабо несовместной тогда и только тогда, когда несовместна k-я строка системы ограничений*

$$\{A^{+}x \leq d^{-}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть k-я строка системы ограничений (12) слабо несовместна. Это значит, что

$$(\exists A \in A^{I})(\exists b \in b^{I})(\forall x) \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j > b_k. \tag{17}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{+} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j > b_k \geq b_k^{-}.$$

Это означает несовместность k-ой строки системы (17).

Достаточность. Очевидна, так как $A^{+} \in A^{I}, d^{-} \in b^{I}$. ■

В статье [1] исследовалась оптимистическая модель решения, для которой решение задачи может сущестовать в случае слабой несовместности ее системы ограничений. В нашем же случае применяется пессимистическая модель, для которой решение для слабо несовместной системы не существует. Таким образом, если в результате применения теорем 3 или 4 удалось установить слабую или сильную несовместность системы на заданном α уровне (не следует забывать, что условия теорем 1–4 формулируются для уровня $\beta = 1 - \alpha$), то практический интерес может представлять поиск уровня необходимости выполнения ограничения, при котором система ограничений станет совместной. Для решения этой задачи исследуем, что происходит с несовместностью и избыточностью ограничений при изменении α-уровня. В статье [1] были доказаны следующие теоремы:

Теорема 9. *Если k-я строка является сильно несовместной для уровня α_1, то она сильно несовместна и на уровне $\alpha_2 > \alpha_1$.*

Следствие 1. *Если k-я строка не является сильно несовместной для уровня α_1 то она не является сильно несовместной и на уровне $\alpha_2 < \alpha_1$.*

Теорема 10. *Если k-я строка является слабо или сильно несовместной для уровня α_1, то она слабо несовместна для уровня $\alpha_2 < \alpha_1$.*

Теорема 11. *Если k-я строка является сильно избыточной для уровня α_1, то она сильно избыточна и на уровне $\alpha_2 > \alpha_1$.*

Теорема 12. *Если k-я строка является слабо или сильно избыточной для уровня α_1, то она слабо избыточна для уровня $\alpha_2 < \alpha_1$.*

При применении результатов этих теорем в случае меры необходимости необходимо учитывать, что вычисления производятся на уровне $\beta = 1 - \alpha$ (для которого и необходимо применять теоремы 5–8) и понижение уровня необходимости α приводит к увеличению β-уровня и наоборот.

Нам также потребуется очевидное следствие теоремы 6:

Следствие 2. *Если k-я строка не является слабо несовместной для уровня α_1 то она не является слабо несовместной и на уровне $\alpha_2 > \alpha_1$.*

Исследуем случай сильной несовместности одного из ограничений.

Теорема 13. *Если k-я строка системы* (12) *является сильно несовместной для некоторого уровня α, то задача* (10), (11) *не имеет решения при любом уровне α.*

Доказательство. Пусть k-я строка системы (12) является сильно несовместной для уровня α^*. Тогда, согласно теореме 5, то она сильно несовместна и на уровне $\alpha_2 > \alpha^*$. А, согласно теореме 6, она слабо несовместна на всех уровнях $\alpha_2 < \alpha^*$.

Таким образом, мы видим, что на всех уровнях $\alpha \in [0, 1]$ наша система ограничений является либо слабо либо сильно несовместной, а так как решение задачи ищется в условиях пессимистической модели, то задача (10), (11) не имеет решения при любом уровне необходимости k-го ограничения. ■

Как уже отмечалось в [1], утверждения, обратные утверждениям теорем 5–8, вообще говоря не верны. В частности, если k-я строка системы (12) является слабо несовместной на некотором уровне β, то она может быть совместна на уровнях $\beta_1 > \beta$, так как при увеличении уровня происходит сужение интервалов и область несовместности может быть исключена. В нашем случае это означает, что при понижении требований на уровень необходимости α мы можем перейти от слабо несовместного ограничения к совместному и таким образом найти решение поставленной задачи. Нахождению максимального уровня необходимости, при котором система ограничений является совместной, посвящена следующая часть статьи.

3. Совместные ограничения максимальной необходимости. Воспользовавшись результатами теоремы 4 сформулируем условия, при которых ограничение не будет являться сильно несовместным. Согласно теореме 4 слабая несовместность ограничения зависит от совместности или несовместности системы (17). Отсюда получаем следующую задачу:

$$\alpha_k \to max, \tag{18}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \leq b_i^{-}, & 1 \leq i \neq k \leq m \quad (19a) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{+}(1-\alpha_k) x_j \leq b_k^{-}(1-\alpha_k), & \quad (19b) \\ x_j \geq 0, & j \in \overline{1:n} \quad (19c) \end{cases}$$

где переменными являются: α_k, вектор x, $a_{kj}^{+}(1-\alpha_k), j \in \overline{1:n}$, $b_k^{-}(1-\alpha_k)$.

Следующая теорема показывает, что решение этой задачи дает максимальный уровень необходимости, при котором система ограничений (12) совместна.

Теорема 14. *Пусть задача* (18), (19a)–(19c) *имеет решение* (α^*, x^*). *Тогда система ограничений* (12) *совместна при уровнях возможности* $\alpha_k \leq \alpha^*$.

Доказательство. Пусть (α^*, x^*) — решение задачи (18), (19a)–(19c). Решение задачи является допустимым для ее системы, следовательно система

$$A^{+} x \leq d^{-},$$

совместна, при $a_{kj}^{+} = a_{kj}^{+}(\alpha^*), j \in \overline{1:n}, b_k^{-} = b_k^{-}(\alpha^*)$. Тогда, согласно теореме 4, система ограничений (12) не является слабо несовместной при уровне возможности $\alpha_k = \alpha^*$.

Согласно следствию 1 теоремы 6 система ограничений (12) совместна при всех уровнях возможности $\alpha_k \leq \alpha^*$.

Покажем, что система (12) слабо несовместна на уровнях $\alpha_k > \alpha^*$. Предположим противное. Пусть система ограничений (12) является совместной на уровне $\alpha_k = \alpha^{**} > \alpha^*$. Тогда, согласно теореме 3 система ограничений

$$A^{+} x \leq d^{-},$$

совместна при $a_{kj}^{+} = a_{kj}^{+}(\alpha^{**}), j \in \overline{1:n}, b_k^{-} = b_k^{-}(\alpha^{**})$. Так как эта система совместна, то существует по крайней мере один допустимый вектор (α^{**}, x^{**}). Но этот вектор является допустимым и для системы ограничений (19a)–(19c), чего не может быть так как $\alpha^{**} > \alpha^*$, а (α^*, x^*) является решением задачи (18), (19a)–(19c). Получили противоречие, следовательно система (12) слабо несовместна при уровне возможности $\alpha_k > \alpha^*$. ■

Необходимо отметить, что как и в случае системы построчных ограничений по возможности, результаты данной теоремы позволяют исследовать зависимость совместности системы ограничений от уровня необходимости только одного из ограничений, в то время как она зависит от уровня необходимости всех ограничений. Исследование влияния одновременного изменения уровня возможности нескольких ограничений выходит за рамки данной статьи и может служить предметом для дальнейшего изучения.

В случае, если нечеткие величины a_{kj}, b_k имеют триангулярные или трапецевидные распределения, ограничение (19b) является квадратичной функцией. С помощью замены переменных $z_j = a_{kj}^{+}(1-\alpha_k) + x_j$ и $p_j = a_{kj}^{+}(1-\alpha_k) - x_j$, используя равенство

$a_{kj}^{+}(1-\alpha_k)x_j = ((a_{kj}^{+}(1-\alpha_k)+x_j)^2-(a_{kj}^{+}(1-\alpha_k)-x_j)^2)/4$ приведем ограничение (19b) к сепарабельному виду $\sum_{j=1}^{n} z_j^2 - \sum_{j=1}^{n} p_j^2 \leq 4b_k^{+}(1-\alpha_k)$. Таким образом получаем задачу сепарабельного программирования:

$$\alpha_k \to max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}x_j \leq b_i^{-}, & 1 \leq i \neq k \leq m \\ \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^2 - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2 \leq 4b_k^{+}(1-\alpha_k), & \\ z_j = a_{kj}^{+}(1-\alpha_k)+x_j, & \\ p_j = a_{kj}^{+}(1-\alpha_k)-x_j, & \\ x_j \geq 0. & j \in \overline{1:n} \end{cases}$$

В результате решения этой задачи получим максимальный уровень α_k при котором система ограничений (12) задачи возможностного программирования не будет слабо несовместной.

Заключение. В статье доказаны теоремы, определяющие условия, позволяющие установить факт избыточности или совместности системы построчных ограничений по необходимости. Построена задача математического программирования, решая которую, можно определить максимальную степень необходимости, при которой исходная система ограничений будет совместна.

Список литературы

[1] Сорокин С.В., Язенин А.В. Анализ структуры задач возможностного программирования // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь, 2002. С. 120–129.

[2] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. A measure-based approach. Cottbus, Germany, 1996.

[3] Lodwick W.A. Anlysis of structure in fuzzy linear programs // Fuzzy Sets and Systems. 1990. V. 38. P. 15--26.