

# МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 531.6

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В.А. Колдунов, А.Н. Кудинов

Кафедра математического моделирования

The approximating relations permitting to carry out computations of shells' stress strain state from positions of the three-dimensional theory of elasticity without assumptions peculiar to the shell theory and results of numerical calculations obtained by the variational finite difference method of minimization of Lagrange's functional are represented.

Представлены аппроксимирующие соотношения расчета НДС оболочек и пример совместного расчета оболочек и твердых деформируемых тел с трехмерных позиций теории упругости без допущений, свойственных теории оболочек, на основе построения конечно-разностного аналога функционала Лагранжа и его минимизации вариационно-разностным методом.

**Введение.** Развитие техники и производственных технологий требует разработки новых решений в области математического моделирования деформируемых систем, сочетающих различные элементы, в том числе оболочечные конструктивные элементы, выполненные с применением композиционных материалов.

Как показали результаты экспериментальных и натурных испытаний, для расчета и анализа напряжений в композитах и композитных конструкциях требуется создание моделей, позволяющих учитывать новые эффекты, поскольку расчеты прочности и устойчивости на основании традиционных схем могут заведомо отличаться от действительных.

На пути достижения удовлетворительных результатов при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости композитных оболочек получили развитие подходы и методы, основанные на введении тех или иных дополнений и допущений к классическим моделям теории оболочек.

Вместе с тем в научной литературе, например [1-4], неоднократно ставился вопрос о необходимости применения трехмерных теорий механики деформируемых твердых тел (МДТТ) и, в частности, анизотропной теории упругости [5, 6], к расчету и анализу механического поведения композитных оболочек ввиду существенной анизотропии физико-механических (ф.-м.) свойств материала по их толщине, в том числе в свете применения вычислительной техники для разработки и реализации соответствующих численных моделей и методов.

В основу построения предлагаемой модели положены модификации конечно-разностных (к.-р.) аппроксимирующих соотношений [7, 8], учитывающие межъячеечную связь при формировании производных в направлении, ортогональном срединной поверхности оболочек.



1. Компоненты тензора деформаций в криволинейных координатах. Выражения для компонент тензора деформаций представим в виде [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= Q_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} (Q_{\alpha\alpha}^2 + Q_{\alpha\beta}^2 + Q_{\alpha\gamma}^2), & \varepsilon_{\beta\beta} &= Q_{\beta\beta} + \frac{1}{2} (Q_{\beta\beta}^2 + Q_{\beta\gamma}^2 + Q_{\beta\alpha}^2), \\ \varepsilon_{\gamma\gamma} &= Q_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} (Q_{\gamma\gamma}^2 + Q_{\gamma\alpha}^2 + Q_{\gamma\beta}^2), \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (Q_{\alpha\alpha}Q_{\beta\alpha} + Q_{\beta\beta}Q_{\alpha\beta} + Q_{\gamma\gamma}Q_{\beta\gamma}), \\ \varepsilon_{\beta\alpha} &= \varepsilon_{\gamma\beta} = \frac{1}{2} (Q_{\beta\gamma} + Q_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2} (Q_{\beta\beta}Q_{\gamma\beta} + Q_{\gamma\gamma}Q_{\beta\gamma} + Q_{\beta\alpha}Q_{\gamma\alpha}), \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} (Q_{\gamma\alpha} + Q_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{2} (Q_{\gamma\gamma}Q_{\alpha\gamma} + Q_{\alpha\alpha}Q_{\gamma\alpha} + Q_{\gamma\beta}Q_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) введены обозначения:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha^2} U_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} u_\gamma \right), \\ Q_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_\beta^2} U_{\beta\beta} = \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} u_\gamma + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\alpha \right), \\ Q_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{H_\gamma^2} U_{\gamma\gamma} = \frac{1}{H_\gamma} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} u_\beta \right), \\ Q_{\alpha\beta} &= \frac{1}{H_\alpha H_\beta} U_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha \right), \\ Q_{\beta\alpha} &= \frac{1}{H_\beta H_\alpha} U_{\beta\alpha} = \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta \right), \\ Q_{\beta\gamma} &= \frac{1}{H_\beta H_\gamma} U_{\beta\gamma} = \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial \beta} - \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} u_\beta \right), \\ Q_{\gamma\beta} &= \frac{1}{H_\gamma H_\beta} U_{\gamma\beta} = \frac{1}{H_\gamma} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} u_\beta \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим, например, криволинейную ортогональную систему координат  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 1), связанную с декартовой системой соотношениями

$$\begin{aligned} x &= [R_0 + (R_2^0(\alpha) + \gamma) \sin \alpha] \cos \beta, \\ y &= [R_0 + (R_2^0(\alpha) + \gamma) \sin \alpha] \sin \beta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$



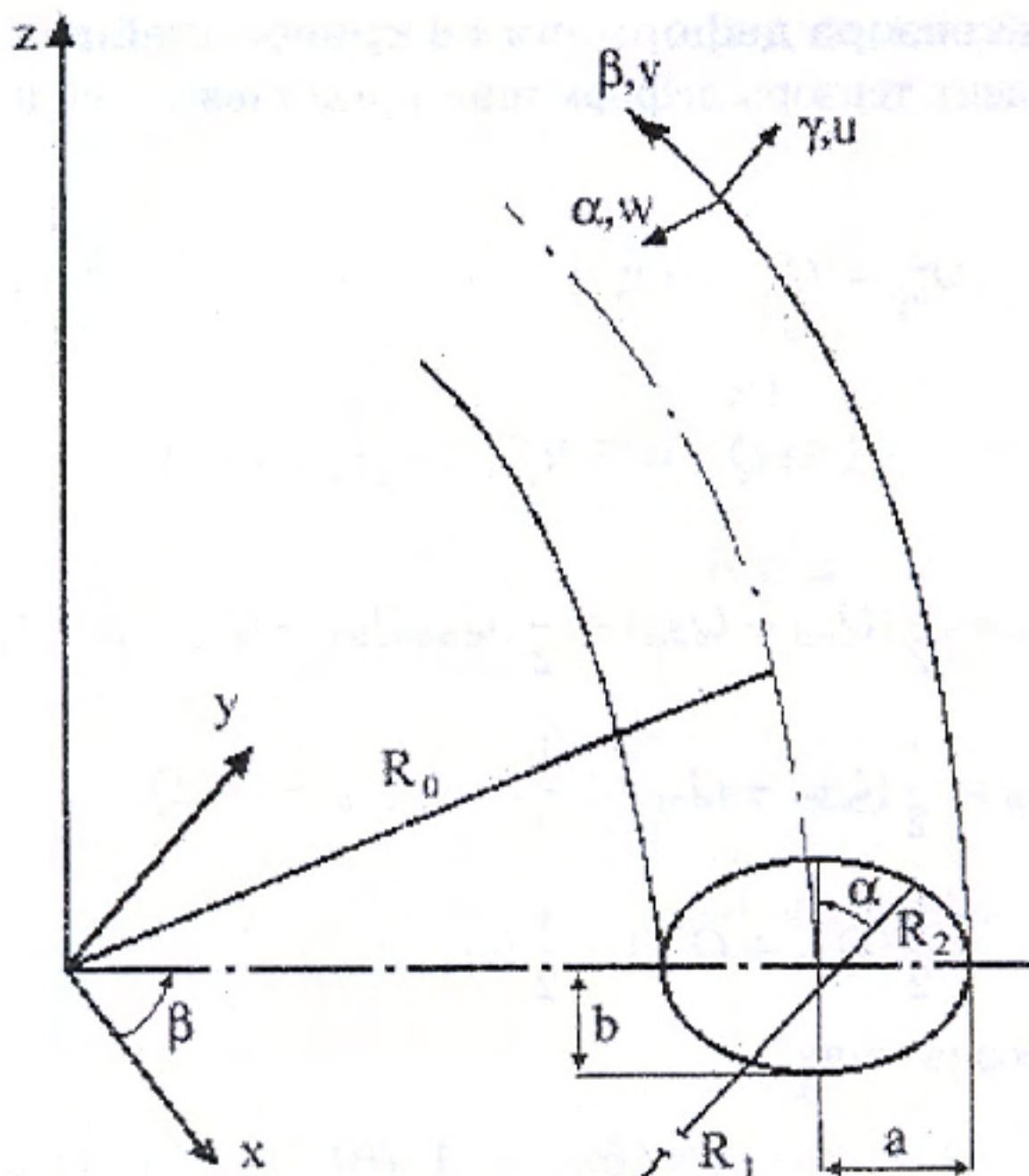


Рис. 1: Ортогональная криволинейная система координат тороидального типа

где координата  $\gamma$  отсчитывается по нормали к некоторой поверхности  $\gamma = 0$ , принятой за начало отсчета;  $R_0$  — радиус круговой оси тела (оболочки), которое условно назовем тороидальным;  $R_2^0 = R_2^0(\alpha)$  — радиус кривизны линии  $\beta = const, \gamma = 0$ . Координата  $z$  будет определяться видом кривой  $\beta = const, \gamma = const$ .

Найдем выражение первой квадратичной формы поверхности  $\gamma = const$ :

$$(dS)^2 = (H_\alpha d\alpha)^2 + (H_\beta d\beta)^2 + (H_\gamma d\gamma)^2, \quad (4)$$

где  $H_g^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)^2$ , ( $g = \alpha, \beta, \gamma$ ).

Определенную трудность представляет получение выражений для  $\partial x/\partial\alpha, \partial y/\partial\alpha, \partial z/\partial\alpha$ . Восстановим в произвольной точке поверхности нормаль и введем радиус кривизны  $R_1 = R_1^0 + \gamma$  (см. рис. 1). Возьмем малое приращение  $ds = R_1 d\alpha$  по поверхности. Тогда, ввиду малости  $ds$  и  $d\alpha$ , имеем

$$dz = ds \sin \alpha, \quad dy = -ds \cos \alpha \sin \beta, \quad dx = -ds \cos \alpha \cos \beta.$$

При этом

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = R_1 \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -R_1 \cos \alpha \sin \beta, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -R_1 \cos \alpha \cos \beta.$$

Очевидно, что  $\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial z}{\partial \gamma} = \cos \alpha$ .

Выражения для частных производных по  $\beta, \gamma$  получаются простым дифференцированием (3). Получаем коэффициенты Ламэ первой квадратичной формы (4):

$$H_\gamma = 1; \quad H_\alpha = R_1; \quad H_\beta = R_0 + R_1 \sin \alpha = R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \alpha. \quad (5)$$



Таким образом, первая квадратичная форма (4) принимает следующий вид:

$$(dS)^2 = (R_1 d\alpha)^2 + [(R_0 + R_2 \sin \alpha) d\beta]^2 + (d\gamma)^2. \quad (6)$$

При  $R_0 = 0$  получаем, например, сферическую или эллипсоидальную поверхность, при  $R_0 \rightarrow \infty$  — цилиндрические оболочки.

На основании выражений (1) линейные части компонентов тензора деформации в произвольной ортогональной криволинейной системе координат  $\alpha, \beta, \gamma$  можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(Q_{ij} + Q_{ji}), \quad i, j = \alpha, \beta, \gamma. \quad (7)$$

Вводя обозначения  $u, v, w$  для перемещений в направлениях  $\gamma, \alpha, \beta$  соответственно, на основании (3, 5, 7) получаем соответствующие выражения для компонентов тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right), & \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} + u \sin \alpha - v \cos \alpha \right), \\ \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial u}{\partial \gamma}, & \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \cos \alpha \right) \right], \\ \varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - w \sin \alpha \right) \right], \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} = \varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R_1 = R_1^0(\alpha) + \gamma$ ,  $R = (R_2^0(\alpha) + \gamma) \sin \alpha + R_0$ .

На основании (8) легко перейти к компонентам тензора деформаций на случай системы координат для тела вращения, положив  $R_0 = 0$ .

Таким образом, исходя из соотношений (8), можно построить универсальную программу, на основании которой в результате ее численной реализации [9] можно исследовать НДС ортотропных (и, как частный случай, изотропных) тел, оболочек, пластин, панелей, в том числе одновременно с учетом влияния на НДС формы и кривизны физико-механических объектов.

**2. Физико-механические соотношения.** Закон Гука в предположении, что в каждой точке тела плоскости упругой симметрии перпендикулярны к соответствующим ортогональным координатным направлениям  $\alpha, \beta, \gamma$ , принимаем [10] в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{E_\gamma} - \frac{\nu_{\alpha\gamma}}{E_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} - \frac{\nu_{\beta\gamma}}{E_\beta} \sigma_{\beta\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} &= -\frac{\nu_{\gamma\alpha}}{E_\gamma} \sigma_{\gamma\gamma} + \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{E_\alpha} - \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\beta} \sigma_{\beta\beta}, \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= -\frac{\nu_{\gamma\beta}}{E_\gamma} \sigma_{\gamma\gamma} - \frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} + \frac{\sigma_{\beta\beta}}{E_\beta}, \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{\sigma_{\gamma\alpha}}{2G_{\gamma\alpha}}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G_{\alpha\beta}}, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{\sigma_{\beta\gamma}}{2G_{\beta\gamma}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $E_\gamma, E_\alpha, E_\beta$  — модули Юнга соответственно по направлениям  $\gamma, \alpha, \beta$ ;  $G_{\beta\gamma}, G_{\alpha\gamma}, G_{\alpha\beta}$  — модули сдвига для плоскостей, в каждой точке параллельных координатным



поверхностям  $\alpha = const$ ,  $\beta = const$ ,  $\gamma = const$ ;  $\nu_{\beta\alpha}$ ,  $\nu_{\gamma\beta}$ , ...,  $\nu_{\beta\alpha}$  — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие (растяжение) при растяжении (сжатии) в направлениях осей координат (1-й индекс показывает направление поперечного сжатия, 2-й — направление действия силы).

С учетом соотношений

$$E_\gamma \nu_{\alpha\gamma} = E_\alpha \nu_{\gamma\alpha}, \quad E_\beta \nu_{\gamma\beta} = E_\gamma \nu_{\beta\gamma}, \quad E_\alpha \nu_{\beta\alpha} = E_\beta \nu_{\alpha\beta}$$

имеем 9 независимых физико-механических характеристик. Другая форма закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= a_{11}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{12}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{13}\varepsilon_{\gamma\gamma}, & \sigma_{\beta\beta} &= a_{12}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{22}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{23}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= a_{13}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{23}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{33}\varepsilon_{\gamma\gamma}, & \sigma_{\gamma\alpha} &= a_{44}\varepsilon_{\gamma\alpha}, \\ \sigma_{\beta\gamma} &= a_{55}\varepsilon_{\beta\gamma}, & \sigma_{\alpha\beta} &= a_{66}\varepsilon_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты при  $a_{ij}$  соответствующим образом выражаются через упругие физико-механические характеристики.

Разрешая соотношения (9) относительно компонент тензора напряжений, получаем для коэффициентов  $a_{ij} = a_{ji}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $a_{44}$ ,  $a_{55}$ ,  $a_{66}$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E_1}{k} (1 - \nu_{23}\nu_{32}), & a_{12} &= \frac{E_1}{k} (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}), & a_{13} &= \frac{E_1}{k} (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}), \\ a_{21} &= \frac{E_2}{k} (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}), & a_{22} &= \frac{E_2}{k} (1 - \nu_{13}\nu_{31}), & a_{23} &= \frac{E_2}{k} (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}), \\ a_{31} &= \frac{E_3}{k} (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}), & a_{32} &= \frac{E_3}{k} (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}), & a_{33} &= \frac{E_3}{k} (1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ a_{44} &= 2G_{12}, & a_{55} &= 2G_{23}, & a_{66} &= 2G_{31}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$k = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}.$$

В (11) индексы 1, 2, 3 указывают координатные направления соответствующей ортогональной системы координат.

**3. Вариационная постановка и вариационно-разностный метод для решения задач теории упругости ортотропных тел (оболочек).** Выражение полной потенциальной энергии деформации упругой системы, записанное в перемещениях, представляет собой [11] функционал Лагранжа

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_3, \quad (12)$$

где  $\mathfrak{E}_2$ ,  $\mathfrak{E}_3$  — работа объемных сил и работа поверхностных сил на вызванных ими перемещениях соответственно,  $\mathfrak{E}_1 = \int_V W dV$  — работа внутренних сил,  $W$  — упругий потенциал, записанный в перемещениях.

В тензорной записи

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (13)$$

На основании (8), (10) выражение для упругого потенциала можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ a_{11} u_{,\gamma}^2 + \frac{1}{R_1^2} a_{22} (v_{,\alpha} + u)^2 + \frac{1}{R_2^2} a_{33} (w_{,\beta} + u \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 \right] +$$



$$\begin{aligned}
& + a_{13} u_{,\gamma} \frac{1}{R_1} (v_{,\alpha} + u) + a_{23} \frac{1}{RR_1} (v_{,\alpha} + u) (w_{,\beta} + u \sin \alpha - v \cos \alpha) + \\
& + a_{13} u_{,\gamma} \frac{1}{R} (w_{,\beta} + u \sin \alpha - v \cos \alpha) + \\
& + \frac{1}{2} a_{44} \left[ w_{,\gamma} + \frac{1}{R} (u_{,\beta} - w \sin \alpha) \right]^2 + \frac{1}{2} a_{66} \left[ \frac{1}{R_1} w_{,\alpha} + \frac{1}{R} (v_{,\beta} + w \cos \alpha) \right]^2,
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $u_{,\gamma}, \dots, w_{,\alpha}$  — частные производные по соответствующим координатным направлениям  $\partial u / \partial \gamma, \dots, \partial w / \partial \alpha$ .

Функционал Лагранжа (12), например, в случае действия только поверхностных сил принимает вид

$$\Theta = \int_V W dV - \int_S (P_\gamma u + P_\alpha v + P_\beta w) dS, \tag{15}$$

где  $W$  — упругий потенциал, записанный в перемещениях  $u, v, w$ ;  $P_\gamma, P_\alpha, P_\beta$  — проекции усилий на направления  $\gamma, \alpha, \beta$  соответственно.

Вариационная постановка задачи [11, 12, 13] формулируется следующим образом: из всех возможных перемещений упругой системы, находящейся по действию объемных или поверхностных сил, действительными являются те перемещения, которые доставляют минимум функционалу Лагранжа (15). При нахождении перемещений, сообщающих минимум функционалу, следует удовлетворить условиям Эйлера-Остроградского:

$$\frac{\partial \Theta (u, v, w)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Theta (u, v, w)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Theta (u, v, w)}{\partial w} = 0. \tag{16}$$

Граничные условия, исходя из вариационного принципа, учитываются естественным образом.

Применение вариационно-разностного метода [9, 14] основано на замене функционала (15) его конечно-разностным аналогом. Введением функций и производных от перемещений, усредненных по ячейкам пространственной конечно-разностной сетки, образованной координатными поверхностями  $\alpha = const, \beta = const, \gamma = const$ , конечно-разностный аналог функционала (15) можно представить в виде

$$\Theta (u_{nml}, v_{nml}, w_{nml}) = \sum_i [W_i V_i - (\Theta_3)_i], \tag{17}$$

где суммирование проводится по всем ячейкам конечно-разностной сетки;  $u_{nml}, v_{nml}, w_{nml}$  — узловые перемещения;  $W_i$  определяется выражением (14) при замене в нем всех функций и производных их усредненными значениями по  $i$ -й ячейке;  $V_i$  — объем  $i$ -й ячейки;  $(\Theta_3)_i$  — приближенное выражение работы внешних сил  $i$ -й ячейки.

Условия (16) с учетом (17) запишутся в виде

$$\frac{\partial \Theta (u_{nml}, v_{nml}, w_{nml})}{\partial d_{nml}} = \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial d_{nml}} V_i - \frac{\partial (\Theta_3)_i}{\partial d_{nml}} = 0, \tag{18}$$

где  $d_{nml} (d = u, v, w)$  — искомые узловые перемещения.



4. Исходные конечно-разностные аппроксимирующие соотношения, положенные в основу формирования и реализации численной модели. Один из реализованных вариантов аппроксимирующих соотношений, учитывающих межъячеечную связь при аппроксимации функций и производных в направлении  $\gamma$ , ортогональном срединной поверхности оболочек, приводится ниже на случай пространственной к.-р. сетки (рис. 2):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right)_i = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{bi} - u_i}{\gamma_{bi} - \gamma_i} + \frac{u_i - u_{Hi}}{\gamma_i - \gamma_{Hi}} \right), \quad (19)$$

где

$$u_{bi} = \frac{(u_{k,m,\ell-1} + u_{k,m+1,\ell-1} + u_{k-1,m,\ell-1} + u_{k-1,m+1,\ell-1})}{4},$$

$$u_i = \frac{(u_{k,m,\ell} + u_{k,m+1,\ell} + u_{k-1,m,\ell} + u_{k-1,m+1,\ell})}{4},$$

$$u_{Hi} = \frac{(u_{k,m,\ell+1} + u_{k,m+1,\ell+1} + u_{k-1,m,\ell+1} + u_{k-1,m+1,\ell+1})}{4},$$

$$\gamma_{bi} = (\gamma_{k,m,\ell-1} + \gamma_{k,m+1,\ell-1} + \gamma_{k-1,m,\ell-1} + \gamma_{k-1,m+1,\ell-1} + \gamma_{k,m,\ell} + \gamma_{k,m+1,\ell} + \gamma_{k-1,m,\ell} + \gamma_{k-1,m+1,\ell}) / 8,$$

$$\gamma_i = (\gamma_{k,m,\ell} + \gamma_{k,m+1,\ell} + \gamma_{k-1,m+1,\ell} + \gamma_{k-1,m,\ell} + \gamma_{k,m,\ell+1} + \gamma_{k,m+1,\ell+1} + \gamma_{k-1,m,\ell+1} + \gamma_{k-1,m+1,\ell+1}) / 8,$$

$$\gamma_{Hi} = (\gamma_{k,m,\ell+1} + \gamma_{k,m+1,\ell+1} + \gamma_{k-1,m,\ell+1} + \gamma_{k-1,m+1,\ell+1} + \gamma_{k,m,\ell+2} + \gamma_{k,m+1,\ell+2} + \gamma_{k-1,m,\ell+2} + \gamma_{k-1,m+1,\ell+2}) / 8$$

вычисляются исходя из значений координат в узлах основной сетки, для  $\left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right)_i$  и  $\left(\frac{\partial w}{\partial \gamma}\right)_i$  выражения принимают аналогичный вид;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_i = \frac{u_{k,m,\ell} + u_{k,m+1,\ell} - u_{k-1,m,\ell} - u_{k-1,m+1,\ell}}{2(ds)_i}, \quad (20)$$

где

$$(ds)_i = (s_{k,m,\ell} + s_{k,m+1,\ell} + s_{k,m,\ell+1} + s_{k,m+1,\ell+1} - s_{k-1,m,\ell} - s_{k-1,m+1,\ell} - s_{k-1,m,\ell+1} - s_{k-1,m+1,\ell+1}) / 4$$

вычисляются, исходя из значений координат в узлах основной сетки, для  $\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_i$ ,  $\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i$  выражения аналогичны; для к.-р. производных в направлении  $\beta$  принимаются выражения вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)_i = \frac{u_{k,m+1,\ell} + u_{k-1,m+1,\ell} - u_{k,m,\ell} - u_{k-1,m,\ell}}{2(R_2 d\varphi)}, \quad (21)$$

где  $(R_2 d\varphi)$  — усредненная по  $i$ -й ячейке длина дуги в направлении  $\beta$ , для  $\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_i$ ,  $\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)_i$  выражения аналогичны.



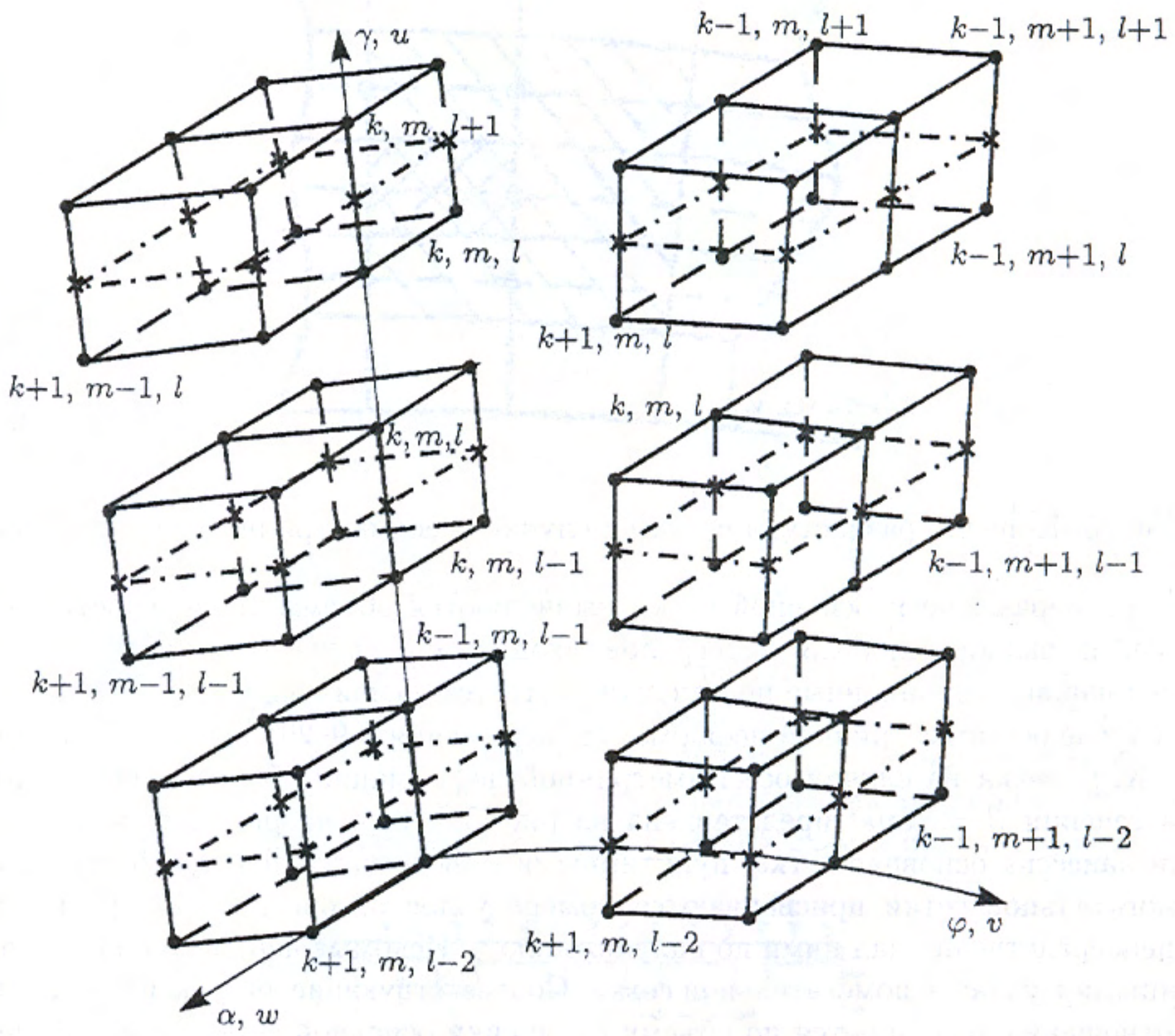


Рис. 2: Пространственная конечно-разностная сетка



На рис. 2 сплошными линиями представлены ячейки основной к.-р. сетки, пунктирными — вспомогательной, в узлах которой определяются перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . При этом номерам узлов вспомогательной сетки соответствуют номера узлов основной сетки, расположенных над ними.

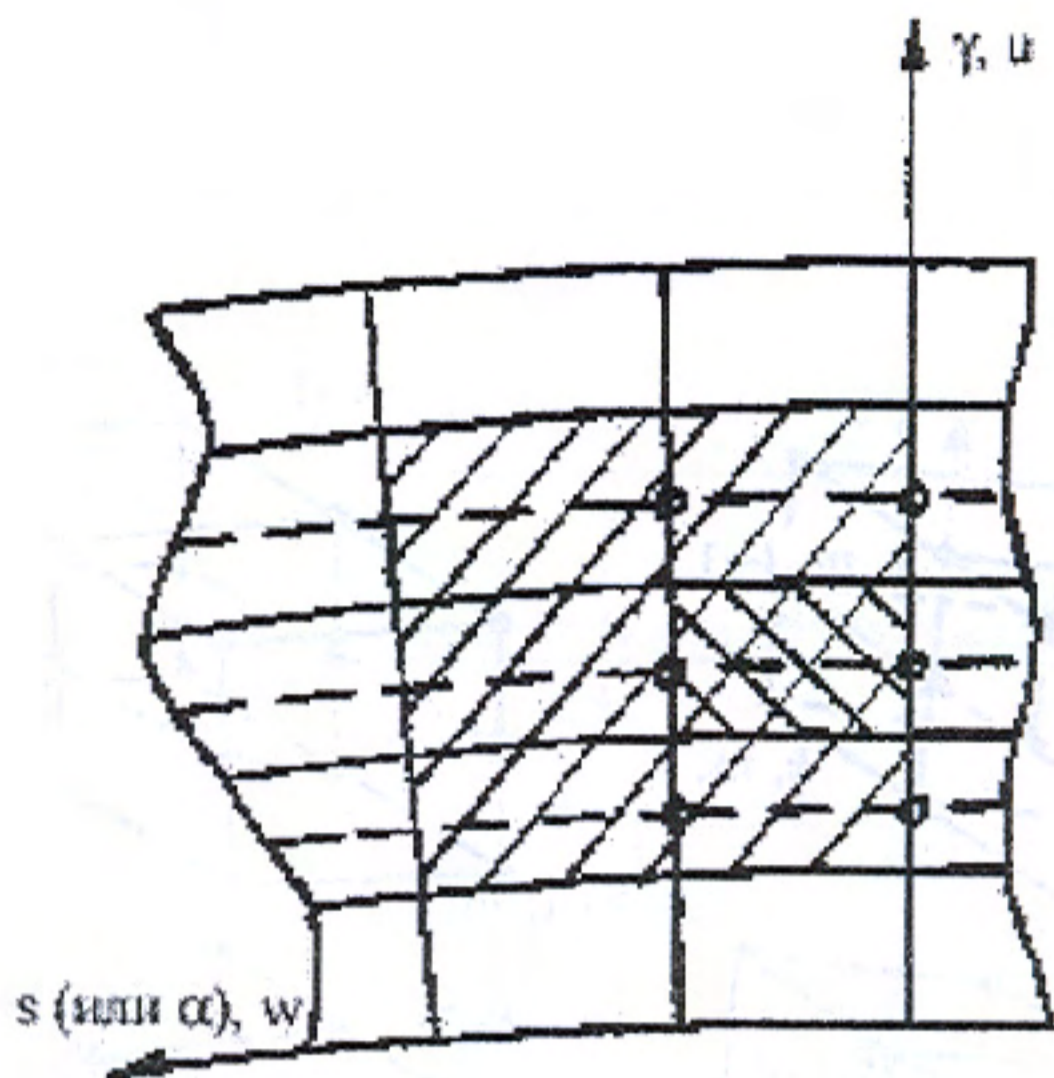


Рис. 3: Конечно-разностная сетка на случай осесимметричной деформации

По размерам ячеек основной сетки вычисляются объемы (поверхности) в приближенных выражениях для интегралов, входящих в энергетические соотношения, определяющие вариационные постановки соответствующих задач.

В случае осесимметричной деформации выражения (19–20) значительно упрощаются. К.-р. сетка на случай осесимметричной деформации оболочки (тела) вращения в сечении  $\beta = const$  представлена на рис. 3 (как и на рис. 2 сплошными линиями нанесена основная сетка, пунктирными — вспомогательная). Номерам узлов вспомогательной сетки присваиваются номера узлов основной сетки, расположенных непосредственно над ними по направлению  $\gamma$ . Искомые перемещения считаются заданными в узлах вспомогательной сетки. Соответствующие аппроксимирующие к.-р. соотношения усредняются по объему  $i$ -й ячейки основной сетки. Для  $i$ -й ячейки, обозначенной на рис. 3 двойной штриховкой, производные в направлении  $\gamma$  принимают вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right)_i = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{k,\ell-1} + u_{k-1,\ell-1} - u_{k,\ell} - u_{k-1,\ell}}{\gamma_{bi} - \gamma_i} + \frac{u_{k,\ell} + u_{k-1,\ell} - u_{k,\ell+1} - u_{k-1,\ell+1}}{\gamma_i - \gamma_{Hi}} \right). \quad (22)$$

При этом в направлении  $\alpha$  (или  $s$ ) производные от перемещений принимают вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_i = \frac{u_{k\ell} - u_{k-1,\ell}}{ds}. \quad (23)$$

В (22)  $\gamma_{bi}$ ,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{Hi}$  вычисляются как и в (19) по узлам основной сетки с учетом того, что число узлов ячейки такой сетки равно четырем. В выражении (23) знаменатель представляет собой длину дуги в направлении  $s$ , усредненную по  $i$ -й ячейке.



5. Расчет круговой подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на основании общих соотношений теории упругости. Представлены результаты задачи об определении осесимметричного НДС круговой ортотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости. Численное решение строится на основании принципа минимума полной потенциальной энергии деформации упругой системы с позиций трехмерной теории упругости [7, 8]. За исходные соотношения принимаются выражения для деформаций в цилиндрической системе координат

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{du}{dz} \right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \quad (24)$$

и обобщенный закон Гука в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{zz} + a_{13}\varepsilon_{\varphi\varphi}; \\ \sigma_{zz} &= a_{21}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{zz} + a_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi}; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= a_{31}\varepsilon_{rr} + a_{32}\varepsilon_{zz} + a_{33}\varepsilon_{\varphi\varphi}; \\ \sigma_{rz} &= 2a_{44}\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Частично решение поставленной задачи на основании принципа минимума с учетом (24, 25) на случай толстой, регулярно подкрепленной ребрами по внутренней поверхности оболочки при действии на нее внешнего гидростатического давления (см. рис. 4, где размеры представлены в метрах) рассматривалось ранее в [14, 15]. Оболочка полагалась достаточно длинной, и в предположении, что ребра находятся в равнонапряженном состоянии, НДС рассчитывалось только в окрестности одного ребра с учетом как общей осевой симметрии (относительно оси  $z$ ), так и симметрии по толщине ребра. Задача разбивалась на две: о НДС оболочки, находящейся под действием равномерного бокового давления (задача 1), и о НДС оболочки, подверженной осевому сжатию (задача 2). В [16, 17] решение той же задачи проводилось с использованием метода конечных элементов, причем в [17] решалась задача 1. В [14, 15, 16] предусматривается различие упругих характеристик материалов оболочки и ребер. Во всех работах приводится оценка расчетных схем и полученных решений.

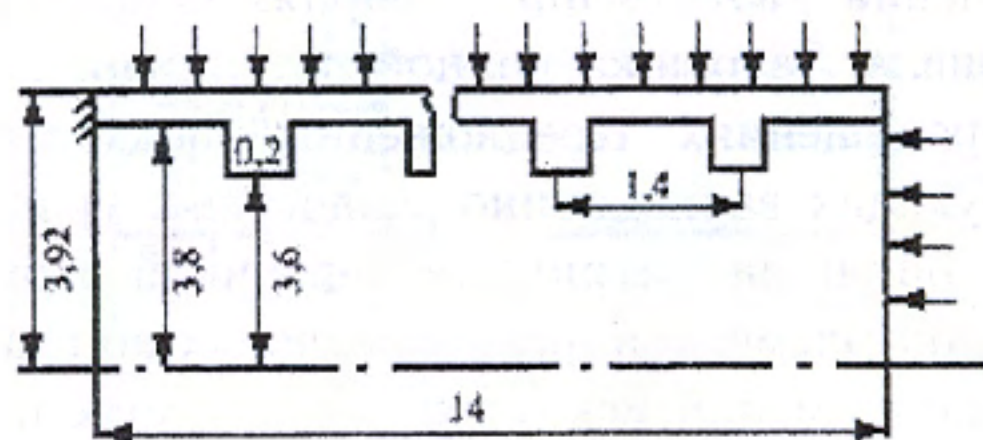


Рис. 4: Схема подкрепленной оболочки

Предлагаемая расчетная схема позволила решить задачу без ограничений на расположение ребер и их размеры как для достаточно длинных оболочек, так и коротких, с учетом влияния граничных условий и условий закрепления торцов оболочки на ее напряженное состояние, а также провести расчеты НДС на основании соотношений (24, 25) для достаточно тонких оболочек, для которых простое перенесение аппроксимирующих конечно-разностных соотношений, пригодных для массивов, не приводит к положительному результату.



Для проверки влияния ошибки округления в процессе численной реализации решения проводились сравнительные расчеты для ортотропных оболочек длиной  $l$ , обладающих как общей осевой симметрией (относительно оси  $z$ ), так и симметрией относительно плоскости  $z = l/2$ . Изменение граничных условий на одном торце оболочки не приводило к существенным изменениям в решении на другом торце и практически исчезло с увеличением длины оболочки. Сравнительные расчеты проводились как для оболочек постоянной толщины, так и для подкрепленных оболочек со сгущением сетки в местах концентрации напряжений. В процессе увеличения количества узлов проверялась сходимость решения. Расчеты, проведенные для ортотропных оболочек постоянной толщины, сравнивались с известными классическими решениями для оболочек. В безмоментной части решения совпадение результатов выполнялось с высокой степенью точности.

Ниже на рис. 5 и 6 приводятся результаты расчетов, полученных при определении НДС оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости, в сравнении с результатами, приведенными в [15]. Расчеты проводились для оболочки, изображенной на рис. 4. В средней части оболочки выделялись ребра, которые практически находились в равно напряженном состоянии, т.е. в условиях задачи [14-17].

Следует отметить, что при реализации представленной расчетной схемы для толстостенной оболочки потребовалось большое количество узлов, особенно в местах сопряжения ребер и оболочки. При сгущении сетки по толщине оболочки значения радиальных напряжений внутри элементов, примыкающих к наружной поверхности оболочки, отличались по абсолютной величине менее чем на 1% от величины давления, действующего на оболочку. Расчет НДС оболочки и ребер в значительном удалении от торцов согласуется с результатами, представленными в [14-17]. Безразмерные численные значения напряжений на рис. 5, 6 приводятся по отношению к величине действующего внешнего равномерно распределенного давления, равного  $10^6$  кг/м<sup>2</sup>. Физико-механические характеристики упругих свойств материалов оболочки и ребер приведены в [15].

**Заключение.** В статье представлены аппроксимирующие соотношения, позволяющие проводить расчет НДС оболочек и оболочечных конструкций с трехмерных позиций без допущений, свойственных теориям оболочек, на основе построения к.-р. аналога функционала Лагранжа полной потенциальной энергии деформации упругой системы в перемещениях. Предложенный подход обеспечил возможность построения соответствующих вариационно-разностных уравнений с положительно-определенными симметричными матрицами ленточной структуры, сохраняющими преобладание по величине элементов, расположенных по главной диагонали и соответствующих коэффициентам при искомым варьируемым перемещениях, в то время как это свойство теряется при применении внутриячеечных к.-р. аппроксимирующих соотношений [14], традиционно используемых при реализации вариационно-разностного метода решения задач теории упругости, так как для тонких протяженных оболочек к.-р. сетки могут содержать ячейки, имеющие размеры на несколько порядков ниже в направлении толщины оболочек по сравнению с направлениями вдоль срединной поверхности.



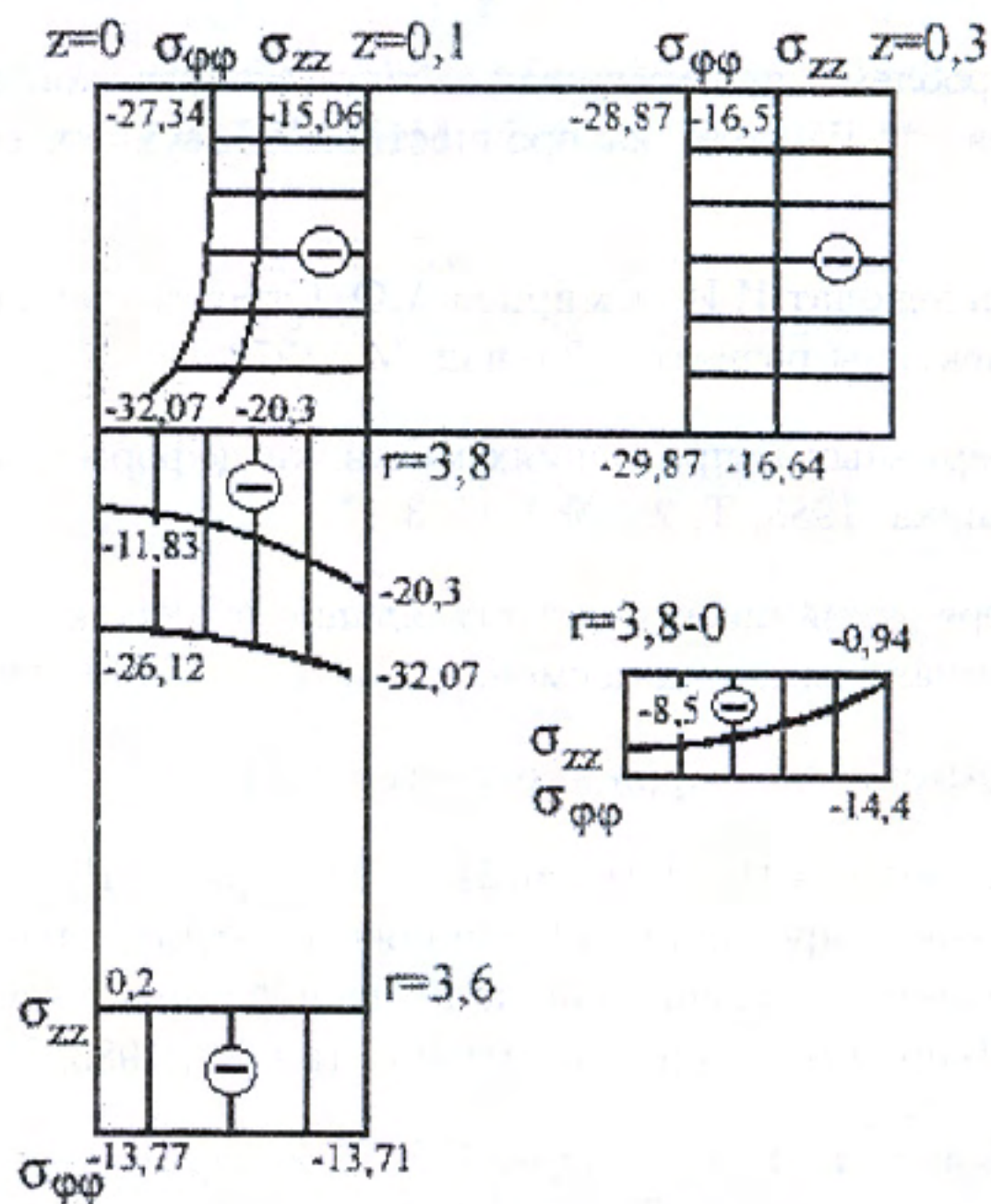


Рис. 5: Напряжения  $\sigma_{\phi\phi}$ ,  $\sigma_{zz}$  в средней части подкрепленной оболочки

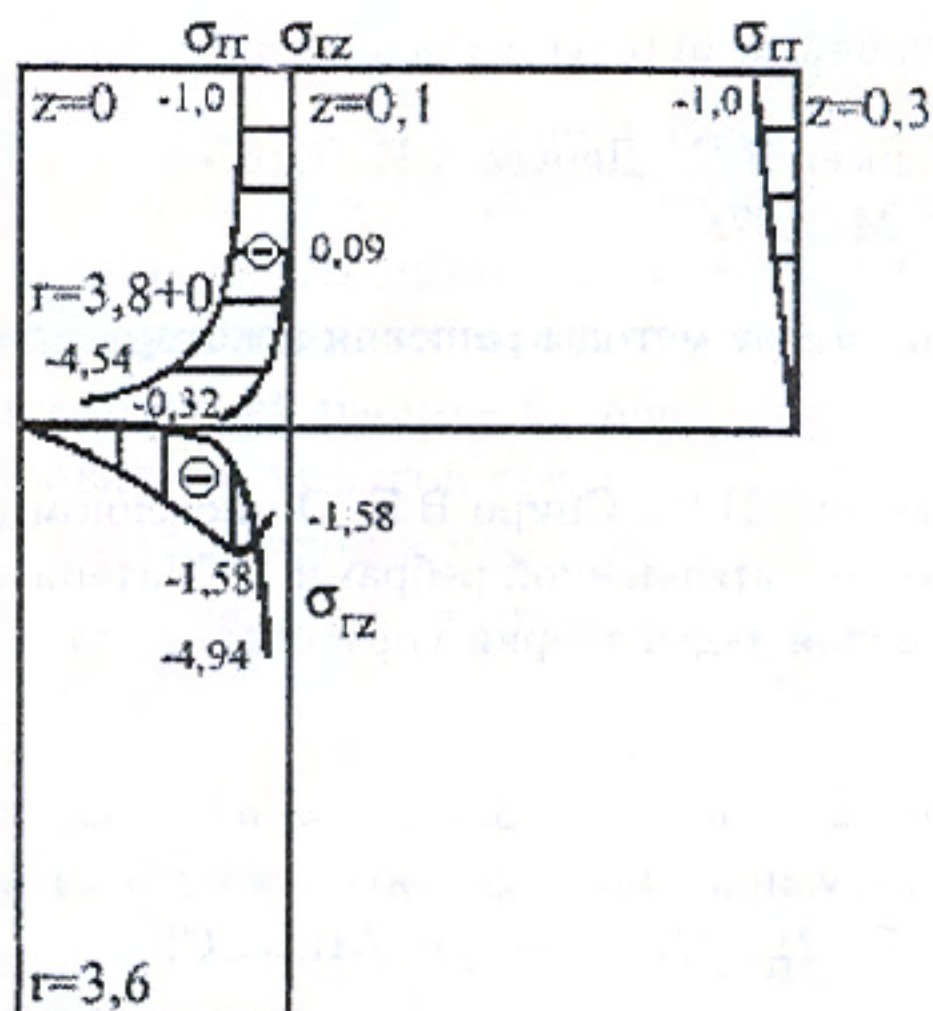


Рис. 6: Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rz}$  в средней части подкрепленной оболочки



## Список литературы

- [1] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., 1974.
- [2] Образцов И.Ф. Проблемы проектирования тонкостенных конструкций из композиционных материалов. // Расчеты на прочность: Сб. научных статей. М., 1989. В. 30. С. 3-6.
- [3] Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. 2-е изд. М., 1972.
- [4] Гузь А.Н. О современных направлениях механики деформируемого твердого тела // Прикладная механика. 1985. Т. 21. № 1. С. 3-11.
- [5] Бушнелл Д. Потеря устойчивости и выпучивание оболочек -- ловушка для проектировщиков // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19. № 10. С. 93-154.
- [6] Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М., 1992.
- [7] Колдунов В.А., Кудинов А.Н., Люкшин П.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета. // Материалы 13-й Всесоюз. конф. «Теория пластин и оболочек». Таллин, 1983. Ч. 3. С. 55-60.
- [8] Колдунов В.А., Лейцин В.Н., Пономарев С.В. Некоторые численные методы механики деформируемого твердого тела. Томск, 1987.
- [9] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
- [10] Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л., 1972.
- [11] Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., 1978.
- [12] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., 1987.
- [13] Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М., 1978.
- [14] Молчанов Н.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. Киев, 1979.
- [15] Яковлев М.Ф., Левченко И.С., Спиро В.Е. О численном расчете на прочность цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами // Материалы 4-й Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск, 1976. Ч. 2. С. 114-125.
- [16] Дейнека В.С. Расчет методом конечных элементов некоторой ортотропной цилиндрической оболочки, регулярно подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости. Киев, 1977. (Препринт — 77-21 / Ин-т киберн. АН УССР).
- [17] Дейнека В.С., Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии толстой цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Материалы 5-й Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск, 1978. С. 48-54.