УДК 539.3

ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ ИЛИ СЖАТИИ[1]

К.М. Зингерман

Кафедра вычислительной математики

The condition of strong ellipticity is verified for Murnaghan's nonlinear elastic material undergoing uniform volumetric tension or compression. The approach that is developed by L.M. Zubov and A.N. Rudev is used. The numerical results are presented for organic glass.

Выполнена проверка условия сильной эллиптичности для нелинейно-упругого материала типа Мурнагана для случая всестороннего растяжения или сжатия на основе подхода, предложенного Л.М. Зубовым и А.Н. Рудевым. Приведены результаты численных расчетов для оргстекла.

Введение. Система уравнений равновесия для нелинейно-упругого материала называется сильно эллиптической [3], если для этого материала выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Psi_{ij}\, \partial \Psi_{kl}} n_i n_k m_j m_l > 0$$

для произвольных единичных векторов $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{m} = m_j \mathbf{e}_j$, т.е. положительно определена соответствующая квадратичная форма. Здесь Π — удельная потенциальная энергия деформации, Ψ_{ij} — компоненты аффинора деформаций $\mathbf{\Psi}$ в некотором базисе.

Сильная эллиптичность — свойство материала, определяемое заданием удельной потенциальной энергии деформации. При заданной энергии сильная эллиптичность может иметь место для определенных множеств значений тензора $\mathbf{\Psi}$ (т.е. при определенной деформации) и отсутствовать для других множеств этих значений. С физической точки зрения условие сильной эллиптичности (условие Адамара) эквивалентно требованию вещественности скоростей распространения плоских волн малой амплитуды в однородно деформированной упругой среде.

В [2] предложен эффективный подход к проверке условия Адамара для сжимаемых нелинейно-упругих материалов, который позволяет свести ее к решению системы элементарных неравенств. В настоящей статье этот подход применяется к материалу типа Мурнагана. Подробно рассматривается случай всестороннего деформирования. Расчеты выполнены с использованием системы аналитических вычислений Maple [4]. Приведены численные результаты для оргстекла.

1. Система элементарных неравенств, равносильных условию Адамара. Следуя [2], будем использовать обозначения

$$\alpha_k = \frac{\Pi_i v_i - \Pi_j v_j}{{v_i}^2 - {v_j}^2}, \quad \beta_k = \Pi_{kk}, \quad \gamma_k^{\pm} = \pm \Pi_{ij} + \frac{\Pi_i \mp \Pi_j}{v_i \mp v_j}. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 03-01-00233.

Здесь $\Pi_i \equiv \dfrac{\partial \Pi}{\partial v_i}$; $\Pi_{ij} \equiv \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial v_j}$; (i, j, k) — произвольная перестановка индексов $(1, 2, 3)$; v_1, v_2, v_3 — главные кратности удлинений.

Согласно [2] система элементарных неравенств, эквивалентных условию Адамара, имеет вид

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \tag{2}$$

$$\gamma_k^{\pm} + \sqrt{\beta_i \beta_j} > 0, \tag{3}$$

$$(\gamma_i^m < 0) \wedge (\gamma_j^n < 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta_k \gamma_k^{pq} - \gamma_i^p \gamma_j^q + \left[\beta_k \beta_j - (\gamma_i^p)^2\right]^{1/2} \left[\beta_k \beta_i - (\gamma_j^q)^2\right]^{1/2} > 0. \tag{4}$$

В (3), (4) (i, j, k) — произвольная перестановка индексов $(1, 2, 3)$. Символы p, q в (4) принимают значения плюс и минус, а их произведение pq определяется по правилу перемножения чисел $+1$, -1, т.е. pq представляет собой плюс для одноименных и минус для разноименных p, q. Условие (4) должно выполняться при любом выборе знаков p, q.

В [2] отмечено, что из 12 импликаций (4) по крайней мере 9 заведомо выполняются, если справедливы неравенства (2).

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначение

$$\delta_k^{\pm} = \beta_i \beta_j - (\gamma_k^{\pm})^2, \tag{5}$$

тогда условия (3), (4) могут быть записаны в виде

$$(\gamma_k^{\pm} \geqslant 0) \vee (\delta_k^{\pm} > 0), \tag{6}$$

$$(\gamma_i^p < 0) \wedge (\gamma_j^q < 0) \Rightarrow \beta_k \gamma_k^{pq} - \gamma_i^p \gamma_j^q + \sqrt{\delta_i^p \delta_j^q} > 0. \tag{7}$$

2. Проверка элементарных неравенств для материала типа Мурнагана. Потенциал Мурнагана может быть записан в виде [3]

$$\Pi = (\lambda/2 + \mu)\,[I_1(\mathbf{C})]^2 - 2\,\mu\, I_2(\mathbf{C}) +$$
$$+ \frac{1}{3}\,(l + 2\,m)\,[I_1(\mathbf{C})]^3 - 2\,m\, I_1(\mathbf{C})\, I_2(\mathbf{C}) + n\, I_3(\mathbf{C}). \tag{8}$$

Здесь λ, μ, l, m, n — константы материала; $\mathbf{C}$ — тензор деформаций Коши–Грина; $I_1(\cdot)$, $I_2(\cdot)$, $I_3(\cdot)$ — инварианты тензора второго ранга.

Выразим инварианты тензора деформаций Коши–Грина $\mathbf{C}$ через инварианты тензора меры деформаций Коши–Грина $\mathbf{G}$, используя формулы [3]

$$I_1(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\, I_1(\mathbf{G}) - \frac{3}{2}, \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{4}\, I_2(\mathbf{G}) - \frac{1}{2}\, I_1(\mathbf{G}) + \frac{3}{4},$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \frac{1}{8}\, I_3(\mathbf{G}) - \frac{1}{8}\, I_2(\mathbf{G}) + \frac{1}{8}\, I_1(\mathbf{G}) - \frac{1}{8}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (8), получим

$$\Pi = \left(\frac{1}{12}m + \frac{1}{24}l\right)[I_1(\mathbf{G})]^3 + \left(-\frac{1}{4}m + \frac{1}{8}\lambda - \frac{3}{8}l + \frac{1}{4}\mu\right)[I_1(\mathbf{G})]^2 +$$
$$+ \left(-\frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}n - \frac{1}{4}m\,I_2(\mathbf{G}) + \frac{9}{8}l - \frac{1}{2}\mu\right) I_1(\mathbf{G}) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}n + \frac{3}{4}m\right) I_2(\mathbf{G}) + \frac{9}{8}\lambda - \frac{1}{8}n + \frac{3}{4}\mu - \frac{9}{8}l + \frac{1}{8}n\,I_3(\mathbf{G}). \quad (9)$$

Подставив в полученную формулу выражения для инвариантов тензора $\mathbf{G}$ через главные кратности удлинений v_i, v_j, v_k

$$I_1(\mathbf{G}) = {v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2, \quad I_2(\mathbf{G}) = {v_i}^2\,{v_j}^2 + {v_j}^2\,{v_k}^2 + {v_i}^2\,{v_k}^2,$$
$$I_3(\mathbf{G}) = {v_i}^2\,{v_j}^2\,{v_k}^2,$$

имеем

$$\Pi = \left(\frac{1}{12}m + \frac{1}{24}l\right)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2)^3 +$$
$$+ \left(-\frac{1}{4}m + \frac{1}{8}\lambda - \frac{3}{8}l + \frac{1}{4}\mu\right)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2)^2 +$$
$$+ \left(-\frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}n + \frac{9}{8}l - \frac{1}{2}\mu\right)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2) -$$
$$- \frac{1}{4}m\,({v_i}^2\,{v_j}^2 + {v_j}^2\,{v_k}^2 + {v_i}^2\,{v_k}^2)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}n + \frac{3}{4}m\right)({v_i}^2\,{v_j}^2 + {v_j}^2\,{v_k}^2 + {v_i}^2\,{v_k}^2) +$$
$$+ \frac{1}{8}n\,{v_i}^2\,{v_j}^2\,{v_k}^2 + \frac{9}{8}\lambda - \frac{1}{8}n + \frac{3}{4}\mu - \frac{9}{8}l. \quad (10)$$

Здесь, как и выше, (i, j, k) — произвольная перестановка индексов $(1, 2, 3)$.

Дифференцируя (10) по v_i, находим

$$\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}l\right)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2)^2\,v_i +$$
$$+ \left(-m + \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}l + \mu\right)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2)\,v_i -$$
$$- \frac{1}{2}m\,(v_i\,{v_j}^2 + v_i\,{v_k}^2)({v_i}^2 + {v_j}^2 + {v_k}^2) +$$
$$+ \left[-\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}m\,({v_i}^2\,{v_j}^2 + {v_j}^2\,{v_k}^2 + {v_i}^2\,{v_k}^2) + \frac{9}{4}l - \mu\right] v_i +$$
$$+ \left(-\mu - \frac{1}{4}n + \frac{3}{2}m\right)(v_i\,{v_j}^2 + v_i\,{v_k}^2) + \frac{1}{4}n\,v_i\,{v_j}^2\,{v_k}^2. \quad (11)$$

Аналогично определяются Π_j и Π_k.

Подставляя выражения (10), (11) в (1), находим

$$
\begin{aligned}
\alpha_k = \frac{9}{4}\,l + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \left(\frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,l\right)\, {v_i}^4 +& \\
+ \left[\left(\frac{1}{2}\,l + \frac{1}{2}\,m\right)\, {v_j}^2 + \frac{1}{2}\,l\,{v_k}^2 + \frac{1}{2}\,\lambda + \mu - \frac{3}{2}\,l - m\right]\, {v_i}^2 +& \\
+ \left(\frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,l\right)\, {v_j}^4 + \left(\frac{1}{2}\,l\,{v_k}^2 + \frac{1}{2}\,\lambda + \mu - \frac{3}{2}\,l - m\right)\, {v_j}^2 +& \\
+ \frac{1}{4}\,l\,{v_k}^4 + \left(-\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{2}\,\lambda + \frac{1}{2}\,m - \frac{3}{2}\,l\right)\, {v_k}^2,& \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_k = \frac{9}{4}\,l + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \frac{1}{4}\,l\,{v_i}^4 +& \\
+ \left[\left(\frac{1}{2}\,l - \frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,n\right)\, {v_j}^2 + \frac{3}{2}\,l\,{v_k}^2 + \frac{1}{2}\,\lambda + \frac{1}{2}\,m - \frac{3}{2}\,l - \frac{1}{4}\,n\right]\, {v_i}^2 +& \\
+ \frac{1}{4}\,l\,{v_j}^4 + \left(\frac{3}{2}\,l\,{v_k}^2 + \frac{1}{2}\,\lambda + \frac{1}{2}\,m - \frac{3}{2}\,l - \frac{1}{4}\,n\right)\, {v_j}^2 +& \\
+ \left(\frac{5}{2}\,m + \frac{5}{4}\,l\right)\, {v_k}^4 + \left(-\frac{9}{2}\,l + \frac{3}{2}\,\lambda - 3\,m + 3\,\mu\right)\, {v_k}^2,& \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_k^+ = \left(l + \frac{1}{2}\,m\right)\,(v_j\,{v_i}^3 + \,{v_j}^3\,v_i) + \left(-3\,l - \frac{1}{2}\,m - \frac{1}{4}\,n + \lambda + \mu\right)\, v_i\,v_j +& \\
+ \left(\frac{1}{4}\,n - \frac{1}{2}\,m + l\right)\, {v_k}^2\,v_j\,v_i + \left(\frac{1}{2}\,l + \frac{1}{2}\,m\right)\, {v_i}^2\,{v_j}^2 +& \\
+ \frac{1}{2}\,l\,({v_i}^2 + {v_j}^2)\,{v_k}^2 + \left(-m + \frac{1}{2}\,\lambda + \mu - \frac{3}{2}\,l\right)\,({v_i}^2 + {v_j}^2) +& \\
+ \left(-\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{2}\,\lambda + \frac{1}{2}\,m - \frac{3}{2}\,l\right)\, {v_k}^2 + \left(\frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,l\right)\,({v_i}^4 + {v_j}^4) + \frac{1}{4}\,l\,{v_k}^4 +& \\
+ \frac{9}{4}\,l + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu,& \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_k^- = \left(-l - \frac{1}{2}\,m\right)\,(v_j\,{v_i}^3 + {v_j}^3\,v_i) + \left(3\,l + \frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,n - \lambda - \mu\right)\, v_i\,v_j +& \\
+ \left(-\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{2}\,m - l\right)\, {v_k}^2\,v_j\,v_i + \left(\frac{1}{2}\,l + \frac{1}{2}\,m\right)\, {v_i}^2\,{v_j}^2 +& \\
+ \frac{1}{2}\,l\,({v_j}^2 + {v_j}^2)\,{v_k}^2 + \left(-m + \frac{1}{2}\,\lambda + \mu - \frac{3}{2}\,l\right)\,({v_i}^2 + {v_j}^2) +& \\
+ \left(-\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{2}\,\lambda + \frac{1}{2}\,m - \frac{3}{2}\,l\right)\, {v_k}^2 + \left(\frac{1}{2}\,m + \frac{1}{4}\,l\right)\,({v_i}^4 + {v_j}^4) + \frac{1}{4}\,l\,{v_k}^4 +& \\
+ \frac{9}{4}\,l + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu.& \qquad (15)
\end{aligned}
$$

В формулах (12)–(15) по-прежнему (i, j, k) — произвольная перестановка индексов $(1, 2, 3)$. Выражения для $\delta_k^{\pm}$ не приводятся ввиду их громоздкости.

3. Случай всестороннего растяжения или сжатия. Аналитическое исследование условий (2)–(4) [или (2), (6), (7)] в общем случае затруднительно из-за громоздкости полученных выражений. Ограничимся рассмотрением всестороннего растяжения или сжатия. В этом случае $v_i = v_j = v_k = v$, и формулы (12)–(15) принимают вид

$$\alpha_k = \left(\frac{3}{2}\,m + \frac{9}{4}\,l\right)\,v^4 + \left(-\frac{9}{2}\,l - \frac{3}{2}\,m + \frac{3}{2}\,\lambda + 2\,\mu - \frac{1}{4}\,n\right)\,v^2 + \\ + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \frac{9}{4}\,l, \quad (16)$$

$$\beta_k = \left(\frac{21}{4}\,l + 2\,m + \frac{1}{4}\,n\right)\,v^4 + \left(-2\,m - \frac{15}{2}\,l - \frac{1}{2}\,n + \frac{5}{2}\,\lambda + 3\,\mu\right)\,v^2 + \\ + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \frac{9}{4}\,l, \quad (17)$$

$$\gamma_k^+ = \left(\frac{21}{4}\,l + 2\,m + \frac{1}{4}\,n\right)\,v^4 + \left(-2\,m - \frac{15}{2}\,l - \frac{1}{2}\,n + \frac{5}{2}\,\lambda + 3\,\mu\right)\,v^2 + \\ + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \frac{9}{4}\,l, \quad (18)$$

$$\gamma_k^- = \left(-\frac{1}{4}\,n - \frac{3}{4}\,l + m\right)\,v^4 + \left(-m + \frac{1}{2}\,\lambda + \mu - \frac{3}{2}\,l\right)\,v^2 + \\ + \frac{1}{4}\,n - \frac{3}{2}\,\lambda - \mu + \frac{9}{4}\,l. \quad (19)$$

Очевидно, что при всестороннем растяжении или сжатии выражения в правых частях этих формул одни и те же при любом значении индекса k. Поэтому достаточно проверить выполнение условий (2), (6) только при одном значении этого индекса.

Из (17) и (18) видно, что $\gamma_k^+ = \beta_k$, поэтому условие (6) в случае, когда верхний индекс принимает значение плюс, выполняется, если $\beta_k > 0$. Выражение для δ_k^- после преобразований можно записать в виде

$$\delta_k^- = \left[4\,(\lambda + \mu) + (2\,m + 12\,l + n)\,(v^2 - 1)\right]\,v^2\,\alpha_k. \quad (20)$$

Рассмотрим, наконец, условия (7). Поскольку $\gamma_k^+ = \beta_k$, проверка этих условий при $\beta_k > 0$ сводится к анализу одной импликации. С учетом того, что в данном случае $\gamma_i^- = \gamma_j^- = \gamma_k^-$ и $\delta_i^- = \delta_j^- = \delta_k^-$, эту импликацию можно записать в виде

$$(\gamma_k^- < 0) \Rightarrow {\beta_k}^2 - (\gamma_k^-)^2 + |\delta_k^-| > 0. \quad (21)$$

Покажем, что в рассматриваемом случае условие (21) истинно, если $\alpha_k > 0$ и $\beta_k > 0$. Для этого достаточно показать, что при указанных условиях и при $\gamma_k^- < 0$ выполняется неравенство

$$\beta_k{}^2 - (\gamma_k^-)^2 > 0. \tag{22}$$

Это неравенство можно записать в виде

$$(\beta_k - \gamma_k^-)(\beta_k + \gamma_k^-) > 0.$$

Но первый множитель последнего неравенства положителен, а второй множитель равен

$$\beta_k + \gamma_k^- = \gamma_k^+ + \gamma_k^- = 2\alpha_k$$

(здесь учтено соотношение (2.5) работы [2]) и поэтому также положителен. Следовательно, неравенство (22) справедливо, а поэтому импликация (21) истинна.

Таким образом, для проверки условия сильной эллиптичности при всестороннем растяжении или сжатии достаточно убедиться в справедливости неравенств

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad (\gamma_k^- \geqslant 0) \vee (\delta_k^- > 0), \tag{23}$$

левые части которых определяются по формулам (16), (17), (19), (20).

4. Пример численных расчетов. Проведем теперь вычисления для конкретного материала. Возьмем константы материала, соответствующие оргстеклу [1, 3]:

$$\lambda = 0.39, \quad \mu = 0.186, \quad l = -0.109, \quad m = 0.024, \quad n = 0.188.$$

Константы даны в единицах 10^{11} Па.

Подстановка этих значений констант в выражения (16), (17), (19), (20) дает

$$\alpha_k = -0.20925\, v^4 + 1.3645\, v^2 - 0.96925,$$

$$\beta_k = -0.47725\, v^4 + 2.2085\, v^2 - 0.96925,$$

$$\gamma_k^- = 0.05875\, v^4 + 0.5205\, v^2 - 0.96925,$$

$$\delta_k^- = (3.376 - 1.072\, v^2)\, v^2\, \alpha_k.$$

Решая систему неравенств (23), находим, что условие сильной эллиптичности выполняется, если кратность удлинения v находится в диапазоне $0.90 < v < 2.03$.

Заключение. Таким образом, в данной статье выполнена проверка условия сильной эллиптичности для материала типа Мурнагана на основе подхода, предложенного в [2]. Детально исследован случай всестороннего растяжения или сжатия. Приведены результаты численных расчетов для конкретного материала.

Список литературы

[1] Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И., Лебедев В.К. К теории распространения волн в упругом изотропном теле с начальными деформациями // Прикладная механика. 1970. Т. 6. № 12. С. 42–49.

[2] Зубов Л.М., Рудев А.Н. Эффективный способ проверки условия Адамара для нелинейно-упругой сжимаемой среды. Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. № 2. С. 296–305.

[3] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.

[4] Манзон Б.М. Maple 5 Power Edition. М., 1998.