

## О ВЗАИМОВЛИЯНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОТВЕРСТИЯ И ОТВЕРСТИЯ В ФОРМЕ ТРЕХЛУЧЕВОЙ ЗВЕЗДЫ<sup>1</sup>

К.М. Зингерман, О.А. Рябова

The interaction of two holes, originated successively in the previously loaded body of Mooney's material is considered under the conditions of finite strains. Influence of mutual positions of holes and pressure, that is applied to the contours, on the maximal stresses is investigated.

Рассматривается задача о последовательном образовании двух полостей в предварительно нагруженном теле из материала Муни при конечных деформациях. Исследуется влияние расположения отверстий и давления, приложенного к их контурам, на напряженно-деформируемое состояние.

**Введение.** Анализируется взаимовлияние отверстия в форме трехлучевой звезды и эллиптического отверстия, образуемых последовательно в предварительно нагруженном бесконечно протяженном теле из материала Муни, имеющего большие начальные деформации. Постановка задачи осуществляется на основе теории наложения больших деформаций.

**1. Постановка задачи.** Общая постановка задачи следующая. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем, под воздействием внешней нагрузки, приложенной к телу, в нем накапливаются начальные большие деформации и напряжения. Тело переходит в первое промежуточное состояние. В пространственной области, занимаемой телом, мысленно намечается поверхность в форме трехлучевой звезды, которая будет границей области в теле. Часть тела, ограниченная этой поверхностью, удаляется, а ее действие на оставшуюся часть тела заменяется (по принципу освобожденности от связей) силами, распределенными по данной поверхности. Далее эти силы «мгновенно» уменьшаются до нуля, что вызывает возникновение в оставшейся части тела дополнительно больших (по крайней мере в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций и соответствующих им напряжений, которые накладываются на начальные. Изменяется граница тела, и оно переходит во второе состояние.

После образования первой полости подобным образом образуется вторая полость (эллиптическая). При этом в теле возникают новые дополнительные большие (по крайней мере в окрестности границы вновь образованной полости) деформации и напряжения, которые накладываются на уже имеющиеся. Изменяются формы граничных поверхностей. Тело переходит в третье состояние.

Математическая постановка задачи в координатах  $k$ -го состояния для тела, находящегося в  $n$ -м состоянии, в случае отсутствия массовых сил при заданном давлении  $p$  на граничной поверхности отверстий включает [2, 3] уравнение равновесия

$$\overset{k}{\nabla} \cdot \left[ (1 + \Delta_{0,k})^{-1} \overset{k}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{k,n} \right] = 0, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 03-01-00233.

условие несжимаемости

$$(1 + \Delta_{0,n}) = 0, \quad (2)$$

граничные условия

$$\mathbf{N}_n \cdot \Sigma_{0,n} \Big|_{\Gamma_n^k} = -p(1 + \Delta_{0,n}) \mathbf{N}_n \cdot \Psi_{k,n}^{*-1} \cdot \Psi_{k,n}^{-1}, \quad (3)$$

$$\sigma_{0,n}|_{\infty} = \sigma_n^{\infty} \quad (4)$$

определяющее соотношение для материала Муни [4] (при  $\beta = 1$ )

$$\sigma_{0,n} = \mu \mathbf{F}_{0,n} - p_{0,n} \mathbf{I}, \quad (5)$$

зависимость между тензорами истинных и обобщенных напряжений

$$\Sigma_{0,n}^k = (1 + \Delta_{0,n}) \Psi_{k,n}^{*-1} \cdot \sigma_{0,n} \cdot \Psi_{k,n}^{-1} \quad (6)$$

и кинематические соотношения

$$\mathbf{F}_{0,n} = \Psi_{0,n}^* \cdot \Psi_{0,n}, \quad (7)$$

$$\Psi_{n-1,n} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_n, \quad (8)$$

$$\Psi_{m,n} = \Psi_{m,k} \cdot \Psi_{k,n}, \quad (1 + \Delta_{m,n}) = \det \Psi_{m,n}. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{u}_n$  — вектор перемещений из  $(n-1)$ -го в  $n$ -е состояние;  $\Psi_{k,n}$  — аффинор деформаций при переходе из  $k$ -го в  $n$ -е состояние;  $\Delta_{m,n}$  — относительное изменение объема при переходе из  $m$ -го в  $n$ -е состояние;  $\mathbf{F}_{0,n}$  — тензорная мера, обобщающая определение меры деформаций Фингера;  $\sigma_{0,n}$  — тензор полных истинных напряжений в  $n$ -м состоянии;  $\Sigma_{0,n}^k$  — тензор полных обобщенных напряжений в  $n$ -м состоянии, отнесенный к базису  $k$ -го состояния;  $\Gamma_n^k$  — граница тела в  $n$ -м состоянии в координатах  $k$ -го состояния;  $\mathbf{N}_n$  — нормаль к  $\Gamma_n^k$ .  $\sigma_n^{\infty}$  — тензор истинных напряжений на бесконечности в  $n$ -м состоянии, определенный в постановке задачи.

Решение задачи осуществляется в координатах второго промежуточного состояния (т.е. при  $k = 2, n = 2, 3$ ).

**2. Метод решения.** К решению задач на каждом этапе рассмотренного алгоритма может быть применен метод последовательных приближений (метод малого параметра) [4, 6]. Сущность метода применительно к рассматриваемым задачам состоит в следующем [2, 3]. Выбирается малый параметр  $q$  в виде

$$q = \max_{n,i,j} |(\sigma_{0,n}^{\infty})_{ij}| / \mu, \quad (10)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений  $\mathbf{u}_n$  такое разложение может быть записано в форме

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^{(0)} + \mathbf{u}_n^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{u}_n^{(i)} \sim q^{i+1}. \quad (11)$$

После подстановки подобных разложений во все уравнения, входящие в постановку задачи, решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач.

Постановка линеаризованной краевой задачи для  $i$ -го приближения ( $i = 0, 1, \dots$ ) имеет вид [3]

$$\nabla \cdot L_2 [\mathbf{u}^{(i)}, p^{(i)}] = \mathbf{f}^{(i)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{(i)} = h^{(i)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{N} \cdot L_2 [\mathbf{u}^{(i)}, p^{(i)}] \Big|_{\Gamma} = \mathbf{Q}^{(i)}, \quad L_2 [\mathbf{u}^{(i)}, p^{(i)}] \Big|_{\infty} = \boldsymbol{\sigma}_{\infty}^{(i)}, \quad (13)$$

$$L_2 [\mathbf{u}, p] = \mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) - p\mathbf{I}. \quad (14)$$

В формулах (12)–(14) индекс, соответствующий номеру состояния, опущен.

При решении линеаризованной задачи используется метод Колосова–Мухелишвили [5, 6]. Уравнения и граничные условия линеаризованной задачи записываются в комплексной форме. Детальный алгоритм решения линеаризованной задачи рассмотрен в [3]. При проведении расчетов на ЭВМ был использован программный комплекс «Наложение» [1, 3]. При решении задач для отверстий определенной формы с использованием этого программного комплекса необходимо знать функции, осуществляющие конформное отображение контура каждого отверстия в момент его образования на единичную окружность (отображающие функции). Для отверстия в форме трехлучевой звезды отображающая функция была задана в виде

$$\omega_1(\xi) = R_1 \left( \xi + \frac{1}{2\xi^2} \right),$$

а для эллиптического отверстия — в виде

$$\omega_2(\xi) = x_e + iy_e + R_2 \left( \xi + \frac{m}{\xi} \right),$$

где  $m$  — эксцентриситет эллипса.

**3. Модельные расчеты.** Определены нулевое и первое приближения. Расчеты проведены для случая одноосной начальной растягивающей нагрузки ( $\sigma_{11}^{\infty} = 0$ ,  $\sigma_{22}^{\infty}/\mu = 0.15$ ).

На рис. 1 показано расположение отверстий в декартовой системе координат. Координаты центра звезды (0;0), эллипса — ( $x_e$ ; 0). Точка  $A$  и точка  $B$  — точки максимальной концентрации истинных контурных напряжений.

Рассмотрим сначала влияние эффектов взаимодействия на концентрацию напряжения. На рис. 2 приведена зависимость напряжения в вершине эллипса (точке  $B$ ) от расстояния между центрами отверстий, ординаты центров отверстий равны нулю. Для сравнения приведены результаты для изолированного отверстия. Из графика видно, что с увеличением расстояния между центрами отверстий, концентрация напряжения в точке  $B$  уменьшается и приближается к величине напряжения в этой же точке для случая изолированного отверстия. Если при расстоянии между центрами отверстий, равном 2.3, концентрация напряжения в точке  $B$  больше в 1.4 раза, чем для случая изолированного отверстия, то при расстоянии, равном 3.0, отношение напряжений уже равно 1.2.

Исследуем теперь влияние нелинейности. На рис. 3 показана зависимость концентрации напряжения от расстояния между центрами отверстий. Кривые с маркером

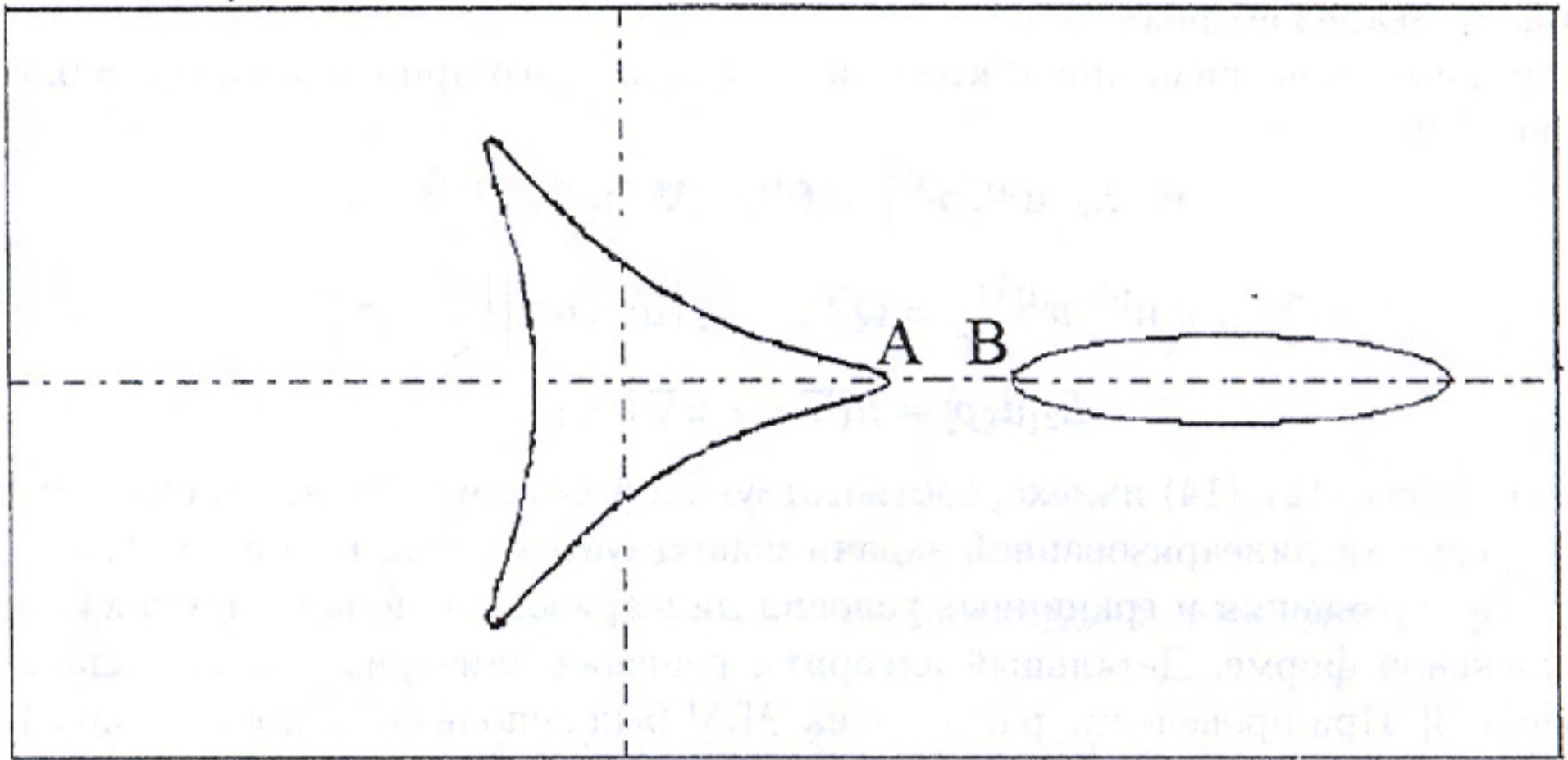


Рис. 1: Расположение отверстий



Рис. 2: Зависимость истинных контурных напряжений в вершине эллипса от расстояния между центрами отверстий (пунктирная линия соответствует изолированному отверстию)

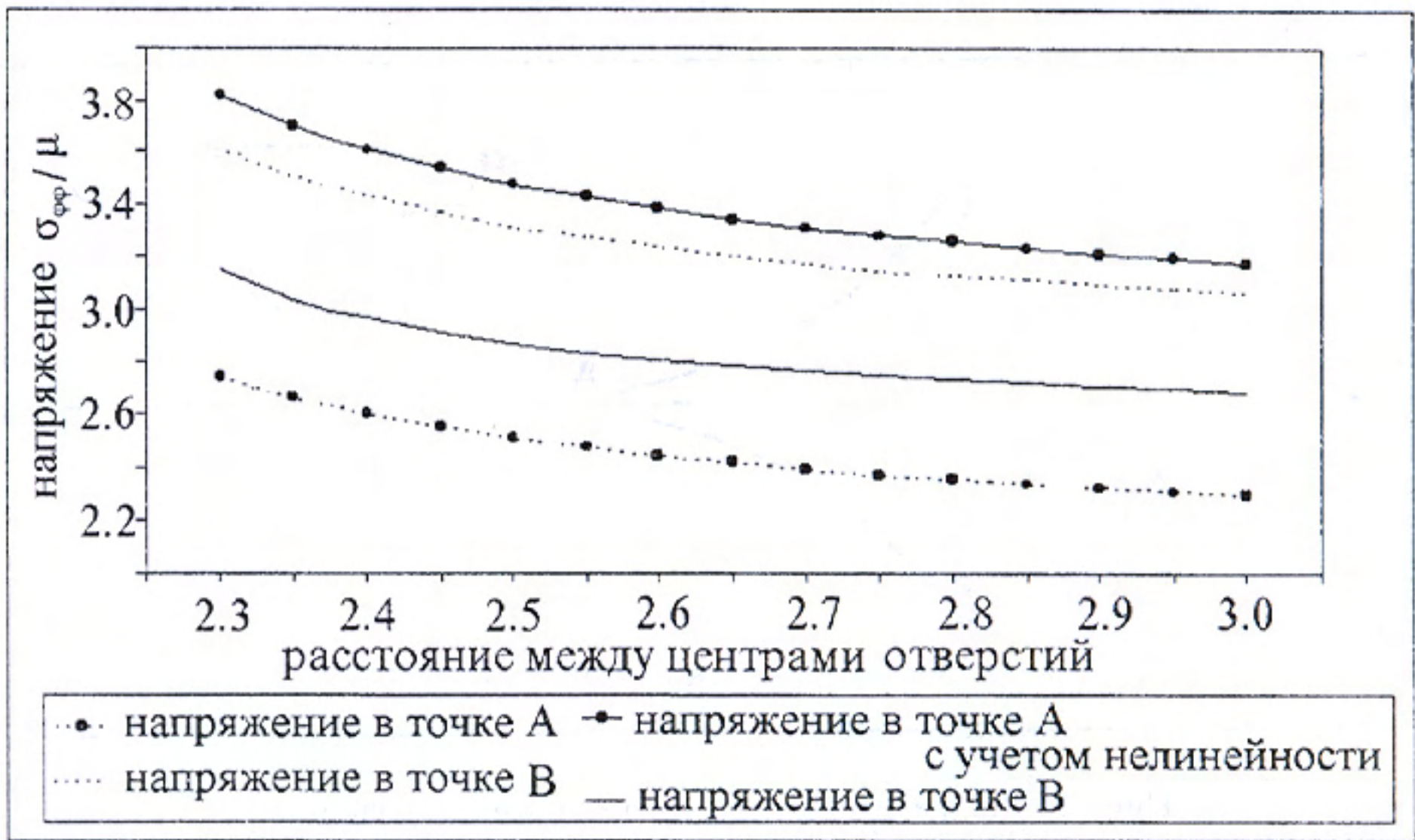


Рис. 3: Зависимость истинных контурных напряжений в точках максимальной концентрации от расстояния между центрами



Рис. 4: Истинные контурные напряжения в точках максимальной концентрации при наличии давления и при его отсутствии в зависимости между центрами

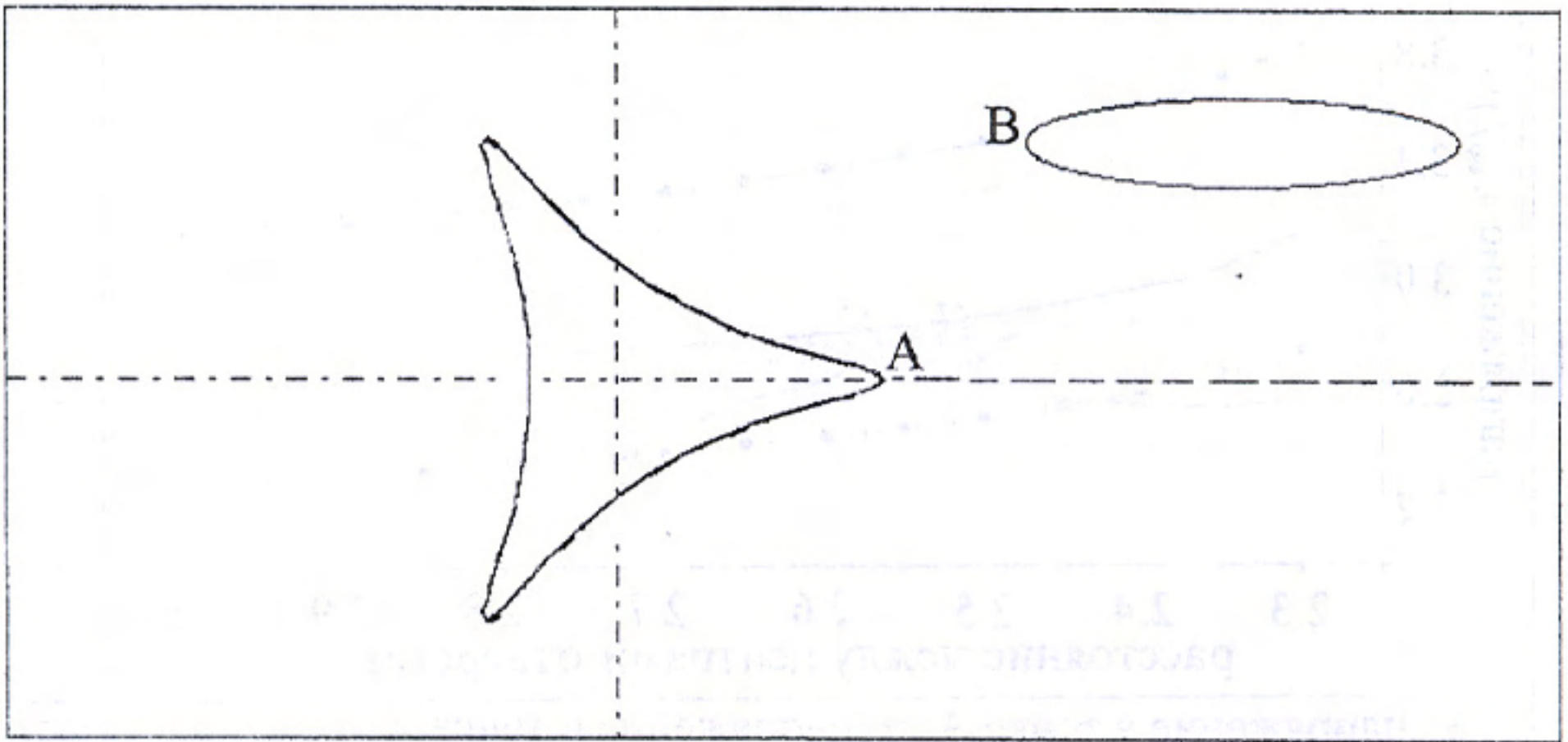


Рис. 5: Несимметричное расположение отверстий

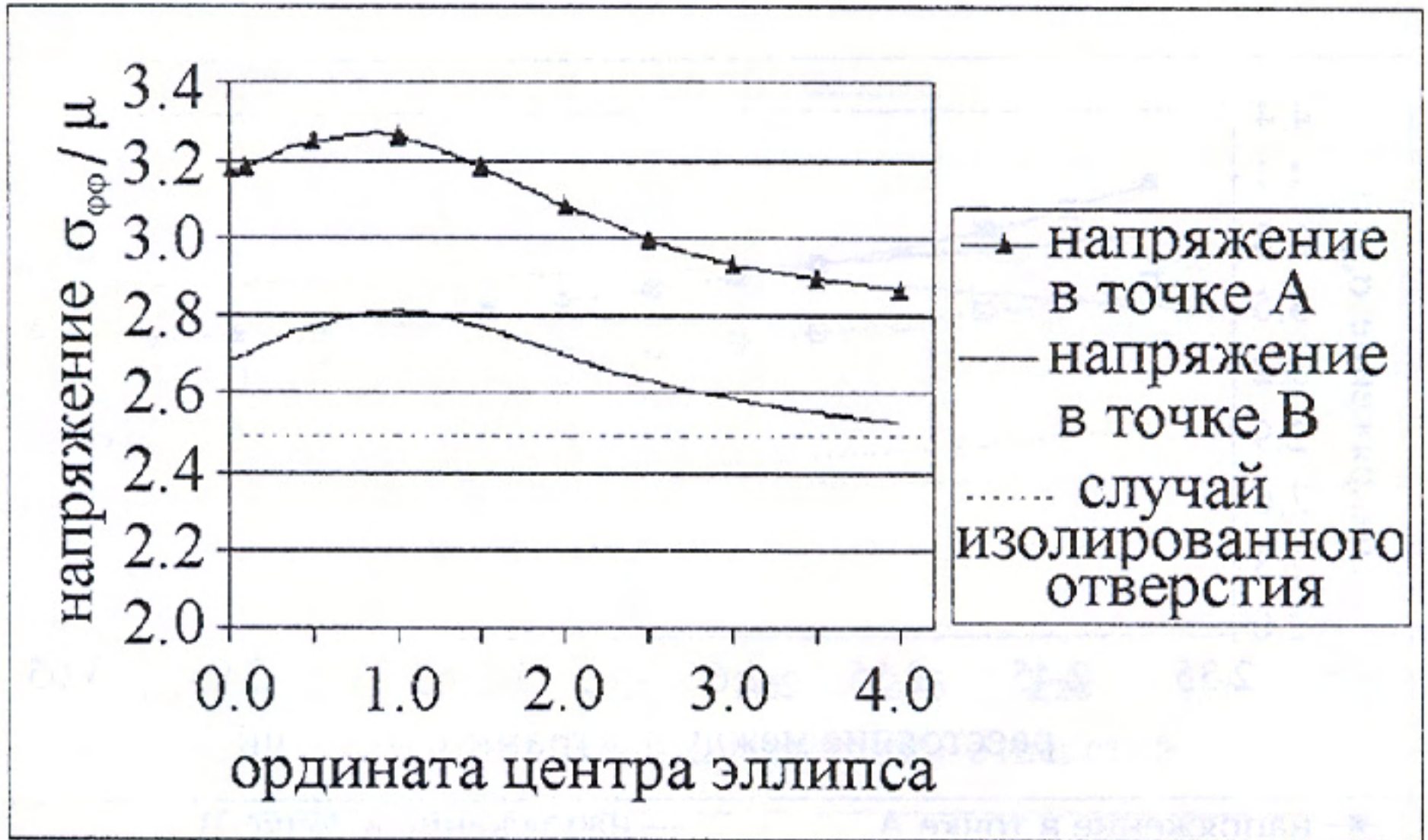


Рис. 6: Влияние несимметричности расположения отверстий на концентрацию напряжений

показывают напряжение в точке  $A$  (см. рис. 1). Пунктирные линии соответствуют решению линеаризованной задачи. Как видно из рис. 3, напряжение в точке  $A$  меньше, чем в точке  $B$ , в 1.3 раза. Причем в случае решения задачи с учетом нелинейных эффектов, концентрация напряжения в точке  $A$  оказывается больше, чем в точке  $B$ . Нелинейность ведет к росту концентрации напряжения в точке  $A$ . С учетом нелинейной поправки напряжение в точке  $A$  возрастает в 1.4 раза. В точке  $B$  напряжение уменьшается в 1.1 раза.

На рис. 4 приведены графики зависимости концентрации напряжения от расстояния между центрами отверстий, если к контуру отверстия приложено давление (давление  $p = 0.1\mu$  приложено на контуре эллиптического отверстия). Как видно из рис. 4, напряжение в точке  $B$  возросло в 1.3 раза по сравнению со случаем отсутствия давления. В точке  $A$  напряжение увеличилось в 1.14 раза при расстоянии между центрами отверстий, равном 2.35. Чем дальше друг от друга расположены отверстия, тем меньше концентрация напряжения в точке  $A$ . При расстоянии между центрами отверстий, равном 3.00, напряжение в точке  $A$  уже равно 1.06.

Исследуем теперь влияние несимметричности расположения отверстий на концентрацию напряжений. Взаимное расположение отверстий показано на рис. 5. При этом абсцисса центра эллипса постоянна. На рис. 6 показано, как изменяется концентрация напряжений в зависимости от ординаты  $x_e$  центра эллипса. С увеличением (по модулю) ординаты центра эллипса истинное напряжение на контуре вначале увеличивается, достигая максимального значения при  $y = 1$ , а затем уменьшается. Пунктирная линия показывает напряжение в точке  $B$  для случая изолированного отверстия. Как можно увидеть из рис. 6, при увеличении ординаты эллипса концентрация напряжения в точке  $B$  приближается к величине напряжения в этой точке для случая изолированного отверстия.

**Заключение.** Таким образом, в данной статье проведен анализ влияния различных факторов на концентрацию напряжения около отверстий, исследовано влияние нелинейных эффектов. В частности, установлено, что вследствие взаимодействия отверстий концентрация напряжений возрастает для рассмотренных случаев их взаимного расположения в 1.2–1.4 раза. Приложение давления к контуру эллиптического отверстия ведет к росту максимальной концентрации напряжений на контурах обоих отверстий — примерно на 30% для эллиптического отверстия и примерно на 15% для отверстия в форме звезды (при заданных параметрах нагружения). Наконец, при «смещении» центра эллиптического отверстия в направлении оси  $y$  сначала наблюдается рост концентрации напряжений на контурах обоих отверстий, а затем — уменьшение.

### Список литературы

- [1] Зингерман К.М., Левин В.А. Последовательное образование двух неравных эллиптических отверстий в теле из вязкоупругого несжимаемого материала. Конечные деформации // Известия АН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 162–169.
- [2] Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М., 1999.
- [3] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М., 2002.

- [4] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
- [5] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
- [6] Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, 1968.