УДК 532.5:517.958

ПАРАБОЛИЗОВАННЫЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ[1]

Ю.В. Шеретов
Кафедра информатики и методов оптимизации

The parabolized quasi-gas-dynamic equations are constructed. Their entropy properties are studied.

Построены параболизованные квазигазодинамические уравнения. Исследованы их энтропийные свойства.

Введение. При математическом моделировании стационарных задач об обтекании твердых тел сверхзвуковым потоком сжимаемого вязкого теплопроводного газа широко используются различные упрощенные формы системы Навье-Стокса [1–3]. Среди них выделим погранслойное приближение Л. Прандтля [1], параболизованные уравнения Навье-Стокса [2] и уравнения вязкого ударного слоя [3]. Численный анализ таких задач осуществляется, как правило, с помощью так называемых маршевых алгоритмов. Процедура нахождения решения аналогична той, которая применяется в разностных схемах расчета эволюционных уравнений смешанного гиперболически-эллиптического типа. Чтобы учесть распространение возмущений вверх по потоку, используют метод глобальных итераций с многократным проходом по маршевой координате.

Т.Г. Елизаровой и Б.Н. Четверушкиным была предложена новая квазигазодинамическая система уравнений, показавшая свою эффективность при моделировании широкого класса задач [4, 5]. Ее детальное теоретическое исследование проведено в [6]. В частности, доказана теорема о неубывании полной термодинамической энтропии в ограниченных объемах с теплоизолированными стенками.

В настоящей работе построены параболизованные квазигазодинамические уравнения с хорошими энтропийными свойствами. Схема вывода аналогична той, которая была предложена в классической теории Навье-Стокса С. Лубардом и У. Хеллиуэллом [2].

1. Параболизованные квазигазодинамические уравнения. Рассмотрим задачу Блазиуса об обтекании плоской пластины $l = \{(x, y) : \ x \geq 0, \, y = 0\}$ однородным сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. В правых частях стационарной квазигазодинамической системы, выписанной в декартовых координатах $(x, \, y)$ без учета внешних сил, отбросим все члены, содержащие хоты бы одно частное дифференцирование по переменной x. В результате получим параболизованные квазигазодинамические уравнения

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 + p)\right], \tag{1}$$

[1]Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 01-01-00061.

$$\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\eta+\tau\rho u_y^2)\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_x\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2+p)\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2+p)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y\left(\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\left(u_y\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right], \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u_x\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho u_y\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\tau\rho u_y^2\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\eta+\tau\rho u_y^2)u_x\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]+ \tag{4}$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2+p)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y^2\left(\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y\left(u_y\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right].$$

Добавим к (1)–(4) уравнения состояния идеального политропного газа

$$p=\rho RT,\quad \varepsilon=c_v T. \tag{5}$$

Зависимость коэффициента динамической вязкости η от температуры T выберем в виде

$$\eta=\eta_\infty\left(\frac{T}{T_\infty}\right)^\omega, \tag{6}$$

где η_∞ — известное значение η при температуре T_∞, ω — заданный показатель степенной зависимости из промежутка $[0,1]$. Связь η с теплопроводностью κ и средним временем свободного пробега τ дается соотношениями

$$\kappa=\frac{c_p\eta}{\mathrm{Pr}},\quad \tau=\frac{\eta}{p\,Sc}. \tag{7}$$

Здесь использованы также следующие обозначения: ε — внутренняя энергия единицы массы, $R=c_p-c_v$ — газовая постоянная, c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, Pr и Sc — числа Прандтля и Шмидта. Для одноатомного газа показатель адиабаты γ равен 5/3; $\mathrm{Pr}=2/3$, $Sc=0.77$. Система (1)–(7) замкнута относительно неизвестных функций — плотности $\rho=\rho(x,y)$, компонент скорости $u_x=u_x(x,y)$, $u_y=u_y(x,y)$ и давления $p=p(x,y)$.

2. Энтропийные свойства параболизованных КГД уравнений. Представим (1)–(4) в недивергентной форме

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y^*)}{\partial y}=0, \tag{8}$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y^* \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\eta + \tau\rho u_y^2)\frac{\partial u_x}{\partial y}\right], \tag{9}$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y^* \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y\left(\rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\left(u_y\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right], \tag{10}$$

$$\rho u_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) + \rho u_y^* \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\rho u_y^2 T\frac{\partial s}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\eta + \tau\rho u_y^2)u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \tag{11}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y^2\left(\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u_y\left(u_y\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right],$$

где

$$u_y^* = u_y - \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 + p).$$

С помощью (9), (10) равенство (11) можно преобразовать к виду

$$\rho\left[u_x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + u_y^*\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + p u_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + p u_y^*\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\rho u_y^2 T\frac{\partial s}{\partial y}\right] + (\eta + \tau\rho u_y^2)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{4}{3}\eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \tag{12}$$

$$+\frac{\tau}{\rho}\left(\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \tau\left(u_y\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}u_y\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Используя соотношения (5), тождество Гиббса $Tds = d\varepsilon + pd(1/\rho)$ для энтропии $s = c_v\ln(p/\rho^\gamma) + const$ и закон сохранения массы (8), из (12) выводим уравнение баланса энтропии

$$\frac{\partial(\rho u_x s)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^* s)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\kappa}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\rho u_y^2\frac{\partial s}{\partial y}\right] + X, \tag{13}$$

в котором величина X вычисляется по формуле

$$X = \frac{\kappa}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \frac{\eta + \tau\rho u_y^2}{T}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{4\eta}{3T}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{p\tau}{\rho^2 T}\left[\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\right]^2 +$$

$$+\frac{\tau}{\rho T}\left[\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\right]^2 + \frac{\tau}{\rho\varepsilon T}\left[\rho u_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + p\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]^2.$$

Пусть в области $G = \{(x, y):\ 0 \le x \le L,\ 0 < y < H\}$ имеется решение системы (1)–(7), удовлетворяющее при $y = 0$ и $y = H$ условиям

$$u_y = 0, \quad u_y^* = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Будем также считать, что $u_x > 0$ всюду в G. Такая постановка задачи соответствует течению газа слева направо в плоском канале с неподвижными твердыми теплоизолированными стенками. Интегрируя (13) по y на отрезке $[0,\, H]$, получим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^H (\rho u_x s)\, dy = \int\limits_0^H X\, dy.$$

Принимая во внимание неотрицательность X и полагая $\varphi(x) = \int_0^H (\rho u_x s)\, dy$, заключаем, что

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \geq 0, \quad x \in [0,\, L].$$

Такое же неравенство может быть доказано и для классических параболизованных уравнений Навье-Стокса, которые получаются из (1)–(4) формальным предельным переходом при $\tau \to 0$.

3. Квазигазодинамические уравнения в приближении вязкого ударного слоя. Сохраняя в правых частях исходной системы члены, имеющие в безразмерном представлении максимальный порядок малости по обратному числу Рейнольдса, приходим к квазигазодинамическим уравнениям в приближении вязкого ударного слоя

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial p}{\partial y}\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau u_x\frac{\partial p}{\partial y}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u_x\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho u_y\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta u_x\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\left(\frac{u_x^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial y}\right]. \tag{17}$$

На базе систем (1)–(4) и (14)–(17) можно строить новые маршевые алгоритмы повышенной эффективности.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.

2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2. М., 1990.

3. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М., 1996.

4. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Математическое моделирование: процессы в нелинейных средах. М., 1986. С. 261–278.

5. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М., 1999.

6. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.