УДК 517.9

РЕДУКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА-ЯНГА-МИЛЛСА

А.Н. Цирулёв

Кафедра общей математики и математической физики

A new form of the nonstationary spherically symmetric system of the Einstain-Yang-Mills equations with gauge group $SU(2)$ for the fields of purely magnetic type is obtained. The Yang-Mills equation is excepted from the system with the help of the Bianchi identities for the curvature field. The asymptotic conditions and the initial problem with data on the event horizon is discussed. It is shown that conformally flat asymptotically flat solutions do not exist.

Получена новая форма нестационарной сферически симметричной системы уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса с калибровочной группой SU(2) для полей чисто магнитного типа. Уравнение Янга-Миллса исключено из системы с помощью тождеств Бианки для поля кривизны. Обсуждаются асимптотические условия и задача с данными на горизонте событий. Показано, что конформно плоских асимптотически плоских решений не существует.

Введение. Исследования сферически-симметричных самогравитирующих конфигураций нелинейных калибровочных полей интенсивно проводятся уже более десяти лет [1]. Были обнаружены нетривиальные солитонные решения и решения для черных дыр в согласованной системе уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса (ЭЯМ). В результате данное направление стало наиболее важным в рамках концептуального вопроса о роли и характере гравитационного взаимодействия в микромире.

Все асимптотически плоские решения системы ЭЯМ получены численными методами для сферически-симметричных конфигураций, что естественно объясняется сильной нелинейностью уравнений. Более того, все наиболее содержательные с физической точки зрения решения получены в статическом пределе [2, 3], за исключением слабых аксиально-симметричных возмущений сферически-симметричных конфигураций [3] и моделей коллапса с начальными данными статического решения [4], для которых задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что все статические решения уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса неустойчивы по отношению к нестационарным возмущениям. С другой стороны, корректная постановка задач в теории гравитации предусматривает определение геометрии пространственно-временного многообразия в целом, допуская асимптотические и топологические дополнительные условия, условия симметрии, стационарные данные на горизонте событий и т.д., в то время как начальные данные на пространственноподобной гиперповерхности требуют серьёзного обоснования. Поэтому, уже заметный переход к исследованию преимущественно нестационарных задач для системы ЭЯМ является и необходимым, и актуальным.

Целью данной работы является, во-первых, приведение системы ЭЯМ с калибровочной группой $SU(2)$ для сферически-симметричных конфигураций к виду, удобному для применения численных методов решения нестационарных задач, а во-вторых изучение асимптотических условий для одного важного класса задач с данными на характеристиках.

2. Редукция сферически-симметричной системы Эйнштейна-Янга-Миллса. Полученный в этом разделе вариант редуцированной системы ЭЯМ полностью основывается на работах автора [6, 7]. Его отличительной особенностью является отсутствие в уравнениях вторых производных калибровочного потенциала. Таким образом поле Янга-Миллса входит в сферически-симметричную систему ЭЯМ только через тензор энергии-импульса, тогда как уравнение Янга-Миллса исключается из системы с помощью тождеств Бианки для кривизны. Точнее, поле кривизны рассматривается как симметричная билинейная форма в расслоении 2-форм на пространственно-временном многообразии и разлагается в сумму формы Вейля (тензора Вейля в обычной записи), шаровой части и «материальной части», выражающейся через тензор энергии-импульса. Полученные при этом соотношения для компонент кривизны эквивалентны уравнениям Эйнштейна. При таком подходе тождества Бианки позволяют непосредственно исключить часть динамических уравнений для полей, причем в сферически-симметричном случае исключается единственное уравнение для поля Янга-Миллса.

Мы выбираем стандартный лагранжиан [1] для связной системы ЭЯМ, метрику сферически-симметричного пространства-времени

$$ds^2 = A^2dt^2 - B^2dr^2 - C^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

и калибровочный $SU(2)$ потенциал

$$\Omega = \frac{a}{A}\tau \otimes e^0 + \left(\frac{\omega}{C}\tau_3 - \frac{ctg\theta}{C}\tau_1\right) \otimes e^3 - \frac{\omega}{C} \otimes e^2, \tag{1}$$

где $e^0 = Adt$, $e^1 = Bdr$, $e^2 = Cd\theta$, $e^3 = C\sin\theta d\varphi$, — ортонормированная тетрада 1-форм, (τ_1, τ_2, τ_3) — ортонормированный базис в алгебре Ли $SU(2)$, G - гравитационная постоянная, а γ — заряд калибровочного поля. Предполагается, что метрические функции A, B и C зависят только от координат t и r, которые отнесены к единице длины $\frac{4\pi G}{\gamma}$ и считаются безразмерными. Тогда система ЭЯМ приводится к виду [7]

$$\frac{A_{11}}{A} + 2\frac{A_1C_1}{AC} + 2\frac{C_{11}}{C} + \frac{C_1^2 - C_0^2 - 1}{C^2} - \frac{B_{00}}{B} - 2\frac{C_{00}}{C} - 2\frac{B_0C_0}{BC} = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{A_{11}}{A} - \frac{C_1^2 - C_0^2 - 1}{C^2} - \frac{B_{00}}{B}\right) = \frac{a_1^2}{A^2} + \frac{(1-\omega^2)^2}{C^4},$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{C_{11}}{C} + \frac{A_1C_1}{AC} - \frac{C_{00}}{C} + \frac{B_0C_0}{BC}\right) = \left(\frac{a\omega}{AC}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{C}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{C}\right)^2,$$

$$\frac{C_{01}}{C} - \frac{B_0C_0}{BC} = -2\frac{\omega_0\omega_1}{C^2}, \quad \left(\frac{C^2a_1}{A}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{C^2a_1}{A}\right)_1 = 2\frac{a\omega^2}{A},$$

где индексы 0 и 1 у метрических функций и потенциалов a, ω здесь и далее обозначают дифференцирование вдоль базисных векторных полей $e_0 = \frac{1}{A}\partial_t$, $e_1 = \frac{1}{B}\partial_r$: например, $A_0 \equiv e_0A = \frac{1}{A}\partial_tA$.

В основном физический интерес представляют самогравитирующие конфигурации поля Янга-Миллса чисто магнитного типа [1], которые соответствуют принятому далее условию $a = 0$, тогда два последних уравнения становятся тривиальными тождествами.

Дальнейшая редукция системы (2) связана с использованием остающейся калибровочной свободы в метрике (1). Обычная калибровка $C = r$ плохо подходит для нестандартных задач, особенно для конфигураций с горизонтом событий. Действуя по аналогии с теорией вакуумных черных дыр, выберем калибровочное условие $B = A$ и введем изотропные координаты

$$\xi = \frac{r+t}{2}, \; \eta = \frac{r-t}{2},$$

в которых $e_0 = \frac{1}{2A}(\partial_\xi - \partial_\eta)$, $\quad e_1 = \frac{1}{2A}(\partial_\xi + \partial_\eta)$. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = -4A^2 d\xi d\eta - C^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3}$$

а систему ЭЯМ (2) после длинных, но очевидных преобразований можно записать в виде

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{A_\eta}{A}\right)_\xi + 2\frac{C_{\eta\xi}}{A^2C} + \frac{C_\eta C_\xi}{A^2C^2} - \frac{1}{C^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{A_\eta}{A}\right)_\xi - \frac{C_\eta C_\xi}{A^2C^2} + \frac{1}{C^2} = 2\frac{(1-\omega)^2}{C^4}, \tag{5}$$

$$-\frac{C_{\xi\xi}}{C} + 2\frac{A_\xi C_\xi}{AC} = 2\frac{\omega_\xi^2}{C^2}, \quad -\frac{C_{\eta\eta}}{C} + 2\frac{A_\eta C_\eta}{AC} = 2\frac{\omega_\eta^2}{C^2}. \tag{6}$$

Уравнения (6) соответствуют сумме и разности третьего и четвертого уравнений в системе (2).

Для использования численных методов исследования, уравнения (4)–(6) удобно записать в форме

$$C_{\eta\xi} = -\frac{C_\eta C_\xi}{C} + \frac{A^2}{C}\left(1 - \frac{(1-\omega^2)^2}{C^2}\right), \tag{7}$$

$$\left(\ln A^2\right)_{\eta\xi} = 2\frac{C_\eta C_\xi}{C^2} - 2\frac{A^2}{C^2}\left(1 - 2\frac{(1-\omega^2)^2}{C^2}\right), \tag{8}$$

$$\omega_\xi^2 = \frac{C}{2}\left(\left(\ln A^2\right)_\xi C_\xi - C_{\xi\xi}\right), \quad \omega_\eta^2 = \frac{C}{2}\left(\left(\ln A^2\right)_\eta C_\eta - C_{\eta\eta}\right). \tag{9}$$

Отметим, что в настоящее время отсутствуют какие-либо теоремы существования и единственности асимптотически плоских решений системы ЭЯМ для нестационарных задач.

3. Асимптотические условия. Соответствие уравнений (4)–(6) известным результатам теории самогравитирующих конфигураций ЭЯМ легко проверяется. Во-первых, существуют точные космологические решения [1, 8] (представляющие, в основном, математический интерес), удовлетворяющие данным уравнениям. Во-вторых, функции

$$\omega = 0, \quad A^2 = C^1 = 1 - 2m/C + 1/C^2,$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $r = \xi + \eta$, удовлетворяют системе (4)–(6) и представляют статическую черную дыру массой $2m$ и единичным магнитным зарядом. В этом случае поле Янга-Миллса $(1/C^2)e^3 \wedge e^2 \otimes \tau_1$ вполне аналогично электрическому полю в решении Райснера-Нордстрема системы Эйнштейна-Максвелла. Нас интересуют асимптотически плоские решения, в которых поле Янга-Миллса убывает быстрее, чем $1/C^2$ при $C \to \infty$, и, как следствие, $\omega \to 1$ при $C \to \infty$. При $\omega = 1$ существуют только плоские решения $A = 1, C = \xi + \eta$ и решение Шварцшильда $A^2 = C^1 = 1 - 2m/C$, в которых метрические функции A и C зависят только от переменной $r = \xi + \eta$; в решении Шварцшильда C и r связаны уравнением $r = C + 2m \ln (C/(2m) - 1)$.

Из анализа редуцированной системы (4)–(6) можно элементарными методами получить в общем случае доказательство следующей теоремы: *не существует нетривиальных конформно-плоских асимптотических решений системы ЭЯМ*; для статического случая этот результат типа «*no* – *go*» хорошо известен [9].

Действительно, для полей Янга-Миллса след тензора энергии-импульса равен нулю, поэтому шаровая часть разложения формы кривизны должна быть равна нулю, а форма Вейля для кривизны типа D по Петрову (сферически-симметричное пространство-время относится к этому типу) пропорциональна одной независимой функции u [7], которая для метрики (3) примет вид

$$u = -\frac{1}{2A^2}\frac{C_{\eta\xi}}{C}.$$

Таким образом, в данном случае конформно-плоские многообразия характеризуются условием $u = 0$, т.е. $C = p(\xi) + q(\eta)$. Не теряя общности, можно положить $C = \xi + \eta$, поскольку локально, в области $C >> 1$, метрика (3) приводится к этому виду преобразованием координат $\xi' = p(\xi)$, $\eta' = q(\eta)$. Тогда существует постоянная $s > 0$ такая, что в области

$$\xi = \eta > s, \quad \xi > 0, \quad \eta > 0 \tag{10}$$

из уравнений (7) и (9) следуют условия

$$A^2 \geq 1, \quad \left(A^2\right)_\xi \geq 0, \quad \left(A^2\right)_\eta \geq 0,$$

совместимые с асмиптотикой $A^2 \to 1$, $C \to \infty$, только при $A^2 = 1$, $\omega = 1$. Аналогично статическому случаю [1], из доказанной теоремы и разложения в ряды по степеням $1/(\xi + \eta)$ в области (10) следует, что асимптотика нетривиального асимптотически плоского решения системы ЭЯМ должна быть шварцшильдовой.

4. О постановке задач с данными на горизонте событий. С точки зрения формулировки асимптотических условий система ЭЯМ (4)–(6) является в некотором смысле универсальной, поскольку конформные преобразования координат $\xi \mapsto p(\xi)$, $\eta \mapsto q(\eta)$ не изменяют форму метрики (3) и, следовательно, форму уравнений. Не теряя общности можно считать, что горизонт событий определяется уравнением $\xi\eta = 0$, поэтому при $C \to \infty$ кривыми с постоянным значением функции C являются гиперболы $\xi\eta = const$, а асимптотика дается точным решением Шварцшильда в координатах Крускала:

$$\xi\eta = \left(\frac{C}{2m} - 1\right)\exp\left(\frac{C}{2m}\right), \quad A^2 = \frac{(2m)^3}{C}\exp\left(-\frac{C}{2m}\right). \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что функции A, C определенные уравнениями (11) являются решениями системы (7)–(9) при $\omega = 1$.

Система (7)–(9) допускает, важную с физической точки зрения, постановку задачи с данными на горизонте событий, в общих чертах аналогичную постановке задачи Гурса для волнового уравнения. А именно, данные $C(\xi, \eta_0)$, $A(\xi, \eta_0)$, $\psi(\xi, \eta_0)$ на характеристике $\eta = \eta_0$ позволяют получить из уравнений значения производных $C_\eta(\xi, \eta_0)$, $A_\eta(\xi, \eta_0)$ и восстановить функции $C(\xi, \eta_0 + \varepsilon)$, $A(\xi, \eta_0 + \varepsilon)$ на соседней характеристике $\eta = \eta_0 + \varepsilon$. Например, из уравнения (7) получаем

$$C_\eta(\xi, \eta_0) = C_\eta(0, \eta_0) + \frac{1}{C} \int_{(0,\eta_0)}^{(\xi,\eta_0)} A^2 \left(1 - \frac{(1 - \omega^2)^2}{C^2}\right) d\xi, \tag{12}$$

где $C_\eta(0, \eta_0)$ вычисляется из данных на характеристике $\xi = 0$; аналогичную формулу для $(A^2)_\eta$ следует из (8). Далее из уравнений (9) восстанавливаем $\psi(\xi, \eta_0 + \varepsilon)$.

Разумеется, этот один из многих возможных простой пошаговый алгоритм не гарантирует существование решения. Более того, в статическом случае асимптотически плоские решения возможны только при некоторых дискретных задачах параметра и значения функции C на горизонте. Если подобная ситуация имеет место и для нестационарного случая, то численный поиск решения системы (7)–(9) становится очень нетривиальной задачей. С другой стороны, асимптотика (11) для функций A^2 и $1/(\xi\eta)$ имеет вид потенциалов Юкавы, что позволяет надеяться на возможность построения эффективного численного алгоритма, используя большой опыт решения подобных задач в ядерной физике.

Список литературы

[1] Volkov M.S., Gal'tsov D.V. Gravitating non-Abelian solitons and black holes with Yang-Mills fields // Phys. Rep. 1999. V. 319. P. 1–83.

[2] Bartnik R., McKinnon J. Particlelike solutions of the EYM equation // Phys. Rep. Lett. 1988. V. 61. P. 141–144.

[3] Volkov M.S., Gal'tsov D.V. Non-Abelian EYM black holes // JETP Lett. 1989. V. 50. P. 346–350.

[4] Choptuik M.W., Chmaj T., Bizon P. Critical behavior in gravitational collapse of a Yang-Mills field // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 424–427.

[5] Zhou Z.H. Instability of $SU(2)$ EYM solutions and non-Abelian black holes // Helv. Phys. Acta. 1992. V. 65. P. 767–819.

[6] Tsyrulev A.N. Gravitational fields with Yang-Mills curvature // Proc. of 15th HEP and QFT. Moscow, 2001. P. 328–385.

[7] Tsyrulev A.N. Curvature decomposition and the Einstein-Yang-Mills equations // Part. Nucl. Lett. 2004. N. 1 (in print).

[8] Volkov M.S., Gal'tsov D.V. Cold matter for a hot univers // Phys. Lett. 1991. V. 256. P. 1–17.

[9] Weder R. Absens of stationary solutions to EYM equations // Phys. Rev. 1982. V. 25. P. 2515–2517.