УДК 519.6

НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ КОНТРАСТИРОВАНИЯ ПЕРЕПАДОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

А.Н. Катулев, М.Ф. Малевинский, Г.М. Соломаха
Кафедра математического моделирования

It is proposed to use n-th derivative for function $Sinc\,(x)$ as wavelet in order to contrast sharp changes of a picture in wavelet-transformation. Such transformation destroys high-cycle components of n-th derivative of input. Realization any differential operators are quite possible when are used cascading and paralleling of proposed wavelet-transformation.

В статье предлагается использовать n-ую производную функции $Sinc\,(x)$ в качестве вейвлета в задаче контрастирования перепадов яркости изображения при вейвлет-преобразовании. Такое преобразование подавляет высокочастотные составляющие n-ой производной входного сигнала. Путем каскадного и параллельного применения предложенного вейвлет-преобразования можно реализовать практически любую схему линейной фильтрации изображений.

Введение. Широкое распространение при обработке изображений получили методы выделения границ изображения для последующего распознавания объектов и установления их геометрических характеристик [1]. К ним относятся методы аппроксимации перепада яркости, основанные на принципе минимизации среднеквадратической ошибки представления изображения [1,2]. При этом должно быть верно допущение — ошибки измерений распределены по нормальному закону.

В [3] предложен минимаксный метод оценки параметров изображения для условий априорной неопределенности об ошибках измерений, когда известен лишь диапазон изменения их ошибок. Однако в реальных условиях часто приходится сталкиваться с отсутствием даже такой априорной информации.

В [4,5] рассмотрены различные алгоритмы выделения границ объектов на изображении. Наиболее эффективные из них построены на основе пространственного дифференцирования функции яркости. Показано, что они чувствительны к высокочастотному шуму. Это приводит к большим ошибкам в определении геометрических характеристик объектов. Поэтому актуальной является задача разработки методов и алгоритмов, повышающих эффективность решения задачи выделения границ объектов на изображении.

Цель статьи состоит в разработке метода повышения контрастности перепадов на изображении путем непрерывного вейвлет-преобразования [6,7] со специальным образом подобранным вейвлетом и каскадно-параллельной реализацией.

Вейвлет-преобразование широко используется при обработке сигналов и изображений [6,7], в частности, при определении параметров сигналов и сжатии графической информации. При этом в качестве порождающего вейвлета $\psi()$ используются, как правило, различные функции, выбираемые с учетом специфики решаемой задачи.

1. Постановка задачи. Задано изображение в виде функции $f(x, y)$ яркости от двух непрерывных аргументов x и y на прямоугольнике $[-T_x, T_x] \times [-T_y, T_y]$. Полагается, что изображение получено в условиях воздействия шума с известным законом распределения. Необходимо выделить границы — перепады на изображении как решение задачи определения ядра интегрального преобразующего оператора, обеспечивающего вычисление производных входного сигнала $f(x, y)$ с подавлением его высокочастотных составляющих.

2.1. Метод контрастирования границ. Одномерный случай. В качестве вейвлета возьмем n-ую производную функции $Sinc(x) = \sin(x)/x$. Тогда одномерное вейвлет-преобразование запишется в виде

$$W(a, b) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\sin b(x-a)\pi}{b(x-a)\pi} \right] f(x)\, dx, \qquad (1)$$

где a — параметр масштаба, b — параметр сдвига.

Покажем, что данное вейвлет-преобразование вычисляет n-ую производную входного сигнала $f(x)$ с подавлением высокочастотных составляющих в n-ой производной сигнала. Для этого найдем интегральное преобразование Фурье от выражения (1) — предполагая, что n-ая производная от $Sinc(x)$ есть периодическая функция с периодом $2T$, имеем

$$\tilde{W}_T(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} \left\{ \int\limits_{-T}^{T} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\sin b(x-a)\pi}{b(x-a)\pi} \right] f(x)\, dx \right\} \ell^{-ja\omega} da =$$

$$= (-1)^n \int_{-T}^{T} f(x) \ell^{-jx\omega} \left\{ \int_{-T}^{T} \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{\sin b(a-x)\pi}{b(a-x)\pi} \right] \ell^{-j(a-x)\omega} da \right\} dx. \qquad (2)$$

Сделаем замену переменных во втором интеграле выражения (2) следующим образом: $\xi = a - x$. В этом случае выражение (2) примет вид

$$\tilde{W}_T(\omega) = (-1)^n \int_{-T}^{T} f(x) \ell^{-jx\omega} \left\{ \int_{-T-x}^{T-x} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[\frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi} \right] \ell^{-j\xi\omega} d\xi \right\} dx. \qquad (3)$$

При предположении о периодичности с периодом $2T$ подынтегральной функции во внутреннем интеграле выражения (3) имеем равенство

$$\int\limits_{-T-x}^{T-x} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi} \right] \ell^{-j\xi\pi} d\xi = \int\limits_{-T}^{T} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[\frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi} \right] \ell^{-j\xi\pi} d\xi = \tilde{S}_n^T(\omega). \qquad (4)$$

С учетом (4) выражение (3) запишется в виде

$$\tilde{W}_n^T = (-1)^n \tilde{F}^T(\omega) \tilde{S}_n^T(\omega), \qquad (5)$$

где $\tilde{F}^T(\omega)$ — преобразование Фурье входного сигнала $f(x)$ на конечном интервале $[-T, T]$:

$$\tilde{F}^T(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} f(x) \ell^{-jx\omega} dx.$$

Получим рекуррентное соотношение для расчета

$$\tilde{S}_n^T(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{d^n}{d\xi^n}\left[\frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi}\right]\ell^{-j\omega\xi}d\xi. \tag{6}$$

Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям определенных интегралов

$$\int\limits_{-T}^{T} u(\xi)v'(\xi)d\xi = [u(\xi)v(\xi)]\Bigg|_{\xi=-T}^{\xi=T} - \int\limits_{-T}^{T} u'(\xi)v(\xi)d\xi. \tag{7}$$

Обозначим

$$v(\xi) = \frac{d^n}{d\xi^n}\left(\frac{\sin b\xi\pi}{\pi\xi\pi b}\right), \quad u(\xi) = \ell^{-j\omega\xi}.$$

В результате получим рекуррентное соотношение для расчета $\tilde{S}_n^T(\omega)$:

$$\tilde{S}_n^T(\omega) = \left[\left(\frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi}\right)^{(n-1)}\ell^{-j\omega\xi}\right]\Bigg|_{\xi=-T}^{\xi=T} + (j\omega)\tilde{S}_{n-1}^T(\omega), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Получим аналитическое выражение для расчета $\tilde{S}_0^T(\omega)$:

$$\tilde{S}_0^T(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin b\xi\pi}{b\xi\pi}\ell^{-j\omega\xi}\,d\xi = 2\int\limits_{0}^{T} \frac{\sin b\xi\pi \cdot \cos\omega\xi}{b\xi\pi}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} \frac{\sin(b\pi+\omega)\xi + \sin(b\pi-\omega)\xi}{b\xi\pi}\,d\xi = \frac{1}{b\pi}\left[Si((b\pi+\omega)T) + Si((b\pi-\omega)T\right], \tag{9}$$

где $Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус.

Пользуясь соотношениями (8) и (9), приведем развернутые выражения для расчета $\tilde{S}_1^T(\omega)$ и $\tilde{S}_2^T(\omega)$:

$$\tilde{S}_1^T(\omega) = (-j)\frac{2\sin(bT\pi)\cos(T\omega)}{bT\pi} + (j\omega)\tilde{S}_0^T(\omega),$$

$$\tilde{S}_2^T(\omega) = \frac{2(bT\pi\cos(bT\pi) - \sin(bT\pi))\cos(T\omega)}{bT^2\pi} + (j\omega)\tilde{S}_1^T(\omega).$$

Возьмем предельный случай интервала наблюдения, т.е. когда $T = \infty$. В этом случае из соотношений (8) и (9) получим, что

$$\tilde{S}_n(\omega) = \frac{(j\omega)^n}{b} \text{ при } |\omega| \le b\pi; \quad \tilde{S}_n(\omega) = \frac{(j\omega)^n}{2b} \text{ при } |\omega| = b\pi; \tag{10}$$

а при $|\omega| > b\pi$ $\tilde{S}_n = 0$.

Из последних соотношений и (5) следует, что вейвлет-преобразование (1) вычисляет n-ую производную входного сигнала с подавлением в спектре сигнала составляющих с частотами, удовлетворяющими условию $|\omega| > b\pi$.

Для подчеркивания перепадов на изображении возможно многокаскадное применение данного фильтра.. Например, в первом каскаде производится подавление высокочастотных составляющих в самом сигнале, затем производится вычисление производной, в третьем каскаде происходит сглаживание первой производной, в четвертом каскаде происходит вычисление второй производной и т.д.

2.2. Метод контрастирования границ. Двумерный случай. Двумерное вейвлет-преобразование, примененное к функции $f(x,y)$ от двух переменных x и y, запишем в виде

$$W(a,b,p,c) = \int\limits_{-T_x}^{T_x}\int\limits_{-T_y}^{T_y} \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\sin b\pi(x-a)}{b\pi(x-a)}\right]\cdot\frac{d^m}{dy^m}\left[\frac{\sin c\pi(x-p)}{c\pi(x-p)}\right] f(x,y)\,dxdy. \qquad (11)$$

Найдем двумерное преобразование Фурье от свертки (11) по переменным a и p.

Предполагая, как и для одномерного случая, что подынтегральные функции в свертке (11) периодичны с периодом $2T_x$ по координате x и с периодом $2T_y$ по координате y, получим спектр свертки (11)

$$\tilde{W}_{T_xT_y}(\omega_x;\omega_y) = (-1)^{n+m}\tilde{S}_n^{T_x}(\omega_x)\tilde{S}_m^{T_y}(\omega_y)\tilde{F}_{T_xT_y}(\omega_x,\omega_y), \qquad (12)$$

где

ω_x, ω_y — пространственные частоты;

$\tilde{S}_n^{T_x}(\omega_x)$, $\tilde{S}_m^{T_y}(\omega_y)$ — преобразования Фурье вейвлетов по переменным a и p на интервалах $[-T_x,T_x]$ и $[-T_y,T_y]$ соответственно (аналогичны выражению (6));

$\tilde{F}_{T_xT_y}(\omega_x,\omega_y) = \int\limits_{-T_x}^{T_x}\int\limits_{-T_y}^{T_y} f(x,y) - \ell^{-j(x\omega_x+y\omega_y)}\,dxdy.$

Преобразования Фурье $\tilde{S}_n^{T_x}(\omega_x)$ и $\tilde{S}_m^{T_y}(\omega_y)$ вычисляются по формулам (8) и (9).

Для значений $T_x = T_y = \infty$ из выражений (10) и (12) следует, что двумерное вейвлет-преобразование (11) вычисляет смешанную производную $(n+m)$-го порядка $\frac{\partial^{n+m} f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m}$ от входного сигнала с подавлением в спектре сигнала составляющих с частотами, удовлетворяющими условию $|\omega_x| > b\pi$ по переменной x и условию $|\omega_y| > c\pi$ по переменной y.

Для обнаружения и выделения контуров на изображении используются дифференциальные операторы, как правило, не выше второго порядка. В общем виде такой оператор записывается следующим образом:

$$a_{11}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + a_{10}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} +$$

$$+a_{01}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + a_{00} f(x,y) = z(x,y), \qquad (13)$$

где a_{ik}; $i,k = 0,1,2$ — заданные коэффициенты.

Если, например, в выражении (13) положить $a_{11} = a_{22} = 1$, а остальные коэффициенты равными нулю, то получим оператор Лапласа, который широко используется в обработке изображений.

С помощью вейвлет-преобразования (11) путем каскадного и параллельного их применения можно реализовать практически любую схему линейной фильтрации изображений.

3. Заключение.

1. Метод контрастирования границ объектов на изображении основан на применении интегральных преобразований (в отличие от конечно-разностных) для вычисления производных входного сигнала, что повышает эффективность подавления высокочастотных составляющих шума.

2. Из формул (1), (5), (10) следует, что вейвлет-преобразование с вейвлетом в виде n-ой производной от функции $Sinc(x)$ обладает фильтрующим свойством и эквивалентно фильтру нижних частот для n-ой производной входного сигнала.

3. Каскадные, параллельные и каскадно-параллельные схемы реализации вейвлет-преобразования обеспечивают контрастирование и классификацию объектов изображений в условиях априорной неопределенности о шумовых возмущениях.

Список литературы

[1] Бакут П.А., Колмогоров Г.С. Сегментация изображений: методы выделения границ областей // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. № 10. С. 7.

[2] Прэтт У.К. Цифровая обработка изображений. М., 1982.

[3] Виленчик Л.С., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф. Минимаксный метод оценки параметров изображений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 120.

[4] Денисов Д.А., Низовкин В.А. Сегментация изображений на ЭВМ // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. № 10. С. 5.

[5] Яншин В.В. Анализ и обработка изображений принципы и алгоритмы. М., 1995.

[6] Новиков И.Я., Стечкин Б.С. Основные конструкции всплесков // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. Вып. 4. С. 999.

[7] Воробьев В.И., Грибунин В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб., 1999.