УДК 519.6

МОДИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: СГЛАЖИВАНИЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Масюков*, В.В. Масюков**
Кафедра информатики*,
кафедра общей математики и математической физики**

A modification of wavelet transforms is proposed to make basis functions smoothed.

Предложен метод модификации дискретных вейвлет-преобразований, приводящий к разложению по более гладким базисным функциям, чем у исходных вейвлет-преобразований. Вычислительная сложность прямого и обратного преобразования остаются линейными.

Введение. В работе [1] мы предложили интегральные вейвлет-преобразования, линейная (при каждом значении масштабирующего фактора) сложность которых не зависит от значения масштабирующего фактора, так как вычисление свертки с вейвлетами сводится к решению систем линейных уравнений с ленточными матрицами, хотя эти вейвлеты инфинитны. В настоящей работе мы предлагаем модификацию дискретных вейвлет-преобразований, основанную на той же идее быстрого обращения некоторых инфинитных фильтров. В результате мы получаем разложение сигнала по базисным функциям, отличающимся от исходных вейвлетов (произвольного дискретного вейвлет-преобразования) большей гладкостью. Вычислительная сложность разложения и восстановления остаются линейными. Алгоритм представлен для практического случая преобразования дискретного ряда.

1. Масштабируемое быстрое сглаживание. Пусть $u = u^n = \{u_k,\ k = 1..n\}$ есть временной ряд из n отсчетов. Рассмотрим преобразование S_τ такое, что $S_\tau[u] = v$, если

$$\begin{cases} 2\tau^2 v_k - \tau^2\left(v_{k+1} + v_{k-1}\right) + v_k = u_k, & k = 2..n-1, \\ v_1 = u_1, \quad v_n = u_n. \end{cases} \tag{1}$$

Преобразование S_τ^2, как показано в [1], является дискретной аппроксимацией свертки с фильтром

$$\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}} * \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}} = \frac{1}{4\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\left(1 + \frac{|t|}{\tau}\right), \tag{2}$$

изображенном на рисунке 1 вместе с первой производной. Сглаживающий фильтр (2) реализуется прогонкой, имеет единичную площадь, его спектр равен

$$\frac{1}{\left(1 + \tau^2\omega^2\right)^2}, \tag{3}$$

где ω круговая частота.

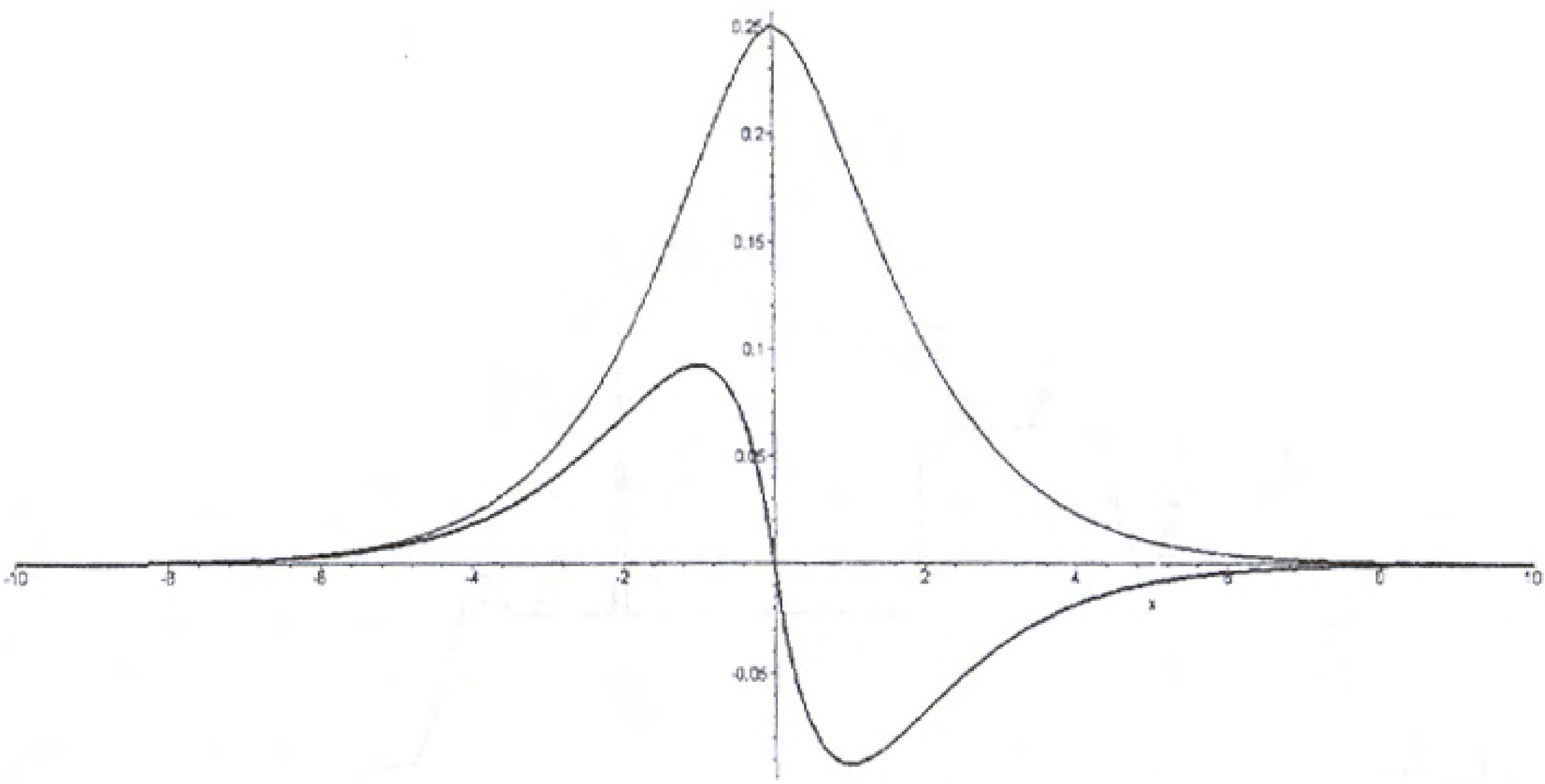

Рис. 1: Фильтр (2) и его первая производная, играющая роль вейвлета в предложенном алгоритме.

Фильтр (2) является инфинитным (финитным с машинной точностью), обращение $(S_\tau^2)^{-1}$ тривиально: это пяти-точечный обостряющий фильтр (или два прохода трех-точечного фильтра). Сложность прямого и обратного преобразования не зависит от масштабирующего фактора τ и линейно зависит от числа отсчетов.

2. Алгоритм. На каждом шаге разложения к ряду c^n из n осчетов, где n теперь есть степень двух, применим оператор $(S_\tau^2)^{-1}$, обозначим $\tilde{c}^n = (S_\tau^2)^{-1}[c^n]$. Далее вычисляем прореженные ряды половинной длины:

$$\begin{cases} c_i^{n/2} = \tilde{c}_{2i}^n + \tilde{c}_{2i+1}^n, \\ d_i^{n/2} = \tilde{c}_{2i}^n - \tilde{c}_{2i+1}^n, \end{cases} \tag{4}$$

Запомним $d^{n/2}$ и применим те же операции к $c^{n/2}$, пока длина получаемых рядов больше 1. На каждом шаге восстановления $\tilde{c}^k$ вычисляется по $c^{k/2}$ и $d^{k/2}$, затем применяется преобразование S_τ^2 для получения c^k. Очевидно, что разложение и восстановления являются взаимно обратными, следовательно, базис является полным.

Без обострения и сглаживания ($\tilde{c} = c$) формулы (4) являются преобразованием Хаара [2]. Наш алгоритм приводит к тому, что базис Хаара сглаживается: коэффициенты разложения сворачиваются не со ступеньками Хаара, а с производными фильтра (2) — см. рис. 1. Однако, наш алгоритм не является, строго говоря, дискретным вейвлет-преобразованием, так как на каждом шаге восстановления происходит не только растяжение, но и дополнительное сглаживание. Это, конечно, не препятствует частотно-временной локализации. При выборе $\tau = 1/\pi$ (в соответствии с теоремой Котельникова) дополнительные сглаживания происходят в масштабе, существенно меньшем, чем масштаб вейвлета.

На рисунке 2 показано восстановление ряда из 256 отсчетов по 32 наиболее значимым коэффициентам (сжатие информации в 8 раз) разложения при использовании преобразования Хаара и представленного алгоритма. Несмотря на то, что исходные данные благоприятны для преобразования Хаара наличием константных интервалов ряда, наше восстановление в определенном смысле предпочтительнее.

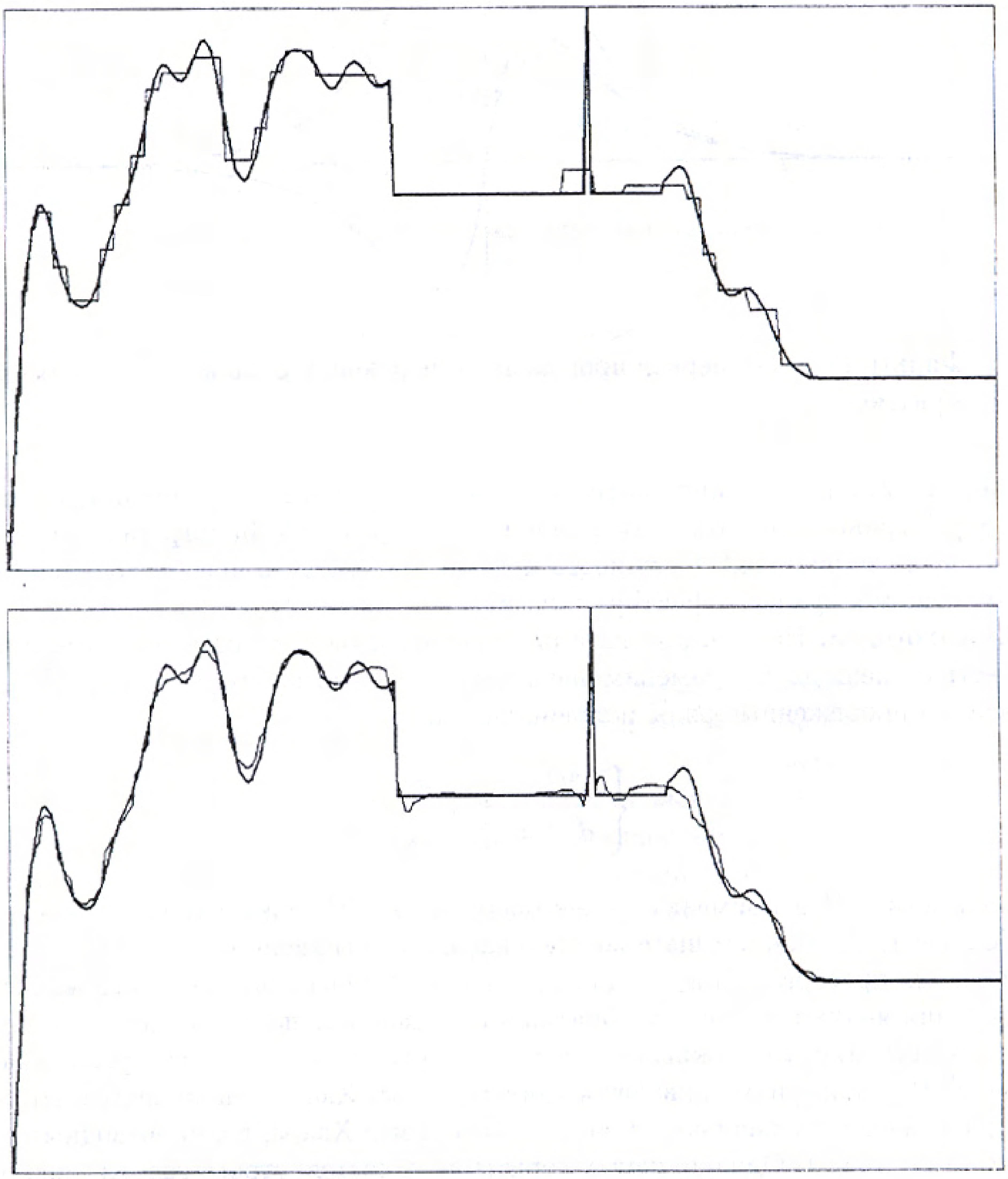

Рис. 2: Сравнение восстановлений (тонкие линии) исходного ряда (показан толстыми линиями) по сжатой в 8 раз информации с помощью преобразования Хаара (вверху) и предложенного алгоритма (внизу).

Заключение. Понятно, что вместо формул Хаара (4) в алгоритме можно использовать разложение любого другого дискретного вейвлет-преобразования. При этом базисные функции становятся более сглаженными, по сравнению с исходными вейвлетами. Дополнительные вычисления при нашей модификации дискретных вейвлет-преобразований имеют линейную сложность и разложение-восстановление остаются по-прежнему эффективными.

Список литературы

[1] Масюков А.В., Шленкин В.В., Масюков В.В. Семейство эффективно вычисляемых интегральных вейвлет-преобразований // Труды Международной конференции «Математические методы в геофизике», Новосибирск, 2003. С. 190–196.

[2] Чуи К. Введение в вейвлеты. М., 2001.