УДК 519.95

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ[1]

И.А. Язенин

Кафедра математической статистики и эконометрики

The model of portfolio investment optimization with fuzzy random data is investigated in the form presuming the attainability of acceptable profit level of possibility (necessity) measure. Solving method based on the reduction of an initial problem to equivalent determined analog — non-linear programming problem. Under certain assumptions this problem can be reduced to separable programming problem.

Исследуется модель оптимизации инвестиционного портфеля при нечетких случайных данных в постановке, предполагающей достижение приемлемого уровня доходности по мере возможности (необходимости). Предложен метод решения задачи, основанный на ее редукции к эквивалентному детерминированному аналогу — задаче нелинейного программирования. При некоторых предположениях эта задача может быть сведена к задаче сепарабельного программирования.

Введение. Данная работа продолжает развивать подход к проблеме выбора инвестиционного портфеля, предложенный в работах [1–3]. Разработанные в них оптимизационные модели портфельного анализа ориентированы на обработку нечетких случайных данных – значений доходностей финансовых активов. Математической моделью нечетких случайных данных является нечеткая случайная величина [4, 5]. Ее использование позволяет моделировать комбинированный тип неопределенности, присущий инвестиционному процессу.

В данной работе модель портфельного анализа включена в рамки нечетко-целевого программирования и формализована на основе возможностного подхода. Разработан метод решения задачи.

1. Постановка задачи. В соответствии с [2, 3], пусть R_i есть нечеткая случайная величина, моделирующая доходность i-го финансового актива, то есть

$$R_i\left(.,.\right):\Omega\times\Gamma\to E^1,\ i=1,...,n;$$

где Ω и Γесть элементы вероятностного $(\Omega,\,\mathrm{B},\,\mathrm{P})$ и возможностного $(\Gamma, \mathrm{P}(\Gamma), \pi)$ пространств [5].

Пусть w_i есть доля i-го актива в портфеле, $i=1,...,n$. Тогда ожидаемая доходность и риск портфеля при фиксированном $w=(w_1,...,w_n)$ являются нечеткими величинами

$$\hat{R}_p\left(w,\gamma\right)=E\{R_p\left(w,\omega\,,\gamma\right\}, \tag{1}$$

$$\hat{V}_p\left(w,\gamma\right)=E\left\{\left(R_p\left(w,\omega\,,\gamma\right)-\hat{R}_p\left(w,\gamma\right)\right)\right\}^2. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-01137).

Здесь

$$R_p(w, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i(w, \gamma) \tag{3}$$

есть нечеткая случайная величина, представляющая доходность портфеля.

В соответствии с определением числовых характеристик нечеткой случайной величины [4, 5, 6] и формулами (1), (2)

$$\hat{R}_p(w, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{R}_i(\gamma),$$

$$\hat{V}_p(w, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} D(R_i) w_i^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^{n} w_k w_l \, cov(R_k, R_l),$$

где $\hat{R}_i(\gamma) = E\{R_i(w, \gamma)\}$, $D(R_i)$ есть дисперсия нечеткой случайной величины R_i, $cov(R_k, R_l)$ — ковариация нечетких случайных величин R_k, R_l (нечеткая величина).

Обычно инвестор представляет приемлемый для него уровень ожидаемой доходности портфеля — уровень притязаний критерия. Учитывая, что ожидаемая доходность портфеля, определяемая по формуле (1), есть нечеткая величина, то одна из возможных постановок задачи оптимизации портфеля может состоять в максимизации меры возможности (необходимости), достижения приемлемого уровня ожидаемой доходности. Учитывая, что риск портфеля $V_p(w, \gamma)$ также есть, нечеткая величина, можно требовать, чтобы он не превосходил некоторого порогового значения с некоторой возможностью (необходимостью).

В результате соответствующая модель оптимизации портфеля может иметь вид:

$$\tau\left\{\hat{R}_p(w, \gamma)\, R m_p(\gamma)\right\} \to \max, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \tau\left\{\hat{V}_p(w, \gamma)\, R r_p(\gamma)\right\} \geq \pi_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} w_i = 1,\ w_1, ..., w_n \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\tau \in \{\pi, \nu\}$, m_p — нечеткий уровень доходности, приемлемый для инвестора, $r_p(\gamma)$ — возможный уровень риска, $\pi_0 \in (0, 1]$ — заданный уровень возможности, π и ν меры возможности и необходимости соответственно, R — бинарное отношение: $R \in \{$«$=$», «$\leq$», «$\geq$»$\}$. Перейдем к методу решения задачи (4), (5).

2. Метод решения задачи. Предлагаемый в статье метод состоит в редукции задачи (4), (5) к детерминированной эквивалентной задаче. Такой метод классифицируется как непрямой. Изложим его в случае меры возможности.

Итак, пусть в модели (4), (5) $\tau = \pi$, а R=«$=$». Тогда она трансформируется в задачу возможностной оптимизации

$$\pi\left\{\hat{R}_p(w, \gamma) = m_p(\gamma)\right\} \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \pi\left\{\hat{V}_p(w,\gamma) = r_p(\gamma)\right\} \geq \pi_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} w_i = 1,\ w_1, \ldots, w_n \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть в задаче (6), (7) нечеткие величины* $m_p(\gamma)$, $r_p(\gamma)$, $\hat{R}_i(\gamma)$ *являются выпуклыми, минисвязанными и характеризуются полунепрерывными сверху распределениями с конечными носителями. Тогда задача (6), (7) эквивалентна задаче*

$$x_0 \to \max, \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_0 \leq \mu_{\hat{R}_i}(\nu_i), \\ x_0 \leq \mu_{m_p}(t), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \nu_i = t, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d_i^-(\pi_0) w_i + \sum\limits_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \Theta_{kl}^-(\pi_0) w_k w_l \leq r_p^+(\pi_0), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d_i^+(\pi_0) w_i + \sum\limits_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \Theta_{kl}^+(\pi_0) w_k w_l \geq r_p^-(\pi_0), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, w_1, \ldots, w_n \geq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mu_{\hat{R}_i}$, μ_{m_p} *есть функции распределения нечетких величин* $\hat{R}_i(\gamma)$, $m_p(\gamma)$; $\Theta_{kl}^-(\pi_0)$, $\Theta_{kl}^+(\pi_0)$, $r_p^-(\pi_0)$, $r_p^+(\pi_0)$ — *границы* π_0*-уровневых множеств величин* $cov(R_k, R_l)$ *и* r_p *соответственно.*

С учетом вида возможностных функций, представляющих доходность и риск портфеля, доказательство теоремы может основываться на методе, предложенном в [7].

Методы расчета границ уровневых множеств нечеткой дисперсии и нечеткой ковариации в деталях рассматриваются в [3].

Заключение. В статье построены модель и метод оптимизации портфеля в условиях нечетких случайных данных. Задача (8), (9), представляющая эквивалентный детерминированный аналог модели, есть задача нелинейного программирования. Она допускает упрощение. Если дополнительно предполагать независимость случайных факторов модели, то коэффициенты ковариации нечетких случайных величин будут равны нулю. От произведения переменных в связующем ограничении $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \nu_i = t$ можно освободиться способом, рассматриваемым в [8]. В результате задача (8), (9) может быть сведена к задаче сепарабельного программирования.

Список литературы

[1] Yazenin I.A. Minimal risk and efficiency portfolios for fuzzy random data // Abstracts 21th seminar on stability problems of stochastic models. Eger, Hungary. 2001. P. 182.

[2] Язенин И.А. Портфели минимального риска и максимальной эффективности в условиях нечетких случайных данных // Сложные системы: моделирование и оптимизация. Тверь, 2001. С. 59–63.

[3] Язенин И.А. О методах оптимизации инвестиционного портфеля в нечеткой случайной среде // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь, 2002. С. 130–135.

[4] Puri M.D., Ralesky D.A. Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 114.

[5] Yazenin A.V., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. Cottbus, Germany, 1996.

[6] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. № 2. Сер. «Прикладная математика». Вып. 1. 2003. С. 39–43.

[7] Язенин А.В. К задаче максимизации возможности достижения нечеткой цели // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 4. С. 120–123.

[8] Муртаф Б. Современное линейное программирование. М., 1984.